普通高等教育“十二五”规划教材

YIYUAN FENXI XUE XUEXI ZHIDAO

一元分析学

学习指导

雷冬霞　韩志斌　黄永忠　编

長江出版傳媒　湖北科学技术出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

YIYUAN FENXI XUE XUEXI ZHIDAO

一元分析学

学习指导

雷冬霞　韩志斌　黄永忠　编

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

一元分析学学习指导 / 雷冬霞，韩志斌，黄永忠编. —武汉：湖北科学技术出版社，2014. 9
ISBN 978-7-5352-6937-9

Ⅰ. ①一… Ⅱ. ①雷… ②韩… ③黄… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 193689 号

责任编辑：杨瑰玉 封面设计：曾雅明

出版发行：湖北科学技术出版社 电话：027—87679468
地 址：武汉市雄楚大街 268 号 邮编：430070
（湖北出版文化城 B 座 13—14 层）
网 址：http://www.hbstp.com.cn

印 刷：武汉兴和彩色印务有限公司 邮编：430072

700×1000 1/16 15.5 印张 330 千字
2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
定价：28.00 元

前　言

本书是大学生数学创新教材之一《一元分析学》的辅导教材. 微积分学是理工科学生最重要的一门数学基础课程, 它集中反映了数学科学的学科特点, 因而对学生进行最基本、最必要的基础训练, 为学生学习其他数学相关课程和专业课程打下良好的基础是十分必要的.

本书的直接目的是为上《一元分析学》习题课的教师和学生同时提供服务, 帮助大学一年级新生顺利完成从中学到大学的过渡, 逐步熟悉并掌握分析学中的论证推理能力. 本书每章设置了内容提要、补充例题与评注、部分习题选解及知识扩展四部分. 内容提要不是对该章主要内容的简单罗列, 而是重点突出该章的主要内容, 分析理论作用和指导解题方法. 补充例题对许多经典性的内容采取比较新颖的证明和分析方法, 在例题和习题的选取中也力求创新, 对于基本例题和基本方法以及较有难度的例子作了比较详细的讲解. 知识点评注部分则注重点评与知识点的归纳总结.《一元分析学》课后习题来源于数学分析习题集、数学竞赛题及考研题, 有相当的难度. 习题选解部分帮助学生启发自己的思维, 寻找自己知识的不足, 提高语言表达能力及论证推理能力. 知识扩展部分对于教材中的一系列问题作了较深入的讨论, 例如单调函数的极限、连续及可微函数的局部性、推广的有界性及一致连续性定理等. 它们既是课程内容的自然延伸, 又是进一步学习的起跳板.

本书也可作为微积分及数学分析考研的复习教材, 帮助考生对基本内容和方法进行复习. 读者经较长时间思考后仍不得要领时方可阅读解答, 然后再独立完成, 这样才能提高自身的数学素养, 达到更好地学习一元分析课程的目的.

本书编写组的成员是雷冬霞、黄永忠和韩志斌. 极限和连续性的执笔人是雷冬霞, 一元微分学和常微分方程的执笔人是黄永忠, 一元积分学的执笔人是韩志斌.

由于编者水平所限, 难免会有许多错误和不妥之处, 恳请读者对本书批评指正, 提出进一步改进的宝贵意见, 以利于本书今后的修正.

编　者

2014 年 5 月

目　录

第 1 章　实数集与函数

一元分析学的研究对象是一元实函数, 是一元函数的微积分学, 其定义域和值域都是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, 所以对实数集与函数的了解是基本的.

§1.1　实　数　集

一　内容提要

1. 实数的定义及性质.

2. 邻域. 各种邻域的记号及含义.

3. 无限区间记号: $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, 其中出现的 $-\infty$ 与 $+\infty$ 仅是常用的记号, 它们并不表示具体的数.

4. 有界集和无界集的概念.

要证明数 M 不是数集 S 的上界 (或下界), 只需证明 $\exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 > M$(或 $x_0 < M$, 相应地). 要证 S 无上 (下) 界, 只需证明任何数 M 都不是 S 的上 (下) 界.

5. 确界的定义及确界原理.

在初等数学中我们知道有限个数存在最大数和最小数, 但是无限数集不一定有最大 (小) 数. 例如: $S = (a, b)$ 是有界数集, 但没有最大数和最小数, 但是 S 有最小上界 b 和最大下界 a. 由此可见, 上 (下) 确界是最大 (小) 数在无限数集情况下的推广.

确界概念有两种等价的叙述, 以上确界为例: 设数集 $S \subset \mathbb{R}$, 若数 η 满足:

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leqslant \eta$, 即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界,

或

(i) 对一切 $x \in S$, 有 $x \leqslant \eta$, 即 η 是 S 的上界;

(ii) 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$, 即 η 是 S 的最小上界,

则称 η 是数集 S 的上确界. 这两种定义是等价的. 后一定义中的 $\eta - \varepsilon$ 相当于前一定义中的 α. 在上述定义中可以限定 $\varepsilon < \varepsilon_0$, 其中 ε_0 为某一很小的正数. 后一定义在某些证明题中使用起来更方便.

确界原理: 设 S 是非空数集. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

确界原理是实数系完备性的几个等价定理中的一个. 在不少数学分析教程中把它作为叙述实数理论的出发点.

6. 几个常用的初等不等式

(1) 三角形不等式: $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

(2)Bernoulli 不等式:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为符号相同且大于 -1 的实数.

特别有 $(1+x)^n \geqslant 1+nx(x>-1, n\in\mathbb{N}_+)$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

(3)Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

等号成立当且仅当序列 $\{x_n\}$ 与序列 $\{y_n\}$ 成比例.

(4) 平均值不等式:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正实数, 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

二　补充例题与评注

例 1.1.1　设 $a, b\in\mathbb{R}$, 证明: 对任何正数 ε, $|a-b|<\varepsilon \Leftrightarrow a=b$.

证　充分性显然成立. 再证必要性. 设 $a\neq b$, 由实数的有序性, 有 $a>b$ 或 $a<b$. 不妨设 $a>b$, 令 $\varepsilon=(a-b)/2$, 则 $|a-b|=a-b>\varepsilon$, 与 $|a-b|<\varepsilon$ 矛盾, 从而有 $a=b$.

注　在证明过程中利用了 ε 的任意性, 只要设法找到某一正数 ε 使条件不成立即可. 这个结论在证明数列、函数极限等的某些性质中经常用到, 如证明数列与函数极限的唯一性, 见教材定理 2.1.1 与定理 2.2.1.

例 1.1.2　求下列数集的上下确界, 并用定义加以证明.

(1)$S=\{x|x^2<3\}$;　　(2)$S=\left\{x|x=\dfrac{m}{n}, m<n, m,n\in\mathbb{N}_+\right\}$, $\mathbb{N}_+$ 为正整数集.

解　(1) $\sup S=\sqrt{3}$, $\inf S=-\sqrt{3}$. 下面依定义加以证明.

因为由 $x^2<3$ 解得 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, 所以 $\forall x\in S$, 有 $x<\sqrt{3}$ 且 $x>-\sqrt{3}$, 故 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ 分别是 S 的上、下界. 又对于任意的 $0<\varepsilon<1$, 取 $x_0=\sqrt{3}-\dfrac{\varepsilon}{2}$, $y_0=$

$-\sqrt{3}+\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则 $x_0 \in S$, $y_0 \in S$, 且 $x_0 > \sqrt{3}-\varepsilon$, $y_0 < -\sqrt{3}+\varepsilon$. 因此, 由上下确界的定义知 $\sup S=\sqrt{3}$, $\inf S=-\sqrt{3}$.

(2) $\sup S=1$, $\inf S=0$. 下面依定义加以证明.

因为 $0<m<n$, 对于任意的 $x\in S$, 有 $0<x<1$, 故 1,0 分别是 S 的上、下界. 又对于任意的 $0<\varepsilon<1$, 取 $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, $m_0=n_0-1$, 则 $m_0, n_0\in\mathbb{Z}_+$, 且 $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$. 取 $x_0=\dfrac{m_0}{n_0}$, 则 $x_0\in S$ 且 $x_0=1-\dfrac{1}{n_0}>1-\varepsilon$. 依上确界定义, 1 为 S 的上确界. 又取 $y_0=\dfrac{1}{n_0}$, 则 $y_0\in S$ 且 $y_0<\varepsilon=0+\varepsilon$, 所以由下确界的定义知 $\inf S=0$.

例 1.1.3 设 a 为任意实数, E 为 $\mathbb{R}$ 中非空有界数集, 证明:

$$\sup(a+E)=a+\sup E, \qquad \inf(a+E)=a+\inf E,$$

其中 $a+E=\{a+x|x\in E\}$.

证 先证 $\sup(a+E)=a+\sup E$. 由 $\sup E$ 的定义, 有

(i)$\forall x\in E, x\leqslant \sup E$;

(ii) $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in E$ 使得 $x_0>\sup E-\varepsilon$.

因此有

(i) $\forall x\in E, a+x\leqslant a+\sup E$;

(ii) $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in E$ 使得 $a+x_0>a+\sup E-\varepsilon$.

因而证得 $\sup(a+E)=a+\sup E$. 同理可证 $\inf(a+E)=a+\inf E$.

注 证明有关确界的等式与不等式时, 初学者一定要熟悉定义, 把要证的结论用确界的定义确切地写出来, 使其满足确界定义的两个条件.

三 教材习题选解

3. 设 E 为非空有下界的数集. 证明: $\inf E=\xi\in E\Leftrightarrow \min E=\xi$.

证 "$\Rightarrow$" 因为 $\inf E=\xi$, 所以对 $\forall x\in E$, 都有 $x\geqslant\xi$. 又已知 $\xi\in E$, 所以 $\min E=\xi$.

"$\Leftarrow$" 因为 $\min E=\xi$, 所以 $\forall x\in E, x\geqslant\xi$ 成立. 又 $\forall\varepsilon>0$, 取 $x_0=\xi$, 则 $x_0\in E$ 且 $x_0<\xi+\varepsilon$. 故 $\inf E=\xi\in E$. 命题得证.

4. 设 E_1, E_2 为非空有界数集, 定义数集 $E_1+E_2=\{z|z=x+y, x\in E_1, y\in E_2\}$. 证明: $\sup(E_1+E_2)=\sup E_1+\sup E_2$.

证 设 $\xi_1=\sup E_1, \xi_2=\sup E_2$, 则对 $\forall x\in E_1$, 有 $x\leqslant\xi_1$; 对 $\forall y\in E_2$, 有 $y\leqslant\xi_2$. 于是, 对 $\forall z\in E_1+E_1$, $z=x+y$, 有 $z\leqslant\xi_1+\xi_2$.

又因为对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E_1$, 使得 $x_0>\xi_1-\dfrac{\varepsilon}{2}$; 同时 $\exists y_0\in E_2$, 使得 $y_0>\xi_2-\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $z_0 = x_0 + y_0$, 则 $z_0 \in E_1 + E_2$, 且使得 $z_0 > \xi_1 + \xi_2 - \varepsilon$.

综上所述, 由上确界的定义可知, $\sup(E_1 + E_2) = \xi_1 + \xi_2$, 即结论得证.

四　知识扩展: Dedekind 分割

假设给定某种方法, 把所有的有理数分为两个集合 A 和 B, A 中的每一个元素都小于 B 中的每一个元素, 任何一种分类方法称为有理数的一个分割.

对于任一分割, 必有以下 3 种可能, 其中有且只有 1 种成立:

(1) A 有一个最大元素 a, B 没有最小元素. 例如 A 是所有小于或等于 1 的有理数, B 是所有大于 1 的有理数.

(2) B 有一个最小元素 b, A 没有最大元素. 例如 A 是所有小于 1 的有理数. B 是所有大于或等于 1 的有理数.

(3) A 没有最大元素, B 也没有最小元素. 例如 A 是所有负的有理数, 零和平方小于 2 的正有理数, B 是所有平方大于 2 的正有理数. 显然 A 和 B 的并集是所有的有理数, 因为平方等于 2 的数不是有理数.

注　A 有最大元素 a, 且 B 有最小元素 b 是不可能的, 因为这样就有一个有理数不存在于 A 和 B 两个集合中, 与 A 和 B 的并集是所有的有理数矛盾.

第 (3) 种情况, Dedekind 称这个分割为定义了一个无理数, 或者简单地说这个分割是一个无理数. 前面两种情况中, 分割是有理数. 这样, 所有可能的分割构成了数轴上的每一个点, 既有有理数, 又有无理数, 统称实数.

现证明确界原理与 Dedekind 定理的等价性.

Dedekind 定理　设 (A, B) 为 $\mathbb{R}$ 的一个分割: A, B 为非空子集, $A \cup B = \mathbb{R}, A \bigcap B = \varnothing$. 则或者 A 有最大元, B 没有最小元. 或者 B 有最小元, A 没有最大元.

证　设 (A, B) 为 $\mathbb{R}$ 的一个分划, 则 B 中每一个数都是 A 的上界, 从而 A 有上确界. 不妨设 $\eta = \sup A$, 又由于 $\mathbb{R} = A \cup B$, 则 η 属于 A 或属于 B.

若 $\eta \in A$, 则 $\forall x \in A, x \leqslant \eta$, 故 η 为 A 的最大元, B 没有最小元.

若 $\eta \in B$, 则由上确界定义, η 为 A 的最小上界, 而 B 的任意元均为 A 的上界, 从而 η 为 B 的最小元, A 没有最大元. 故 Dedekind 定理成立.

下面利用 Dedekind 定理证明确界原理.

设 E 为 $\mathbb{R}$ 中任意非空有上界的子集合, 并设 E 中无最大元 (否则 E 的最大元素为 E 的上确界). 令 E 在 $\mathbb{R}$ 中全体上界组成的集合记为 B, 并令 $A = \mathbb{R} \setminus B$, 则 (A, B) 为 $\mathbb{R}$ 的一个分划, 且 $E \subseteq A$. 由 Dedekind 定理知或者 A 有最大元, 或者 B 有最小元. 因为 A 中任意数 a 都不是 E 的上界, 从而存在某个数 $s \in E \subseteq A$, 使 $s > a$, 这表明 A 无最大元. 因此 B 必有最小元, 不妨设为 η, 那么 η 为 E 的最小上界, 即 $\eta = \sup E$.

§1.2 函 数

一 内容提要

1. 函数的定义.

2. 几类重要函数.

(1) 分段函数: 函数在其定义域不同部分用不同式子表达的函数.

(2) 取整函数、符号函数、Dirichlet 函数、Riemann 函数.

(3) 复合函数: $y=f(u), u\in D$ 和 $u=g(x), x\in E$, 并非总是可以复合为 $f(g(x))$. 可以复合的条件是 $E^*=\{x|g(x)\in D\}\cap E\neq\emptyset$, 这是复合函数概念中的要点.

(4) 反函数: 对函数 $y=f(x), x\in D$, 若 $f(x)$ 是 D 与 $f(x)$ 之间的一一对应, 则存在反函数 $x=f^{-1}(y), y\in f(D)$. 验证一一对应是确定反函数 f^{-1} 存在的重要条件.

(5) 初等函数:

(i) 基本初等函数: 常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数称为基本初等函数.

(ii) 初等函数: 由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所得到的函数统称为初等函数. 不是初等函数的函数都称为非初等函数.

3. 具有某些特性的函数.

(1) 有界函数：有界函数是数学分析中常用的一类函数. 这部分内容中需注意关于有上 (下) 界函数及无界函数的正面陈述.

设 $f(x), x\in D$.

(a) $f(x)$ 是有上界的 $\Leftrightarrow\exists$ 常数 $M, \forall x\in D, f(x)\leqslant M$.

(b) $f(x)$ 是有下界的 $\Leftrightarrow\exists$ 常数 $L, \forall x\in D, f(x)\geqslant L$.

(c) $f(x)$ 是有界的 $\Leftrightarrow\exists$ 常数 $M>0, \forall x\in D, |f(x)|\leqslant M$.

(d) $f(x)$ 是无界的 $\Leftrightarrow\forall M, \exists x_0\in D$, 使得 $|f(x_0)|>M$.

有界函数的函数值集的确界: 对有界函数 $f(x), x\in D$, 它的值域是有界集, 由确界原理, $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ 与 $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ 存在. 如 $\eta=\sup\limits_{x\in D} f(x)$ 的定义为:

(i)$\forall x\in D, f(x)\leqslant\eta$;

(ii)$\forall\alpha<\eta, \exists x_0\in D$, 使得 $f(x_0)>\alpha$.

(或者 $\forall\varepsilon>0, \exists x_0\in D$, 使得 $f(x_0)>\eta-\varepsilon$.)

注意数集的确界与函数值集确界的联系和区别.

(2) 单调函数：严格增 (减) 函数必有反函数，这是严格单调函数的重要性质，但是并非存在反函数的函数必定是严格单调的.

(3) 周期函数：周期函数不一定有最小正周期，例如 $\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数，任何正的有理数都是它的周期，但是它不具有最小正周期.

二 补充例题与评注

例 1.2.1 Dirichlet 函数 $D(x)$ 和 Riemann 函数 $R(x)$ 定义如下 ($\mathbf{Q}$ 为有理数集):

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases},\quad R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,q\in\mathbb{N}_+\text{互质}, x\in\mathbf{Q}\subset(0,1)),\\ 0, & x=0,1\text{或为 }(0,1)\text{ 中无理数}.\end{cases}$$

(1) 试问复合函数 $D(R(x))$ 和 $R(D(x))$ 是否存在? 若存在, 如何求?

(2) 讨论 Dirichlet 函数与 Riemann 函数的单调性、有界性与周期性.

解 (1) 先讨论 $D(R(x))$. 因为 $R(x)$ 的值域包含在 $D(x)$ 的定义域中，于是 $D(R(x))$ 存在. 当 x 为 $(0,1)$ 中的有理数时，$D\left(R\left(\dfrac{p}{q}\right)\right)=D\left(\dfrac{1}{q}\right)=1$，当 x 为 0, 1 或 $(0,1)$ 中无理数时，$R(x)=0$，而 $D(0)=1$，因而 $D(R(x))\equiv 1$.

再讨论 $R(D(x))$. 因为 $D(x)$ 的值域仅有 $\{0,1\}$ 两点，包含于 $R(x)$ 的定义域中，且

$R(0)=R(1)=0$，于是 $R(D(x))\equiv 0, x\in R$.

(2) 由 $D(x)$ 的定义可知，对于任意的 $x\in R$，有 $|D(x)|\leqslant 1$，所以 $D(x)$ 是 R 上的有界函数. 显然 $D(x)$ 在 R 上不具有单调性.

对于任意的有理数 r，都有 $D(x+r)=D(x)$，所以任何的有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期. 而对于任何无理数 t，有 $D(-t)=0$，而 $D(t+(-t))=D(0)=1\neq D(-t)$，所以任意的无理数都不是 $D(x)$ 的周期.

由 $R(x)$ 的定义可知，对于任意的 $x\in[0,1]$，有 $|R(x)|\leqslant 1$，所以 $R(x)$ 是 $[0,1]$ 上的有界函数. 显然 $R(x)$ 在 R 上不具有单调性与周期性.

注 Riemann 函数与 Dirichlet 函数是两类特殊的函数，是构造反例的重要来源，在分析学中有着非常重要的作用. 随着学习的深入，我们必须时刻明了它们的分析性质. 从后面章节的内容可以看到，Dirichlet 函数在定义域内每一点极限都不存在，当然不连续，不可导，但由其可构造出仅在某一点连续或可微的函数; Dirichlet 函数还是周期函数、偶函数. Riemann 函数在区间 $[0,1]$ 上每一点极限存在，在有理点不连续，无理点连续. Dirichlet 函数在任何有界闭区间上不可积，Riemann 函数在区间 $[0,1]$ 上可积且积分值是 0.

例 1.2.2 证明关于取整函数 $y=[x]$ 的如下不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$; (2) 当 $x<0$ 时, $1\leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$.

证 由取整函数的定义知 $\left[\frac{1}{x}\right]$ 是不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数. 故有

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}.$$

当 $x>0$ 时, 在上述不等式两边乘以 x 有 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$. 同理可证 $x<0$ 的情形.

注 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 并用"(x)"表示 x 的非负小数, 则称 $y=[x]$ 为取整函数, 也叫 Gauss 函数. 任意一个实数都能写成整数与非负纯小数之和, 即: $x=[x]+(x)$, 其中 $(x)\in[0,1)$ 称为小数部分函数. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 均有 $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$. 取整函数 (Gauss 函数) 是一个不减函数, 若 $n\in\mathbb{Z},x\in\mathbb{R}$, 则有 $[x+n]=n+[x],(n+x)=(x)$. 取整函数与微积分有着紧密联系, 它在科学和工程上有广泛应用. 在第 2 章数列极限问题中我们将经常用到取整函数的性质.

例 1.2.3 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任何空心邻域中无界.

证 利用无界函数的正面陈述, 设 $U^o(0)$ 为 $x=0$ 的任何空心邻域. $\forall M>0$, 取 $x_0=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 其中 $n>\dfrac{M}{2\pi}$ 且 n 为正整数, 则当 n 充分大时有 $x_0\in U^o(0)$, 且

$$|f(x_0)|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M+\frac{\pi}{2}>M,$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何空心邻域内无界.

例 1.2.4 设 $f(x),g(x)$ 是定义在 D 上的非负有界函数, 证明:

(1) $\inf\limits_{x\in D}f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$; (2) $\sup\limits_{x\in D}f(x)\cdot\sup\limits_{x\in D}g(x)\geqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$.

证 (1) 因为 $f(x),g(x)$ 为 D 上的非负有界函数, 所以 $\inf\limits_{x\in D}f(x)$, $\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 存在且有 $\inf\limits_{x\in D}f(x)\geqslant 0,\inf\limits_{x\in D}g(x)\geqslant 0$. 若 $\inf\limits_{x\in D}f(x),\inf\limits_{x\in D}g(x)$ 中有一为零, 则不等式显然成立, 故不妨设 $\inf\limits_{x\in D}f(x)>0,\inf\limits_{x\in D}g(x)>0$. 由 $f(x),g(x)$ 在 D 上的非负性知

$$f(x)\cdot\inf_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)\cdot g(x).$$

由此可得 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\cdot\inf\limits_{x\in D}g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\}$. 于是有

$$\inf_{x\in D}f(x)\cdot\inf_{x\in D}g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}.$$

最后一个不等式是应用了 $\inf\limits_{x\in D}\{af(x)\}=a\cdot\inf\limits_{x\in D}f(x)(a>0)$.

同理可证 (2).

注 若 $f(x),g(x)$ 的非负性条件不满足, 结论 (1) 可能不成立. 如

$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1),\qquad g(x)=-\frac{1}{2}x,\quad x\in D=[0,1],$$

则 $f(x)$ 是非负函数, $g(x)$ 是非正函数. 不难验证

$$\inf_{x\in D}f(x)=0,\quad \inf_{x\in D}g(x)=-\frac{1}{2},\qquad \inf_{x\in D}\{f(x)g(x)\}=\inf_{x\in D}\frac{1}{4}x(x-1)=-\frac{1}{16},$$

因而 (1) 中不等式不成立.

三 教材习题选解

9. 证明: 若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$, 且 $f(0)=0$, 则

(1)$f(x)f(y)=xy$; (2)$f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证 (1) 令 $y=0$, 则因为 $f(0)=0$, 所以 $|f(x)|=|x|,f^2(x)=x^2$, 于是, 由 $|f(x)-f(y)|^2=|x-y|^2$ 得到 $f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2$. 故, $f(x)f(y)=xy$.

(2) 由 (1) 得 $f^2(x)=x^2$, 所以 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$. 若 $f(x)=x,f(y)=-y$, 则由 $|f(x)-f(y)|=|x+y|=|x-y|$, 得 $x=0$ 或 $y=0$. 因此, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\equiv x$; 或者 $f(x)\equiv -x$. 故, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

10. 设 $f(x)$ 的定义域与值域都是 $\mathbb{R}$, 令

$$A=\{x:f(x)=x\}\text{ 与 }B=\{x:f(f(x))=x\},$$

证明: 若 $f(x)$ 是单调增加函数, 则 $A=B$.

证 对 $\forall x_1\in A$, $f(x_1)=x_1$, 从而有 $f(f(x_1))=f(x_1)=x_1$, 由此 $x_1\in B$. 故 $A\subseteq B$.

另一方面, 对 $\forall x_2\in B$, 有 $f(f(x_2))=x_2$. 令 $y=f(x_2)$, 则 $f(y)=x_2$. 若 $y>x_2$, 由 $f(x)$ 是单调增加的函数, 得到 $f(y)\geqslant f(x_2)$, 即 $x_2\geqslant y$, 产生矛盾. 同理, 对 $y<x_2$ 也产生矛盾. 因此, $y=x_2$, 即 $f(x_2)=x_2$. 于是, $x_2\in A$, 即 $B\subseteq A$. 综上, 得 $A=B$.

11. 证明: 若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$, 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|y-x|^2$, 则对每个 $n\in\mathbb{N}_+,\forall a,b\in\mathbb{R}$, 有 $|f(b)-f(a)|\leqslant\dfrac{|b-a|^2}{n}$.

证 $a=b$ 时, 结论成立. 不妨设 $a<b$, 对任意给定的 n, 将区间 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间, 分点依次为

$$a,a+\frac{b-a}{n},a+2\cdot\frac{b-a}{n},\cdots,a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b.$$

于是,

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]-f\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right]\right\}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]-f\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right]\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|b-a|^2}{n^2}=\frac{|b-a|^2}{n}.\end{aligned}$$

12. 证明: 设 a,b,c 是正数, 且有 $a^xb^y=b^xc^y=c^xa^y=abc\neq 1$, 则 $x+y=3$, 且 $a=b=c$.

证 因为 $(a^xb^y)(b^xc^y)(c^xa^y)=(abc)^3$, 即 $(abc)^{x+y}=(abc)^3$, 所以 $x+y=3$. 记 $A=\ln a,\ B=\ln b,\ C=\ln c$, 则

$$Ax+By=Bx+Cy=Cx+Ay=A+B+C\neq 0.$$

将 $y=3-x$ 代入得 $\begin{cases}Ax+B(3-x)=A+B+C\\ Bx+C(3-x)=A+B+C\end{cases}$, 即 $\begin{cases}(A-B)x=A-2B+C\\ (B-C)x=A+B-2C\end{cases}$.

消去 x 并整理, 得到

$$A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=\frac{1}{2}[(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2]=0.$$

故, $A=B=C$, 即 $a=b=c$.

14. 证明: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 存在正常数 k,T, 使得对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$$f(x+T)=kf(x),$$

则 $f(x)=a^x\varphi(x)$, 其中 a 是正数, $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

证 设 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$, 其中 a 为一待定正常数. 由 $f(x+T)=kf(x)\ (x\in\mathbb{R})$ 得到 $f(x+T)=ka^x\varphi(x)$. 又, $f(x+T)=a^{x+T}\varphi(x+T)$. 于是

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x).$$

令 $a=k^{1/T}$, 则 $k=a^T$. 由上式得到 $\varphi(x+T)=\varphi(x)\ (x\in\mathbb{R})$. 证毕.

四 知识扩展: 双曲函数

1. 双曲函数的定义.

在数学中, 双曲函数类似于常见的三角函数 (也叫圆函数). 基本双曲函数是双曲正弦 sinh, 双曲余弦 cosh, 从它们导出双曲正切 tanh 等. 也有一些类似于三角函

数的诱导公式. 双曲函数的反函数称为反双曲函数, 比如反双曲正弦 arsinh(也记为 arcsinh 或 asinh), 以此类推.

双曲函数出现于一些实际问题和某些重要的线性微分方程的解中, 譬如说悬链线和 Laplace 方程.

双曲正弦: $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. 双曲余弦: $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切: $\tanh(x)=\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ 双曲余切: $\coth(x)=\dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

双曲正割: $\operatorname{sech}(x)=\dfrac{1}{\cosh(x)}$ 双曲余割: $\operatorname{csch}(x)=\dfrac{1}{\sinh(x)}$

2. 与双曲函数有关的恒等式如下:

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1;\quad \coth^2(x)-\operatorname{csch}^2(x)=1;\quad \tanh^2(x)+\operatorname{sech}^2(x)=1.$$

$$\sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y);$$

$$\cosh(x+y)=\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y);$$

双曲函数的恒等式都与三角函数有相应的公式. 其他就不一一列举了.

3. 反双曲函数.

反双曲函数是双曲函数的反函数, 它们的定义为:

$\operatorname{arsinh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ (x\in\mathbb{R})$ $\operatorname{arcosh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$;

$\operatorname{artanh}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x})\ (x\in(-1,1))$; $\operatorname{arcoth}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1})$.

注 双曲正、余弦函数 $\sinh(x),\cosh(x)$ 也常简记为 $\mathrm{sh}x,\mathrm{ch}x$.

第 2 章　极　　限

一元分析学的研究对象是一元函数, 主要研究一元函数的连续性、可导 (微) 性和可积性, 而极限是研究这些分析性质的必备工具, 起“桥梁”作用. 一元函数的定义域和值域都是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, 所以我们先从实数列的极限开始, 之后再进行函数极限的学习.

§2.1　数列极限

一　内容提要

1. 数列极限的定义: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的数学定义 ($\varepsilon - N$ 方法).

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty) \Leftrightarrow \forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N: a_n > G\ (a_n < -G)$.

2. 数列极限的基本性质: 唯一性, 有界性, 保序 (号) 性, 保不等式性, 四则运算.

3. 数列极限存在性的判定: 迫敛性定理, 单调有界定理, Cauchy 收敛准则.

4. 几个常用极限:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0\ (|q| < 1), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{不存在}.$$

5. 子列, 归并原则.

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 的任何子列均收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_{2k-1}\}$ 与 $\{a_{2k}\}$ 均收敛, 且极限相同 $\Leftrightarrow$ $\{a_{3k-1}\}, \{a_{3k}\}$ 和 $\{a_{3k+1}\}$ 均收敛, 且极限相同.

数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow$ 存在 $\{a_n\}$ 的某子列是发散的, 或者存在 $\{a_n\}$ 的两个收敛子列, 但其极限不相等.

致密性定理: 有界数列必含有收敛子列 (见教材注 2.1.7).

二　补充例题与评注

1. 极限的定义.

例 2.1.1　用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5n+1}{n^2-n+2} = 1$.

证　对 $n>2$, 我们有

$$\left|\frac{n^2+5n+1}{n^2-n+2}-1\right|=\left|\frac{6n-1}{n^2-n+2}\right|<\frac{6n}{n^2-n}<\frac{12n}{n^2}=\frac{12}{n},$$

所以, $\forall\varepsilon>0$, 我们取 $N=\max\left\{2,\dfrac{12}{\varepsilon}\right\}$, 则 $\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{n^2+5n+1}{n^2-n+2}-1\right|<\frac{12}{n}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+5n-1+1}{n^2-n+2}=1$.

例 2.1.2　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n/b_n=0$, 则我们记 $a_n\ll b_n$. 用极限的定义证明:

$$\ln n\ll n^\alpha\ll b^n\ll n!\ll n^n\ (\alpha>0,\ b>1).$$

证　这里我们只证明 $\ln n\ll n^\alpha$, 其他证明读者自己完成. 利用简单不等式 $\ln x<x\ (x>1)$, 对 $n>1$ 我们有

$$0<\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}<\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}=\frac{2}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

所以, $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\left(\dfrac{2}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$, 则 $\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{\ln n}{n^\alpha}-0\right|<\frac{2}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=0$.

注 1　在例 2.1.1, 2.1.2 中, 我们均采用了适当放大法, 即 $|a_n-a|\leqslant\cdots\leqslant G(n)<\varepsilon$, 从而由 $G(n)<\varepsilon$ 比较容易求得 N_1, 当 $n>N_1$ 时 $G(n)<\varepsilon$. 但放大时要注意 3 点: ① $G(n)$ 应是无穷小数列; ② 不等式 $G(n)<\varepsilon$ 容易求解 N_1; ③为放大过程的方便, 有时需先假定 $n>N_0$, 再取 $N=\max\{N_0,N_1\}$. 例 2.1.1 就是这样的情形. 教材的例 2.1.1~2.1.4 均采用了适当放大法, 其中例 2.1.2 也预先假定 $n>7$.

注 2　在学习无穷小量与无穷大量之后, 我们将会知道本例的所有数列均为常见无穷大量. 比较两个无穷大量 $f(n)$ 和 $g(n)$ 的阶的高低, 实际上就是求这两个无穷大量比值的极限, 若 $f(n)/g(n)$ 当 $n\to\infty$ 时趋于 0, 则 $f(n)$ 比 $g(n)$ 低阶, 因而 $\ln n$ 是比 n^α 低阶的无穷大量.

例 2.1.3　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, a 为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$, 则