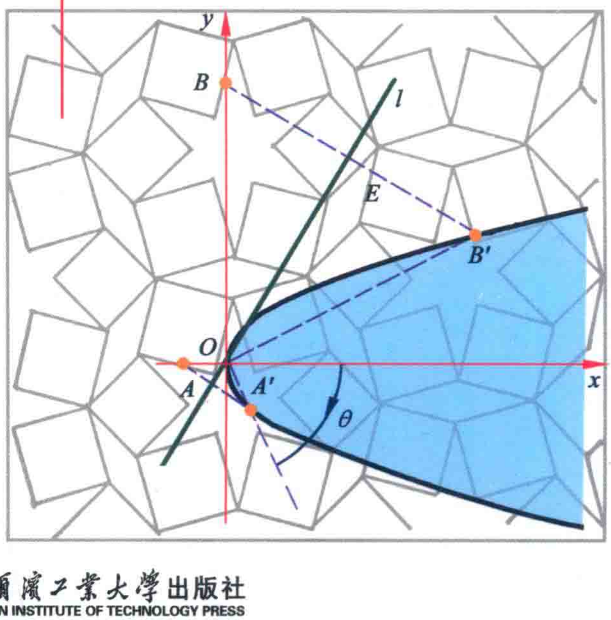
新编中学数学解题方法1000招丛书

高中版 13

排列和组合

刘培杰数学工作室 编



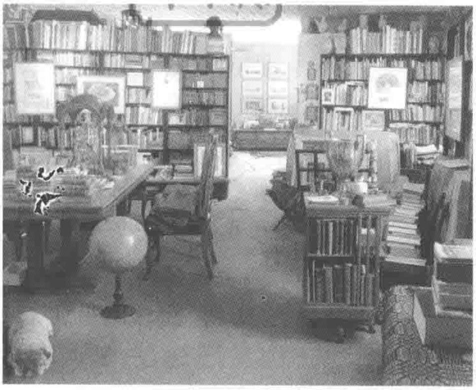
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 13

新编中学数学解题方法1000招丛书

排列和组合

刘培杰数学工作室 编



数学是一个自决的智力活动领域。它不需要为其正确性做辩解或证明，实际它也不做这类事。如果我想知道如何找到一个方程的解，或如何做几何图形，如何证明一个关于数的定理，或如何建立空间的一个性质，那么怀此愿望的合理原因仅仅是我想知道。未被损害的人类头脑想知道，并且不承认这一知识的领域限制。它想知道金字塔的年龄，一个四面体的角度，原子的结构以及负1平方

rodetsky

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以专题的形式对高中数学中排列和组合的重点、难点进行了归纳与总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解排列和组合的概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力.

本书适合高中学生、教师以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法 1000 招丛书. 排列和组合/
刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014. 3
ISBN 978-7-5603-4473-7

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 025221 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8. 5　字数 219 千字
版　　次　2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4473-7
定　　价　28. 00 元

⊙ 总序

俗话说:“自古华山一条路”,如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作“入宝山而空返”.

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓“踏遍坎坷成大路”.

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:“解题同钓鱼术一样永远不会学会”.但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学的,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:“相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸.”

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Paul Richard Halmos)一句“问题是数学的心脏”的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:“如果说确有一股贯穿20世纪80年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流”.

为了配合这股潮流，世界各国大量出版有关数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现. 光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从 1981 年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就已出版了 20 多种. 我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在 1949 年 2 月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希望各大书局大量编印中学解题参考用书”. 近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育出版社的《数学方法论丛书》(13 册)，北京大学出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育出版社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书.

哈尔滨工业大学出版社作为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算作一块引玉之砖.

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”. 然而这实在是不可能的，也是不必要的. 正所谓“有法法有尽，无法法无穷”. 况且即使是已有的方法也不能生搬硬套. 我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效. 数学家惠特霍斯(Whitworth)说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”.

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题. 正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握.

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Alfred Pringsheim)的名言：“不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度.”

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事.

刘培杰

2013 年 12 月 15 日

于哈工大

前言

美国著名组合专家 R. A. Bruadi 曾写过一本教材《组合学导引》,在其前言中这样指出:

如果本书的读者从未算过组合问题,那倒是会令人感到意外.你可曾计算或考虑过下列一些问题:如果 n 个队进行比赛(每个队仅与其他各队比赛一次),总共应比赛多少次?怎样构造幻方?怎样使铅笔不离纸面且不重复地描出网络图?为了确定对付"富尔豪斯(full house)"(一种扑克游戏,每个参加者发给 5 张牌,富尔豪斯是指一种牌型,这种牌型有 3 张牌同点数,另外 2 张牌也同点数)应该如何下赌注,试计算牌型是富尔豪斯的个数是多少?这些问题都是组合问题.正如这些问题所显示的那样,组合学发源于数学消遣和游戏.无论是为了消遣,还是由于它们的美学兴趣,过去所研究过的许多问题对于当代的纯粹科学或应用科学都是非常重要的.当代的组合学是数学中非常重要的一个分支,并且它的影响正在迅速扩大.在过去十年里,组合学迅猛发展的一个原因就是计算机已经并且继续地对我们的社会产生巨大的影响.由于计算机闪电般的速度,它已经能够解决以前不敢设想的大规模的问题.但是,计算机没有自主的功能,还需要进行程序设计.这些程序的基础,往往由解决这些问题的组合算法所组成.组合学发展的另一个原因在于它可用于一些以前与数学没有多大关联的学科.我们发现组合学的思想和方法不仅用于数学应用的传统领域即物理科学,而且也用于社会科学和生物学.

组合学所研究的就是一组事物安排成各种各样模式的问题.有两类问题经常出现:

(1)安排的存在性.要把一组事物进行安排,使之满足某些条件.当能否这样安排不是那么明显时,就需要讨论存在问题.如果一种安排不总是可能的,那么在怎样的(必要和充分的)条件下,才能使所希望的安排办得到.

(2)安排的计数和分类.如果某种安排是可能的,可以用许多方式来完成,人们可能要求计算这些方式的个数或者把它们进行分类.

虽然对任何组合问题都可以考虑它的存在和计数,但在实际上常常发生这样的情况:如果存在问题还需要进行深入地研究,那么计数问题就是难于处理的.不过,如果某种安排的存在比较明显时,就有可能计算出完成这种安排的方法的数目.在一些特殊的情况下(当它们的数目很小时),可以把全部安排列举出来.因此,许多组合问题的形式是:“安排……是可能的吗?”或“……存在吗?”或“有多少种方法可以……”或“计算……的数目”.

与(1)连同出现的第三个组合问题是:

(3)研究一个已知的安排.在人们已经构造出了(可能是困难的)满足一定条件的安排之后,那么就可以研究这种安排的性质和结构了.这样的结构可能涉及分类问题(2),并且也可能牵涉到潜在的应用.

正如 R. A. Bruadi 所说,学好组合学确实是可以挣到大钱.澳大利亚 19 名数学天才组成了一个名为“庞特俱乐部”的高智商赌博集团,利用他们的专业知识,在世界各国的赌场疯狂赌博.据澳大利亚《先驱太阳报》等媒体报道,在短短 3 年时间里,他们总计赢取了超过 24 亿澳元(约 156 亿元人民币)赌金.

这些数学家年龄均在 47 至 50 岁之间,其中大部分人多年前曾在澳大利亚塔斯马尼亚大学修读数学专业,那时就已认识,此后就成了关系密切的伙伴.媒体仅披露了其中部分人的身份,包括一名以香港为基地的 49 岁南澳大利亚扑克高手大卫·斯泰基,以及 3 名澳大利亚塔斯马尼亚岛的职业赌客大卫·瓦尔士、乔治·马马卡斯以及泽尔吉克·拉诺嘎杰克.

2004 年,他们开始组团赌博.令他们惊喜的是,虽然自己所掌握的那些高深的数学知识在现实生活中似乎派不上多大用场,但竟然在赌场上显现出了巨大的威力.一般他们参与的是赛马、赛狗以及 21 点之类的赌博项目.每次下注之前,他们会利用自己所精通的专业数学方法对各种中奖的概率进行推理演算,从而研究出某种“逢赌必赢”的诀窍.

组合学被国人视为最古老的数学分支,还考证出是源于中国,证据就是幻方最早产生于中国.在挖运河时挖出一只神龟,背上负着一个数阵.用中国古文记载就是“2,4 为肩,6,8 为足,左 3 右 7,戴 9 履 1,5 居中间.”

但我们现在中学课本中学习的排列组合知识完全源自西方.旺德蒙德于1772年采用$[n]^p$表示从n个不同的元素中每次取出p个元素的排列数.欧拉则在1771年用$\left[\frac{n}{p}\right]$,1778年用$\left(\frac{n}{p}\right)$表示从n个不同元素中每次取出p个元素的组合数,1827年,埃汀肖森引入了$\binom{n}{p}$来表示同样的意义,这个组合符号沿用至今.

1830年,皮科克引入Cr表示从n个元素中每次取r个元素的组合数.1869年或稍早一点,剑桥的古德文用nPr表示从n个元素中每次取出r个元素的排列数,这个用法也沿用至今.按此方法,用nPn就相当于现代的$n!$.

1880年鲍茨用${}^nCr$和${}^nPr$分别表示从n个元素中每次取出r个的组合数和排列数;1886年,惠特渥斯用C_r^n和P_r^n表示同样的意义,他还用R_r^n表示可重复的组合数.1899年,克里斯托尔用nPr,nCr分别表示从n个不同元素中每次取出r个元素(不重复)的排列数和组合数,用nHr表示同样意义下可重复的排列数,这三种符号都通用到现在.

1904年,内托为一本百科辞典写的辞条中,采用A_n^r表示上述nPr的意义,采用C_n^r表示上述nCr的意义,后者同时也用了$\binom{n}{r}$来表示.这些符号也一直用到现在.

在排列组合中还常出现一个数学符号即$n!$,它表示n的阶乘.

阶乘符号(Signs for factorial)始于欧拉在1751年用大写字母M表示m的阶乘

$$M=1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot m$$

鲁非尼在1799年出版的方程论著述中,用小写字母π表示m的阶乘,高斯则用$\Pi(n)$表示n的阶乘(1813).用符号$\underline{n|}$表示n的阶乘的方法起源于英国,尚不能确定何人为创始者,1827年,由雅莱特的建议得到流行,现代有时亦用此阶乘符号.

现在通用的阶乘符号$n!$最先是克拉姆提出来的(1808),后经欧姆等人的提倡而流行起来.

在现在的高中生所参加的高考、自主招生考试,以及数学竞赛中,排列组合都是重头戏,这不仅是因为它在中学课本中所占地位,更是因为它在将来进一步学习时是重要的基础.同时它在历史上还产生过无数的趣题,比如贝努利错放信笺问题:今有n封信及n个配套信封,现把所有的信一一放到信封中去,问

全部放错的方法的总数.还有“世界末日”问题,传说在印度佛教圣地贝拿勒斯圣庙里,安放着一个黄铜板,板上插着三根宝石针,其中一根宝石针从下到上插放着由大到小的64片有孔的金片,昼夜都有一个值班的僧侣按如下规则移动金片:一次只能移动一片,而小片永远要在大片的上面.当时有人声称:当64片金片全从一根宝石针上移到另一根宝石针上时,世界就将在一声霹雳声中毁灭.所以人们称这个问题为“世界末日”问题.现在要问:64片金片从一根宝石针上移到另一根宝石针上总共需要移动多少次?

诺贝尔奖得主李政道教授1978年到中科大访问时曾给少年班学生提了一个五猴分桃问题:有一堆桃子,是五个猴子的财产,它们要平均分配.第一个猴子来了,把桃子分成五堆,每堆一样多,还剩一个,这个猴子把剩下的一个吃了,自己拿走其中的一堆;第二个猴子来了,又把桃子分成五堆,又剩下一个,这个猴子也把这剩下的一个吃了,拿走其中的一堆.以后每个猴子都如此办理,问原来至少有多少个桃子,最后至少有多少个桃子?

在本书中一个重要的定理是二项式定理(Binomial theorem),即指$(a+b)^n$在n为正整数时的展开式.$(a+b)^n$的系数表

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

在我国被称为“贾宪三角”,一般认为是北宋数学家贾宪所首创.它记载于杨辉的《详解九章算法》(1261)之中.在阿拉伯数学家卡西的著作《算术之钥》(1427)中也给出了一个二项式定理系数表,他所用的计算方法与贾宪的完全相同.在欧洲,德国数学家阿皮雅努斯在他1527年出版的算术书的封面上刻有此图.但一般却被称之为“帕斯卡三角形”,因为帕斯卡在1654年也发现了这个结果.无论如何,二项式定理的发现,在我国比在欧洲至少要早300年.

1665年,牛顿把二项式定理推广到n为分数与负数的情形,给出了$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$的展开式.

二项式定理在组合理论、开高次方、高阶等差数列求和,以及差分法中有广泛的应用.

近代数学早期是连续解析数学的天下.函数论、微分方程成为主流,近年随着计算机技术的迅猛发展.离散数学作为便于在计算机上可实现的理论开始逐渐变成热门,并且一些沉寂多年没有被彻底解决的著名组合数学猜想开始有了一些新进展,有的彻底被我国数学工作者所解决.如柯克曼女生问题(Kirkman's girl students problem),1850年由英国数学家柯克曼提出的一个问题:某学生宿舍共有15名女生,每天三人一组进行散步,问怎样安排,才能使每名女生有机会与其他每一名女生在同一组中散步,并恰好每周一次.问题提出后引起广泛讨论,并很快有了多种解答.其中较有代表性的是一位叫皮尔斯的人于1860年左右给出的.他先假定一名女生固定在某一组,再将其他14名女生编号(1~14号),并按照一定规律安排了星期天的分组散步,则其他6天星期r($r=1,2,\cdots,6$)的散步分组可按原编号与r的数字之和安排(和数超过14则减去14).这种方法被数学家西尔维斯特认为是最佳解法.一些数学家还将问题作了扩展,使之成为组合论中的难题:设有N个元素,每三个一组分成若干组.这些组分别组成一个系列,现在称为柯克曼序列.若每一元素与其他元素恰有一次同组的机会,问将N分成这种序列要满足的充分必要条件是什么?怎样组成此序列?在女生问题中,序列数为7,$N=15$是适合条件的数.但N的一般解答直到20世纪60年代后才有突破.我国数学家陆家羲对此做出过重要贡献.

值得指出的是陆家羲先生就是一位高中教师,而且还是教物理的.曾在哈尔滨电机厂当过技术员,后到东北师范大学读物理专业.去世前一直在包头市第九中学当一名普通的物理教师.加拿大组合数学专家、《组合数学》杂志主编门德尔松教授称赞他得到的结果是国际组合数学界近60年来取得的最佳成果.可惜英年早逝.另一个著名的组合数学难题是所谓欧拉36军官问题(Euler's 36 officers problem).此问题是1779年由数学家欧拉提出的.原题大意是:从6个兵种中抽出6种军衔的军官各一人,问这36位军官能否排成6×6的方阵,使每一行和每一列中都有各兵种和各军衔的军官.现在一般叙述为两个6阶拉丁方是否可以正交.后人称两个可以正交的拉丁方形成的方阵为欧拉方阵.欧拉本人没有解决这一问题,他只于1782年提出一个猜想:当$n=4t+2$时,n阶欧拉方阵不存在.1901年法国人塔里用穷举法证明了$n=6$($t=1$)时欧拉方阵不存在,得出36军官问题的否定解答.但到1959年印度数学家玻色和另一位数学家史里克汉德却成功地构造了22阶($t=5$)欧拉方阵,从而推翻了欧拉猜想.他们还证明了当$n\neq2$,$n\neq6$时,n阶欧拉方阵必定可以做出.不久美国数学家帕克就做出了10阶($t=2$)的欧拉方阵.最近又有人将这一问题扩展到3维情形.阿金等三位数学家在1982年构造了一个6阶拉丁3维立方体,第

一次证明了叠合三个6阶拉丁立方是可能的，从而在3维里解决了“欧拉36军官问题”. 拉丁方和欧拉方阵在正交试验法上有重要应用，也是数学游戏中长久不衰的趣题来源. 我国著名数论专家王元和方开泰将其方法应用到正交试验中.

本工作室致力于数学的传授和数学教育的普及，现已出版300余种图书. 我们无所怙恃，唯有锻造卓越数学教辅的决心与诚意.

刘培杰
2013年12月18日
于哈工大

目录

第一编　解题方法编

第二编 试题精粹编

第一编

解题方法编

怎样掌握排列组合问题的解题原则

一、分类讨论原则

把一个较为复杂的问题分为若干类，各类之间相互独立，以防止思维混乱.

例1 $\angle A$ 的一边 AB 上有4个点，另一边 AC 上有5个点，连同 $\angle A$ 的顶点共10个点，以这些点为顶点，可以构成多少个三角形？

解析 把可构成的三角形分成两类：含点 A 的和不含点 A 的. 对于不含点 A 的三角形来说，又分 AB 上取两点 AC 上取一点和 AB 上取一点 AC 上取两点的，这样就有

$$C_4^1C_5^1+C_4^2C_5^1+C_4^1C_5^2=90$$

虽然此题还有其他解法（$C_{10}^3-C_6^3-C_5^3=90$），但这种解法思路清晰，分类合理，且不易出错，容易理解和掌握，因此不失为一种好的解法.

例2 用1,2,3,4四个数字，组成个位是1，且恰有两个相同数字的四位数，共有多少个四位数？

解析 此题先分成四位数是含两个1还是含一个1. 若含两个1，其他两位上应从2,3,4中取两数，能排 $C_3^2\cdot 3!=18$ 个四位数. 若含一个1，则其他三位上应从2,3,4中取两数，其中一数用两次，另一数用一次，此时能排 $C_3^2\cdot C_2^1\cdot C_3^2=18$ 个四位数.

所以一共可排 $18+18=36$ 个四位数.

以上两例可以看出分类后难度将大大降低，另外分类还要合理，抓住要害.

例3 从集合 $\{1,2,3,\cdots,16,17\}$ 中任取3个不同的数，使其和能被3整除，共有多少种不同的取法？

解析 按除以3的余数分类，把17个元素分成三类，余1的：1,4,7,10,13,16；余2的：2,5,8,11,14,17；余0的：3,6,9,12,15. 要使三数和能被3整除，三个数只能从同一类中取或三类中各取一数，否则不合题意.

共有 $C_6^3+C_6^3+C_5^3+C_6^1\cdot C_6^1\cdot C_5^1=230$ 种不同取法.

二、合理分步原则

解某些排列组合问题，可先选后排.

例4 6名运动员选出4名参加 4×100 m接力赛，如果甲、乙两人都不跑第一棒，那么共有多少种不同的方法？

解析 此题分两步做，第一步先把4人选出来，第二步再安排4人顺序，在具体做时再注意细分每一步，则比较容易做正确.

甲、乙都入选，有 $C_4^2\cdot 2\cdot A_3^3=72$ 种；

甲、乙恰有一人入选，有 $C_2^1C_4^3\cdot 3\cdot 3!=144$ 种；

甲、乙都不入选，有 $C_4^4\cdot A_4^4=24$ 种.

故共有240种不同方法.

此题说明应先组合后排列，不要一步到位．并且应尽可能多地用组合，使最后的排列成为全排列．

例 5 身高互不相同的 6 人成二横三纵排列，每一列前边比后边的个子要高，问有多少种不同的站法．

解析 此题实际上就是把 6 人平均分成 3 组，而每组里只有一种排法，故有 $C_6^2 \cdot C_4^2=90$ 种不同站法．

如果分步不当，先考虑第一行，再考虑第二行，则思维受阻．

三、特殊优先原则

将特殊元素与特殊位置优先考虑，可化繁为简，提高正确率，同时又可锻炼和提高思维能力．

例 6 安排甲、乙、丙三人周一至周六值班，每人值班两天，其中甲不值周一，乙必须值周六，问有多少种不同的安排方法．

解析 这里虽然甲、乙和周一都具有特殊性，但甲先安排不影响乙，但乙先安排会影响甲，为简单起见，先安排甲，再安排乙．因甲不值周一，又不能值周六，故甲有 C_4^2 种排法，从而此题结论应为 $C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2=18$ 种安排方法．

例 7 学校化学实验室的实验员从 10 种不同的化学药品中选出 6 种，放入 6 个不同的瓶子里，如果甲、乙不宜放入 1 号瓶，有多少种不同的放法．

解析 先考虑特殊元素 1 号瓶，有 8 种药品可放，再从其余 9 种药品中取出 5 种放入其余 5 个瓶中，共有 $8 \cdot C_9^5 \cdot 5!$ 种放法．

四、正难则反原则

有些问题正面考虑情况甚是复杂，或者不易解出来，此时应考虑从反面入手，往往可以取得意想不到的效果．

例 8 在五双不同的鞋子中，任取四只，要求四只中至少有两只是一双的，可能的取法有多少种？

解析 此题正面考虑，第一类取四只恰为两双有 C_5^2 种，第二类取四只恰有一双，另两只不配对，有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种．

所以共有 $C_5^2+C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=130$ 种方法．

若反面考虑，取四只都不配对有 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$ 种方法，故有 $C_{10}^4-C_5^4 \cdot 24=130$ 种．

虽然两种方法都不难，但从反面考虑显得更简捷，值得提倡．

五、留空插入原则

对于要求不相邻的元素的排列，待其他元素排定后，可采取插空排入的方法，避免出现复杂情况．

例 9 3 个人坐 8 个空位置，要求每人左、右两边都必须有空位置，有多少种不同的坐法．

解析 5 个空位置形成 4 个间隔(除去首尾)，从中选取 3 个坐人，共有 $C_4^3 \cdot 3!=24$ 种