辽宁科协资助
LIAONING KEXIE ZIZHU
辽宁省优秀自然科学著作

张全 著

复杂多准则决策应用实务

Practice and Application of Complex Multi-criteria Decision Making

辽宁科学技术出版社
LIAONING SCIENCE AND TECHNOLOGY PUBLISHING HOUSE

辽宁省优秀自然科学著作

复杂多准则决策应用实务

张全 著

辽宁科学技术出版社
沈阳

图书在版编目（CIP）数据

复杂多准则决策应用实务 / 张全著. —沈阳：辽宁科学技术出版社，2011.11

（辽宁省优秀自然科学著作）

ISBN 978-7-5381-7172-3

Ⅰ.①复… Ⅱ.①张… Ⅲ.①最优化算法—应用—决策学—研究 Ⅳ.①C934

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第207427号

出版发行：辽宁科学技术出版社
（地址：沈阳市和平区十一纬路29号 邮编：110003）
印 刷 者：沈阳新华印刷厂
经 销 者：各地新华书店
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：9.5
字　　数：200千字
印　　数：1 ~ 2000
出版时间：2011年11月第1版
印刷时间：2011年11月第1次印刷
责任编辑：李伟民
特邀编辑：王奉安
封面设计：嵘　嵘
责任校对：李淑敏

书　　号：ISBN 978-7-5381-7172-3
定　　价：30.00元

联系电话：024-23284360
邮购热线：024-23284502
http://www.lnkj.com.cn

《辽宁省优秀自然科学著作》评审委员会

主　任：

康　捷　辽宁省科学技术协会党组书记、副主席

执行副主任：

黄其励　东北电网有限公司名誉总工程师

中国工程院院士

辽宁省科学技术协会副主席

副主任：

金太元　辽宁省科学技术协会副主席

宋纯智　辽宁科学技术出版社社长兼总编辑　编审

委　员：

郭永新　辽宁大学副校长

陈宝智　东北大学安全工程研究所所长

刘文民　大连船舶重工集团有限公司副总工程师

李天来　沈阳农业大学副校长

刘明国　沈阳农业大学林学院院长

邢兆凯　辽宁省林业科学研究院院长

辽宁省科学技术协会委员

吴春福　沈阳药科大学校长

辽宁省科学技术协会常委

张　兰　辽宁中医药大学附属医院副院长

王恩华　中国医科大学基础医学院副院长

李伟民　辽宁科学技术出版社总编室主任　编审

目 录

1 绪 论

1.1 研究背景介绍

参考多个通常相互矛盾的评价准则，多准则决策（Multiple Criteria Decision Making，即MCDM）是指给出方案的排序或选择最优方案进而作出最后的决定[1-3]。多准则决策问题具有广泛的理论与实际应用背景[1-4]。根据决策方案集合的域的特点，多准则决策问题通常划分为连续的或者离散的类别。本书的研究侧重于有限的决策方案通过参考多个准则来评价的情况。通常决策矩阵被用于多准则决策问题的建模，而决策矩阵的元素为各方案关于诸准则的数值结果。

通常，多准则决策问题的解决过程中需要多个决策者的参加，例如跨国（地区）的国际合作项目（例如，中日韩等合作项目）的评价与选择问题，邀请多个专家（国际评审专家组）参与的群决策支持是必需的和可行的，尤其在互联网高度发达和普及的时代[5-7]。多个决策者参与的群决策可以避免或最小化决策过程中的偏见的产生[7-8]。互联网与通信技术的高度发展为广泛甚至虚拟组织范围内的群决策提供坚实的技术支持[9]。在互联网广泛应用的环境下[10]，决策者（即被邀请的专家）可以在不同的时间和地点参与决策过程。同时，由于决策者具有不同的文化和教育背景，他们会以不同的方式表达对决策方案的偏好信息[5-6, 9-11]。常见地，决策者采用的各种方式的偏好信息包括：偏好序、效用值、模糊互补偏好关系[5]、语言短语[12-15]、严格偏好关系[15]和两两对比较矩阵[16]，等等。本书中决策者给出决策方案上、准则上或者决策矩阵上的偏好信息被认为是主观信息，这种主观偏好信息在实际的应用中常常是具有多种形式[5, 6, 9, 11]。关于决策者给出的多种形式的主观偏好信息的研究，在实际的应用中常常具有一定的研究意义，这也是本书的一个研究重点。

各决策方案关于诸准则的评价值（即决策矩阵的元素）通常被认为是客观信息[17-19]，它们是决策的基础和依据。但是，如果完全依赖于决策矩阵的客观信息进行决策分析所得到的结果有时会缺乏实际意义[19]。因此，在进行复杂的多准则决策时需要将决策矩阵的客观信息与决策者给出的主观判断（或偏好信息）进行集成，以便增强决策结果的可信度。如何将决策者给出的多种形式表达的主观偏好信息与决策矩阵的客观信息（有时以区间数的形式给出）进行集成也是本书的一个研究重点。

1.2 有关研究综述

1.2.1 模糊多准则决策研究

在一些决策问题中，决策信息常常是不确定的或不精确的。以往通过采用数学方法例如概率理论来描述随机不确定性，然而，概率理论并不完全适合模糊决策问题。模糊集理论是由Zadeh于1965年首先提出来用于处理具有不确定信息的决策问题[20]。缺乏精确的数据是不确定决策问题存在的主要原因。模糊性描述了事件的不确定性[21]，例如，在多准则决策问题中包括定性或不精确信息的情况下，模糊多准则决策方法常常是有效的手段[20, 22-23]，并且与多准则决策方法的研究同样地蓬勃发展[4]。同时，传统的多准则决策方法也逐步推广应用到了模糊决策环境中[1, 24-26]。

在模糊多准则决策问题的解决过程中通常采用语言短语或语言变量建模。语言短语或语言变量更容易表达决策者主观判断的不确定性[18, 22]，这样一来可以减轻决策者在评价过程中表达主观意见的负担，同时语言短语或语言变量通常表现为三角模糊数[18, 25]。

值得一提的是不确定信息的集结问题，例如语言偏好信息的集结问题。1988年，基于模糊语义Yager提出了有序加权平均（Ordered Weighted Average，即OWA）算子[27]。1993年，Herrera等提出了一种基于OWA算子与语言标度的凸组合的语言集结OWA算子[28]，该算子在集结过程中的排序权重是采用模糊语义量化算子确定的。国内的有关学者也作了相应的研究[29-37]，其中徐泽水的贡献较为突出，在研究把语言信息集结算子从确定环境推广到不确定和模糊语言环境的过程中，先后提出了十余种集结模糊数据信息的新算子[29-30, 32-37]。

1.2.2 群决策理论与主观偏好信息的研究

文献［38］给出了群决策的有关方法的讨论，其中包括社会选择理论、决策者判断、群参与和博弈理论。决策者的判断过程需要提出一个新的备选方案。而群的参与过程需要有共同兴趣的群体，例如，一个委员会或组织来进行决策。博弈理论是一个数学的方法手段用于分析充满利益矛盾的决策条件。在决策的过程中，参与的决策者个体各自寻求自己的价值取向和偏好[38]。

社会选择理论意在提供一个寻找群决策结果的理性框架[39-41]，其中，群决策过程通常通过投票来完成[39-42]。关于投票的方法，通常采用两种方式进行：排序投票法和非排序投票法。在进行排序投票法时，投票者（即参与群决策的决策者）根据各自的偏好给出决策方案的排序，然后，集结各投票者给出的排序结果，进而求出方案的排序。Arrow的不可能理论对排序投票法提出了质疑。但是，研究人员通过放宽一些假设依然进行Arrow的不可能理论的研究[43-44]。

关于非排序投票法，有3种策略：两个被选方案中选择一个为优胜者，多个被选方案中选择一个为优胜者，或者多个被选方案中选择两个或多个为优胜者。如果采用多个被选方案中选择两个或多个为优胜者的策略，通常采用的方法有："Single Nontransferable Vote"，"Multiple Vote，Limited Vote"，"Cumulative Vote"和"List Systems & Approval Voting elected"[38]。投票人可以根据意愿选择多个方案，但是，一个投票人对一个方案只能选择一次。因此，多个投票人可能选择多个方案为最终优胜者。

在模糊的决策环境中，研究人员从不同的角度探究群决策的方法[45-47]。当今互联网的蓬勃发展极大地拓展了组织的决策范围并促进了信息的沟通。基于互联网的支持，不管他们身处何处，决策者可以即时地或异步地在组织内外进行信息的沟通[9]。这样一来，由于决策者可能具有不同的文化和教育背景，他们会以不同的方式表达对决策方案的偏好信息[5-6]。以模糊互补偏好关系为基准形式，文献［5］提出了3种偏好表达形式，即偏好序、效用值和模糊互补偏好关系，集结为群体模糊互补偏好关系的方法。采用的集结方法是有序加权平均（即OWA）算子，其中的权重向量是由基于某种语意的模糊语言量化算子求得的。基于集结得到的关于决策方案的群体模糊互补偏好关系矩阵，通过计算方案的优越度（The multiplicatiue quantifier guided dominance degree，即QGDD）和方案的非超越度（The multiplicatiue quantifier guided nondominance degree，即QGNDD）来进行方案的选择。

以模糊互逆偏好关系为基准形式，文献［6］提出了采用有序几何加权（ordered weighted geometric，即OWG）算子将3种偏好表达形式，即偏好序、效用值和模糊互逆偏好关系，集结为群体模糊互逆偏好关系的方法，并进一步通过计算每个方案的优越度（The quantifier guided dominance degree即MQGDD）和非超越度（The quantifier guided nondominance degree即MQGNDD）来进行方案的选择。

1.2.3 不确定区间数评价的应用研究

由于客观事物的复杂性以及人们的知识和认识能力的限制，人们对事物的认识，总是由浅入深的，而且常常受到各种局限的影响。因此，在实际的决策问题中，经常会遇到决策信息的不确定性或模糊性。通常，语言短语评价或模糊数可以用来表达不确定的决策信息。但是，模糊数的隶属度函数常常难以确定，这样一来有界区间数更适合用于不确定决策信息的表达。对一类具有不确定性区间数的多准则决策问题的研究具有重要的理论意义和实际应用背景，例如，市政图书馆的空调系统选择问题[48-49]、跨国（地区）的国际合作科研项目的评价与选择问题、大学教员的考核晋升问题[50]和客户资产价值的评价问题[51]。

对于具有不确定性区间数的多准则决策问题的研究已经引起了重视[48, 50, 52-55]。但是，研究成果都局限于计算方案综合评价值的区间和区间数之间的比较两个方面[56]。当方案的综合评价值的区间出现交叉或者包含关系时，区间数之间的比较显得尤为重要。文献［57］提出了一个基于均值和区间宽度的可接受度指标，但是，该法对于多个

区间数的比较显得困难；张全等分别基于均匀分布和正态分布给出了区间数排序的优势可能度方法[58-59]，丰富了区间数的排序。文献［60］利用三角模糊数，建立了区间数比较的偏序包含度构造方法，并指出可能度是一种区间数的包含度；通过定义最优区间数，文献［61］提出了灰色关联分析法。

文献［56］认为目前区间数大小比较的算法基本上把这个不确定性的问题转换为确定性的问题，得到的排序结果可能会存在一定的不合理性，而且没有一个能够被大家所普遍接受的最好方法。本书认为当方案的综合评价值的区间出现交叉或者包含关系时，他们之间的排序关系是不确定的，没有严格的偏好关系。尽管可接受度指标[57]、可能度法[58-59]、灰色关联分析法[61]等方法丰富了方案的排序，但是从根本上改变不了方案间的排序关系的模糊性。因此，针对这种不确定的情况，需要邀请专家们给出主观偏好判断，借助专家们的专业智慧，使决策具有科学性。尤其对某些国际合作项目的评价与选择问题，多个专家参与的群决策支持是必需的，这也正是本书研究的另一个重点。

1.2.4 主客观信息集成方法研究

当前的诸多准则决策方法通常仅仅依赖决策者的主观信息，尤其在互联网高度发达的环境下，主观信息常常表现为多种形式，例如，偏好序、效用值和模糊互补偏好关系、模糊互逆偏好关系（或两两对比较矩阵）[5-6]。同时，在主观信息的挖掘过程中，主观决策方法没有直接考虑决策方案的客观信息（例如决策矩阵信息），这样一来，决策结果会由于决策者的知识和经验的不足而产生偏见[59]。

同样，在决策过程中，如果仅仅依赖于客观信息忽略决策者的主观信息得到的选择结果有时会毫无意义[19]。如果分别基于决策者的主观信息和客观信息得到的选择结果不同，就有必要将主观信息和客观信息进行集成。以准则上的两两对比较判断矩阵为决策者的主观信息，以决策矩阵为客观信息，文献［19］提出了一个集成方法来确定准则的权重大小以进一步给出方案的排序。以关于决策方案的模糊互补偏好关系为主观信息，以决策矩阵为客观信息，文献［17］提出了一个集成方法来确定准则的权重大小以进一步给出方案的排序。在评价学术期刊的等级过程中，文献［62］将影响系数作为客观信息，以专家们给出的模糊等级评价为主观信息，提出了一个学术期刊的等级评价的综合方法。

值得指出，在主客观信息的集成方法中，关于决策方案或准则的决策者给出的主观偏好信息采用的形式有时过于单一[17, 19, 62]，不足以表达决策者的主观意见，需要将现有的偏好表达方式进行拓展。

1.3 本书的研究工作概要

第一章描述了多准则决策问题的研究背景。第二章给出了本书研究工作所需的有关理论：首先给出了多准则决策矩阵的规范化方法与决策方案的综合评价值的计算方法；

其次给出了模糊集等概念的定义与模糊语言量化算子的描述，讨论了区间数表达与优势度计算方法，讨论了偏好的不同表达方式规范化为模糊互补偏好关系的方法与基于模糊互逆偏好关系的方案的排序和选择方法；最后讨论了偏好的不同表达方式规范化为模糊互逆偏好关系的方法与基于模糊互补偏好关系的方案选择和排序方法。针对决策矩阵的评价信息为不确定区间数的形式，第三章研究了客户资产价值的动态评价。第四章研究了专家们给出多种形式表达偏好信息的有效性问题。第五章针对群决策中偏好信息多种形式表达的一致度测量问题进行了研究。第六章提出了一个集成决策矩阵客观信息与专家们给出关于方案的不同形式的偏好信息的新方法。第七章研究了区间数多准则决策问题的群决策支持方法。第八章研究了决策矩阵具有不同类型准则评价值的混杂多准则决策问题。

2　理论基础

2.1　多准则决策问题

2.1.1　多准则决策问题描述

下面的符号术语用来描述多准则决策问题：

• 决策方案的集合是已知的：假设 $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ 表示 m（$\geqslant 2$）个决策方案的集合。

• 评价准则（或准则）是已知的：假设$C=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$表示 n（$\geqslant 2$）个准则的集合。本书假设准则之间是加性独立的[3]。

• 准则的权重是未知的：假设$w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ 为准则的权重向量，其中 $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$，$w_j \geqslant 0$，$j=1, .., n$，而且 w_j 表示准则C_j的权重。通常，准则的权重向量w在求解问题的过程中计算得到。

• 决策矩阵是已知的：假设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示决等矩阵，其中 a_{ij} 是决策方案 S_i关于准则C_j的评价结果，$i=1, \ldots, m$，$j=1, \ldots, n$。

• 决策者已知：假设$E=\{e_1, \ldots, e_K\}$ 表示参与决策的专家的集合（$K\geqslant 2$）。同时，假设决策者在表达关于方案或者准则的偏好信息时是平等的。

2.1.2　决策矩阵的规范化

在多准则决策问题中，评价准则之间通常是相互矛盾的，比如成本型准则和效益型准则。而且不同的准则通常具有不同的量纲（比如不同的经济意义）。因此，不同的准则在规范化之前是不可比的。这样一来，原始决策矩阵需要进行规范化以便评价准则之间可以相互比较[3]。作为多准则决策分析的基础性工作，决策矩阵的规范化是多准则决策分析中的一个必不可少的重要环节。下面给出常用的决策矩阵的规范化方法。

2.1.2.1　向量归一化法

给定决策矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，向量归一化方法利用原始准则值a_{ij}与各方案准则值a_{ir}（r=1，…，n）的平方和的平方根之比，将A转化为规范化的决策矩阵$B=[b_{ij}]_{m\times n}$。

其中，
$$b_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2}},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n. \tag{2-1}$$

注意到，各方案在诸准则上的评价值在规范化后取值均于［0，1］之内。而且，该方法是非线性变换[3]。

2.1.2.2 极差变换法

给定决策矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，下面的极差变换法将A转换为规范化的决策矩阵$B=[b_{ij}]_{m\times n}$。

其中，
$$b_{ij}=\frac{a_{ij}-a_j^{\min}}{a_j^{\max}-a_j^{\min}},\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,\ \text{如果是效益型准则} \tag{2-2}$$

$$b_{ij}=\frac{a_j^{\max}-a_{ij}}{a_j^{\max}-a_j^{\min}},\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,\ \text{如果是成本型准则} \tag{2-3}$$

其中，$a_j^{\max}$ 和 $a_j^{\min}$ 由下面的公式给出：

$$a_j^{\max}=\max\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\},\ j=1,\cdots,n \tag{2-4}$$

$$a_j^{\min}=\min\{a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\},\ j=1,\cdots,n \tag{2-5}$$

可见，经极差变换法决策矩阵A转换为规范化的$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，且各评价值均落在［0，1］之内[3]。

2.1.2.3 比重变换法

给定决策矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，下面的比重变换法可将矩阵A转换为规范化的矩阵B，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$。

其中，
$$b_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sum_{l=1}^{m}a_{lj}},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ \text{如果}C_j\text{是效益型准则} \tag{2-6}$$

$$b_{ij}=\frac{1/a_{ij}}{\sum_{l=1}^{m}1/a_{lj}},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ \text{如果}C_j\text{是成本型准则} \tag{2-7}$$

比重变换法将各评价值转换为［0，1］之内[48]。

2.1.2.4 线性变换法

给定决策矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，下面的线性变换法[3, 63]可将矩阵A转换为规范化的矩阵B，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，

其中，
$$b_{ij}=\frac{a_{ij}}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_{lj}},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n,\ \text{如果}C_j\text{是效益型准则} \tag{2-8}$$

$$b_{ij}=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_{lj}}{a_{ij}},\ i=1,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ \cdots,\ n.\ \text{如果}C_j\text{是成本型准则} \tag{2-9}$$

2.1.2.5 居中（固定）型变换法

假设r_j^* 为准则C_j上各方案的理想值，j=1，⋯，n。 给定决策矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$，下面的比例变换可将矩阵A转换为规范化的矩阵B，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$。

其中，$b_{ij}=[\frac{1}{2}(\frac{a_{ij}}{r_j^*}+\frac{r_j^*}{a_{ij}})]^{-1}$，$i=1$，…，$m$，$j=1$，…，$n$ (2-10)

2.1.2.6 偏离型规范法

文献［64］提出了一种越偏离某值β_j越好的新准则（称之为“偏离型准则”），同时给出了规范化方法，

$$b_{ij}=\frac{(|a_{ij}-\beta_j|-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|a_{ij}-\beta_j|)}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|a_{ij}-\beta_j|-\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|a_{ij}-\beta_j|}，i=1，\cdots，m，j=1，\cdots，n \text{ 如果} C_j \text{是效益型准则} \tag{2-11}$$

$$b_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{|a_{ij}-\beta_j|\}}{|a_{ij}-\beta_j|} & \text{若 } a_{ij}\neq\beta_j \\ 0 & \text{若 } a_{ij}=\beta_j\end{cases} \quad i=1，\cdots，m，j=1，\cdots，n \text{ 如果} C_j \text{是成本型准则} \tag{2-12}$$

文献［65］研究了多准则决策的准则理论，综述了现有的五类准则的规范化方法，提出一类新准则，偏离区间型，并给出它的规范化方法。文献［65］认为；偏离区间型准则是偏离型准则的推广，偏离型准则是效益型准则的推广；区间型准则是固定型准则的推广，固定型准则是成本型准则的推广，并对所给出的规范化方法的使用进行了说明。鉴于篇幅所限，这里不再详述。

2.1.3 区间数决策矩阵的规范化方法

虽然文献［65］对目前常用的决策矩阵的规范化方法进行了总结，但是，关于区间数决策矩阵的规范化方法的研究并不多见。针对决策矩阵中各方案关于诸准则以区间数的形式给出评价值的多准则决策问题，本节首先给出了区间数的定义和有关运算，然后给出了区间数决策矩阵规范化的比重变换法和极差变换法。其次，给出了基于误差传递理论的区间数决策矩阵的规范化方法。针对三种区间数决策矩阵的规范化方法，分别给出了算例进行说明。

定义 2.1 设R为实数域，称闭区间［x'，x''］为区间数，用$\tilde{x}$表示，其中$x', x''\in R$，$x'\leqslant x''$。

定义 2.2 若$0<a\leqslant b$，则称［a，b］为正闭区间数。若$0<a\leqslant b<\infty$，称［a，b］为正有界闭区间数。

下面给出关于区间数间的有关运算。假设［a，b］和［c，d］分别为两个正闭区间数，$k>0$，于是，区间数的有关运算表述如下：

（1）$[a, b]+[c, d]=[a+c, b+d]$

（2）$[a, b]\times[c, d]=[ac, bd]$

（3）$k[a, b]=[ka, kb]$

（4）$\dfrac{1}{[a, b]}=[\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}]$

（5）［a，b］÷［c，d］=［$\frac{a}{d}$，$\frac{b}{c}$］

以区间数为元素的多准则决策问题的决策矩阵称为区间数矩阵。考察具有区间数评价值的决策矩阵$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$，即

$$\tilde{A}=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \tag{2-13}$$

其中，$\tilde{a}_{ij}$为决策方案S_i关于评价准则C_j以区间数形式表达的评价结果，$i=1,\ldots,m$，$j=1,\ldots,n$。

与确定型的决策矩阵类似，区间数决策矩阵同样需要进行规范化。下面分别给出区间数决策矩阵规范化的比重变换法、极差变换法和误差传递法。

2.1.3.1 区间数决策矩阵规范化的比重变换法

（1）比重变换法

考察由式（2-13）给出的区间数决策矩阵$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$，采用下面的比重变换法将矩阵$\tilde{A}$规范化为$\tilde{B}=(\tilde{b}_{ij})_{m\times n}$，其中，$\tilde{A}$的元素$\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L,\ a_{ij}^U]$被规范化为$\tilde{b}_{ij}=[b_{ij}^L,\ b_{ij}^U]$，具体的计算公式如下：

$$\tilde{b}_{ij}=\frac{\tilde{a}_{ij}}{\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{kj}}，\text{当}C_j\text{为效益型准则} \tag{2-14}$$

$$\tilde{b}_{ij}=\frac{1/\tilde{a}_{ij}}{\sum_{l=1}^{m}1/\tilde{a}_{lj}}，\text{当}C_j\text{为成本型准则} \tag{2-15}$$

根据区间数的有关运算法则，式（2-14）和式（2-15）可进一步写为：

$$\begin{cases} b_{ij}^L=\dfrac{a_{ij}^L}{\sum_{k=1}^{m}a_{kj}^U} \\ b_{ij}^U=\dfrac{a_{ij}^U}{\sum_{k=1}^{m}a_{kj}^L} \end{cases} \text{当}C_j\text{为效益型准则} \tag{2-16}$$

$$\begin{cases} b_{ij}^L=(1/a_{ij}^U)\Big/\sum_{k=1}^{m}(1/a_{kj}^L) \\ b_{ij}^U=(1/a_{ij}^L)\Big/\sum_{k=1}^{m}(1/a_{kj}^U) \end{cases} \text{当}C_j\text{为成本型准则} \tag{2-17}$$