原书第4版

PEARSON

时代教育 • 国外高校优秀教材精选

工程中的有限元方法

[美] T. R. 钱德拉佩特拉(Tirupathi R. Chandrupatla)
A. D. 贝莱冈度(Ashok D. Belegundu) 著

曾攀 雷丽萍 译

INTRODUCTION TO FINITE ELEMENTS IN ENGINEERING

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

时代教育·国外高校优秀教材精选

工程中的有限元方法

（中文版·原书第4版）

Introduction to Finite Elements in Engineering

［美］ T. R. 钱德拉佩特拉（Tirupathi R. Chandrupatla） A. D. 贝莱冈度（Ashok D. Belegundu） 著

曾 攀 雷丽萍 译

机 械 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

工程中的有限元方法：第4版/[美] 钱德拉佩特拉（Chandrupatla, T. R.），[美] 贝莱冈度（Belegundu, A. D.）著；曾攀，雷丽萍译. —北京：机械工业出版社，2014.6

（时代教育·国外高校优秀教材精选）

ISBN 978-7-111-46150-0

Ⅰ.①工… Ⅱ.①钱…②贝…③曾…④雷… Ⅲ.①有限元法—应用—工程技术—高等学校—教材 Ⅳ.①TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 050061 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：刘小慧 责任编辑：刘小慧 陈崇昱 卢若薇
版式设计：常天培 责任校对：刘雅娜
封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京铭成印刷有限公司印刷
2015年4月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 25.5 印张 · 621 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-46150-0
定价：78.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机工官博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金书网：www.golden-book.com

作者介绍

T. R. 钱德拉佩特拉(Tirupathi R.Chandrupatla) 为美国罗文大学（Rowan University）机械工程系的教授和主任，主要研究领域为：有限元分析、机械与制造工程、质量与可靠性、优化。他曾在工业界从事机械设计工作，具有丰富的工程实际经验，也开展了有限元方法方面的学术研究；他长期从事有限元方面的教学工作，形成了在有限元教学中基本理论与实际工程相结合的显著特点。

A. D. 贝莱冈度(Ashok D.Belegundu) 为美国宾夕法尼亚州立大学（The Pennsylvania State University）机械工程系的教授，主要研究领域为：有限元、机械设计、优化技术。他从事机械系统及设计方面的研究，在结构有限元分析及优化方面发表了一大批学术论文，在学术和教学方面有较大的影响。

主要符号列表

符　　号	描　　述
$\boldsymbol{u}(x,\ y,\ z)=(u(x,\ y,\ z),\ v\ (x,\ y,\ z),\ w\ (x,\ y,\ z))^{\mathrm{T}}$	在点（x，y，z）处沿坐标轴方向的位移
$\boldsymbol{f}=(f_x,\ f_y,\ f_z)^{\mathrm{T}}$	在点（x，y，z）处单位体积上的体力分量
$\boldsymbol{T}=(T_x,\ T_y,\ T_z)^{\mathrm{T}}$	在表面上点（x，y，z）处每单位面积上的作用力分量
$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx},\ \gamma_{xy})^{\mathrm{T}}$	应变分量，ε 是正应变，γ 是工程切应变
$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy})^{\mathrm{T}}$	应力分量，σ 是正应力，τ 是工程切应力
Π	势能 $\Pi=U+WP$，其中 U 是应变能，WP 是外力势(work potential)
$\boldsymbol{q}$	单元节点位移矢量（列阵⊖）（自由度 DOF），维度（NDN * NEN，1）——NDN 和 NEN 的解释见下一个表
$\boldsymbol{Q}$	单元全部节点位移矢量，维度（NN * NDN，1）——NN 和 NDN 的解释见下一个表
$\boldsymbol{k}$	单元刚度矩阵；单元应变能 $U_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{kq}$
$\boldsymbol{K}$	结构的整体刚度矩阵 $\Pi=\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{KQ}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$
f^e	单元ⓔ中分布在节点上的体力
T^e	单元ⓔ中分布在节点上的面力
$\phi\ (x,\ y,\ z)$	虚位移变量；对应于实际位移 $\boldsymbol{u}$（x，y，z）
$\boldsymbol{\psi}$	单元节点虚位移矢量；对应于 $\boldsymbol{q}$
$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$	分别是在 $\xi\eta\zeta$ 坐标系下的形状函数、材料矩阵和应变-位移矩阵。$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Nq}$，$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{Bq}$，$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{DBq}$。

Input 文件的结构⊜

```
TITLE       (*)
PROBLEM  DESCRIPTION            (*)
NN  NE  NM  NDIM  NEN  NDN  (*)
 4   2   2    2     3    2          — 1 Line of data, 6 entries per line
ND  NL  NMPC      (*)
 5   2    0                         — 1 Line of data, 3 entries
Node#  Coordinate#1 ... Coordinate#NDIM    (*)
  1        3                0
  2        3                2
  3        0                2
```

⊖ 此处原版中的术语 vector 的本意应译为矢量。但在有限元中，vector 也可以表示多个节点的位移（每个节点的位移为矢量）所组成的矢量列阵，若翻译为矢量，容易简单理解为位移矢量，而“多节点位移所组成的受力列阵”（或简称为“节点位移列阵”）是比较合适的，故此处简化译为列阵。——译者注

⊜ HEAT1D 和 HEAT2D 程序需要附加热通量和对流的边界条件数据（参见第 10 章）。

（*）=空语句（注释行）——不能省略。

注意：在 input 文件中不能出现空白行。

```
  4        0              0                 — NN Lines of data, (NDIM + 1) entries
Elem#  Node#1   ...  Node#NEN  Mat#  Element  Characteristics⊖        ( * )
  1      4      1       2        1     0.5         0.
  2      3      4       2        2     0.5         0.
                  —NE Lines of data, (NEN + 2 + #of Char.) entries
DOF#  Specified Displacement       ( * )
  2          0
  5          0
  6          0                                 —ND Lines of data, 2 entries
  7          0
  8          0
DOF#    Load       ( * )
  4     -7500
  3      3000                                  —NL Lines of data, 2 entries
MAT#  Material   Properties       ( * )
  1     30e6      0.25     12e-6
  2     20e6      0.3        0.                —NM Lines of data, (1 + # of prop.) entries
  B1   i   B2   j   B3    (Multipoint constraint: B1 * Qi + B2 * Qj = B3)      ( * )
                                               —NMPC Lines of data, 5 entries
```

主程序变量

NN = 节点数；

NE = 单元数；

NM = 不同材料数；

NDIM = 每个节点的坐标数（例如，二维情形 NDIM = 2，三维情形 NDIM = 3）；

NEN = 每个单元的节点数（例如，三节点三角形单元 NEN = 3，四节点四边形单元 = 4）；

NDN = 每个节点的自由度数（例如，常应变三角形单元 NDN = 2，三维梁单元 NDN = 6）；

ND = 对应于给定位移的自由度数 = 边界条件数；

NL = 施加载荷的分量个数（沿自由度方向）；

NMPC = 多点约束数；

NQ = 总自由度数 = NN * NDN。

程　　序	单 元 特 性	材 料 属 性
FEM1D, TRUSS, TRUSSKY	面积，温度增量	E
CST, QUAD	厚度，温度增量	E，ν，α
AXISYM	温度增量	E，ν，α
FRAME2D	面积，惯性矩，分布载荷	E
FRAME3D	面积，3 个轴的惯性矩，2 个分布载荷	E
TETRA, HEXAFNT	温度增量	E，ν，α
HEAT2D	单元热源	热导率 k
BEAMKM	惯性矩，面积	E，ρ
CSTKM	厚度	E，ν，α，ρ

⊖ 单元特性和材料属性的描述见下。

译 者 序

本书是近年来在国际上有限元分析教学方面具有较大影响的大学教材之一。它的显著特点是：在介绍有限元方法基本原理的同时，提供相应的工程背景和建模技巧，书中所给的实例和习题几乎都对应或涉及实际工程背景，使读者在学习过程中就能体会和了解实际问题的有限元建模过程，可以说这正是学习有限元分析方法的重要目的之一。

本书的作者 T. R. 钱德拉佩特拉博士（Tirupathi R. Chandrupatla）为美国罗文大学（Rowan University）机械工程系的教授和主任，曾在工业界从事机械设计工作，具有丰富的工程实际经验，也开展了有限元方法方面的学术研究。他长期从事有限元方面的教学工作，形成了在有限元教学中基本理论与实际工程相结合的显著特点。另一位作者 A. D. 贝莱冈度博士（Ashok D. Belegundu）在宾夕法尼亚州立大学（The Pennsylvania State University）执教，从事机械系统及设计方面的研究，在结构有限元分析及优化方面发表了许多学术论文，在学术和教学方面都有较大的影响。

T. R. 钱德拉佩特拉博士与 A. D. 贝莱冈度博士合作，于 1991 年写出了本书的第 1 版，由于特点鲜明而在大学中广受欢迎和赞誉，取得了很好的教学效果。1997 年出版了本书的第 2 版，2002 年由培生教育出版集团出版了第 3 版，2012 年由培生教育出版集团出版了本书的第 4 版，并且作了以下调整：

1）增加了叠加原理的表述。

2）增加了对称结构及反对称结构的建模及处理。

3）增加了例题及习题。

4）将原来的第 8 章（梁及框架结构）移到第 4 章（桁架结构）之后。

5）提供修改后的 VB 源程序。

6）提供基于 JavaScript 脚本的程序（便于在网络上运行）。

本书的第 3 版于 2005 年由机械工业出版社引进并出版了影印版，已进行了多次印刷，取得了很好的社会及市场效果。目前的新版完全保留了前版的特点，所作的调整更能反映有限元方法的工程及适用属性，特别考虑了课程教学的特点，注重方法原理的论述与实用例题的展示，提供了 300 多个图示和大量的实例，在新版本中提供了所有的计算机程序源代码。

本书写作流畅，推导严谨，实例丰富，特别注重实用性，可以作为机械、力学、土木、水利、航空航天等专业的学生进行有限元方法学习的教材，也可与已经出版的影印版结合起来使用，作为双语课程的教材。

本书是在原第 3 版翻译的基础上完成的，雷丽萍对新修订的内容进行了翻译，曾攀对全书的翻译进行了审定，硕士生黑梦对书中的公式及图表进行了编排。译者还特别感谢张慧玲女士对本书中文版出版的重要贡献。由于译者的水平有限，在对原书的理解和专业用语方面难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

清华大学机械工程系

曾　攀　雷丽萍

前 言

本书的第 1 版在 20 多年以前问世，几年之后又出版了第 2 版和第 3 版。本书曾被翻译成西班牙语、韩语、希腊语和汉语。我们收到了来自使用该书的教授、学生和从事实际工作的工程师的正面反馈意见，也了解到在过去 30 年中我们学校的学生使用本书的各方面情况。本书的基本出发点是提供有限元方法的清晰理论、建模方法以及具体的计算机实现程序，在这一版充分考虑了许多建议，保留了以前版本的特点，并在一些方面有所改进。

本书在以下方面作了调整：

1）介绍叠加原理。

2）对称与反对称问题的处理。

3）提供更多的例题和习题。

4）拼片试验。

5）将梁和框架结构的章节移至桁架章节之后。

6）修订了 Excel VB 编程。

7）提供可在网页浏览器 IE、Firefox、Chrome、Safari 上运行的 JavaScript 程序。

8）提供与有限元编程衔接的图形处理运行程序。

书中许多章节还增加了一些新的材料，补充了实际算例和练习题，以帮助读者更好地学习和理解，而练习题更强调了对基本理论的理解和实际问题的考虑。在前面几章中增加了实际问题的建模，在第 1 章增加了叠加原理，清晰阐述了二维问题中对称和反对称情形的处理方法，增加了例题和练习题，并增加了对拼片试验和相关问题的讨论。所提供的程序都具有相同的编程结构，以方便读者仿照使用；同时还增加了 JavaScript 程序，使得读者可以采用 IE、Firefox、Chrome 或 Safari 等网页浏览器进行有限元问题的求解。所有程序都经过认真的检查，可下载程序包中包括了涉及图形程序的可执行版本。程序所采用的语言包括：Visual Basic、Microsoft Excel Visual Basic、MATLAB、JavaScript，以及早期使用的 QBASIC、FORTRAN 和 C，相应的求解说明也作了更新。

第 1 章简要介绍有限元方法的历史背景和基本概念，对平衡方程、应力-应变关系、应变-位移关系和势能原理进行评述，引入伽辽金（Galerkin）方法的概念。

第 2 章介绍矩阵和行列式的性质，引入高斯（Gauss）消元法，讨论对称带状矩阵方程的求解和带状矩阵“特征顶线”（skyline）的处理方法，对平方根（Cholesky 分解）法和共轭梯度法也作了讨论。

第 3 章通过对一维问题的分析来介绍有限元方法的基本概念和表达式，涉及有限元分析的主要步骤：形状函数的表达、单元刚度矩阵的推导、整体刚度矩阵的形成、边界条件的处理、方程的求解以及应力计算；同时给出了基于势能方法和伽辽金方法的表达形式，而且考虑了温度效应的处理。

第 4 章给出平面及三维桁架问题的有限元表达，对于整体刚度矩阵的组装，分别给出带状矩阵和具有“特征顶线”矩阵的形式，还提供了基于这两种形式进行求解的计算机程序。

第 5 章讨论梁单元及埃尔米特（Hermite）形状函数的应用，涉及二维及三维框架结构。

第 6 章介绍用于二维平面应力和平面应变问题求解的常应变三角形单元（CST），详细给出问题的建模过程及边界条件的处理方法，对于正交各向异性材料也给出相应的处理方法。

第 7 章介绍轴对称物体在承受轴对称外载时的建模过程，给出相应的三角形单元表达式，还

提供几个实际问题的处理方法。

第 8 章介绍四边形单元和高阶单元的基本概念以及采用高斯方法进行面积积分的数值方法，给出轴对称四边形单元的表达式以及基于共轭梯度法求解的过程。

第 9 章为三维应力分析，包括四面体单元和六面体单元，还介绍波前法的求解及其实现过程。

第 10 章详细介绍标量场问题的处理，在其他各章中均将伽辽金方法和能量原理作为有限元方法推导的基本原理，在本章中仅采用伽辽金方法来进行推导。采用该方法可以直接对所给出的微分方程进行处理，而无需定义一个用来求最小值的等效泛函。该章分别就稳态热传导、扭转、一般流动、渗流、电磁场、管道中流动、声学等问题给出相应的伽辽金方法表达式。

第 11 章为动力学问题，给出单元质量矩阵表达，对一般特征值问题的特征值（自然率频）、特征向量（模态形状）的求解进行讨论，给出求逆迭代法、雅可比（Jacobi）法、三对角化法以及显式漂移法等求解方法。

第 12 章介绍前处理及后处理的概念，给出二维问题网格自动划分的原理及实现方法，对于三角形和四边形单元给出由单元值求取节点应力的最小二乘方法，还介绍了后处理中的等值线技术。

对于本科生来说，书中一些较深的内容可以忽略，或根据某一新的完整内容体系，按需要来采用本书的材料，建议并鼓励在学习完第 6 章后就开始使用第 12 章中的程序，这样可以帮助读者高效率地准备各种有限元分析的数据。

我们对北卡罗莱纳-夏洛特分校（UNC Charlotte）机械工程系方宏兵（音译）（Hongbing Fang）教授、新泽西州霍博肯史蒂文斯技术学院（Stevens Institute of Technology，Hoboken，New Jersey）机械工程系 K. 普切尔（Kishore Pochiraju）教授、亚利桑那州立大学艾拉答富尔顿工学院（Arizona State University，Ira A. Fulton）S. 拉赞（Subramanian Rajan）教授、密歇根州劳伦斯理工大学（Lawrence Technological University，Michigan）机械工程系 C. H. 利多尔（Chris H. Reidel）教授、康奈尔大学（Cornell University）锡布利（Sibley）机械与航空学院 N. J. 扎巴拉（Nicholas J. Zabaras）教授表示感谢，他们对本书第 3 版进行了审阅并提出许多建设性的意见，这些对我们有很大的帮助作用。

本书自带的采用 Visual Basic、Excel-based Visual Basic、MATLAB、FORTRAN、JavaScript 和 C 语言编写的计算源代码，可以由网页 www. pearsonhighered. com/chandrupatla 获得。

本书作者 T. R. 钱德拉佩特拉对 J. 廷斯利·奥登（J. Tinsley Oden）表示感谢，正是他的教导和鼓励影响了作者本人的一生，感谢在罗文大学（Rowan University）和凯特林大学（Kettering University）就读的学习该课程的学生，还要感谢同事 P. 冯罗克特（Paris von Lockette）在本书第 2 版和第 3 版出版后的教学活动中所提出的富有价值的意见。

本书作者 A. D. 贝莱冈度感谢他在宾夕法尼亚州立大学的学生们，他们对本书和程序提出了很好的建议。

感谢 M. 霍顿（Marcia Horton）对本版本和先前版本所给予的指导，感谢培生教育出版集团的编辑们：N. 迪亚斯（Norrin Dias）、T. 奎恩（Tacy Quinn）、D. 亚内尔（Debbie Yarnell）和 C. 罗密欧（Clare Romeo）。正是他们才使得本书的编写工作变得如此愉快。感谢项目主管 M. 潘·沙拉万南（Maheswari Pon Saravanan）和她在印度 TexTech International Chennai 的团队，他们高效地完成了编辑和文稿校对工作。

T. R. 钱德拉佩特拉

A. D. 贝莱冈度

目　录

第 *1* 章 基本概念

1.1 引言

对于广泛的工程问题，有限元方法已成为数值求解的强有力工具，它所涉及的领域包括从汽车、飞机、建筑、桥梁结构的变形和应力分析，到热流、液体流、磁通量、渗流等流动问题的场分析。随着计算机技术和 CAD 技术的发展，可以较容易地对许多复杂问题进行建模分析，对于一些可选的设计方案而言，可以在制造实物原型之前就借助于计算机进行实验或考证。要完成这些工作，就需要我们充分理解有限元方法的基本理论、建模技巧以及计算方法。有限元分析的基本过程是：将介质的复杂几何区域离散为具有简单几何形状的单元，也叫做有限单元，而单元内的材料性质和控制方程通过单元节点的未知量来进行表达，再通过单元集成、外载和约束条件的处理，得到方程组，求解该方程组就可以得到该介质行为的近似表达。

1.2 历史背景

有限元方法的基本思想产生于对飞机结构进行分析的需求。1941 年，雷尼科夫（Hrenikoff）采用“框架形变功法”计算了弹性问题，可兰特（Courant）于 1943 年发表了采用三角形区域内的分片多项式来处理扭转问题的论文，特纳（Turner）等人于 1956 年推导了杆、梁等单元的刚度矩阵，而“有限单元”这一名称是克拉夫（Clough）于 1960 年提出的。

在 20 世纪 60 年代初期，就有许多工程师采用有限元方法来近似求解应力分析、流体流动、热传导等问题。1955 年，阿吉里斯（Argyris）出版了一本关于能量原理和矩阵方法的书，为进一步开展有限元方法的研究奠定了基础。第一本关于有限元方法的书是监科维奇（Zienkiewicz）和 Cheung 于 1967 年完成的。在 20 世纪 60 年代后期和 70 年代初期，有限元分析被应用于处理非线性和大变形问题。1972 年 Oden 完成了有关非线性介质方面的专著，有关的数学基础是在 20 世纪 70 年代奠定的，涉及新型单元、收敛性方面等问题。

如今，随着大型计算机的发展和小型计算机的普及，使得学生和在企业工作的工程师可以充分地使用有限元方法这一有力的工具。

1.3 本书概要

本书采用势能原理和伽辽金（Galerkin）方法来推导有限元方法。首先就固体和结构的力学分析讨论有限元方法的基本概念，以加强理解。因此，在本书的前几章，主要处理杆、梁，以及弹性变形体问题，对于不同材料的弹性问题，也是按这一次序进行讨论。在书的第

10 章，才将有限元方法的概念扩展到场问题的处理中，在每一章中都提供一系列的典型例题和供读者使用的计算机程序。

下面介绍一下将在有限元方法中使用的基本概念。

1.4 应力与平衡方程

一个体积为 V 和外表面为 S 的三维物体如图 1.1 所示，物体中的点由 x，y，z 坐标确定，其中的一部分边界有位移约束，另一部分边界作用有分布力 $\boldsymbol{T}$，也叫做拉力。

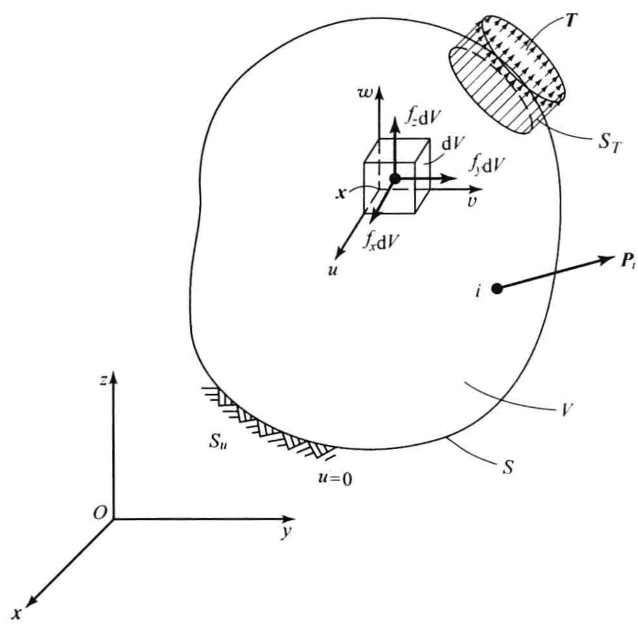

图 1.1 三维物体

在力的作用下，物体产生变形。一点($\boldsymbol{x}=[x,\ y,\ z]^{\mathrm{T}}$)的变形由它的位移的三个分量来表示

$$\boldsymbol{u}=(u,v,w)^{\mathrm{T}} \tag{1.1}$$

对于单位体积的分布力，如单位体积的重力，由矢量 $\boldsymbol{f}$ 来表示

$$\boldsymbol{f}=(f_x,f_y,f_z)^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

在微小体元 dV 上作用有体积力[⊖]的情况如图 1.1 所示。表面拉力 $\boldsymbol{T}$ 可以通过物体表面该点上的分量来表示

$$\boldsymbol{T}=(T_x,T_y,T_z)^{\mathrm{T}} \tag{1.3}$$

表面拉力的典型例子有分布接触力和拉力。作用于点 i 的外载荷 $\boldsymbol{P}$ 可以由它的三个分量来表示

$$\boldsymbol{P}_i=(P_x,P_y,P_z)_i^{\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

作用在微小体元 dV 上的应力如图 1.2 所示。当体积微元 dV 收缩为一个点时，虽然可以

⊖ 也可以简称为“体力”，原文均用 body force。——编辑注

将应力张量的分量写成为一个（3×3）的对称矩阵，但人们习惯于用6个独立分量来表示，即

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{1.5}$$

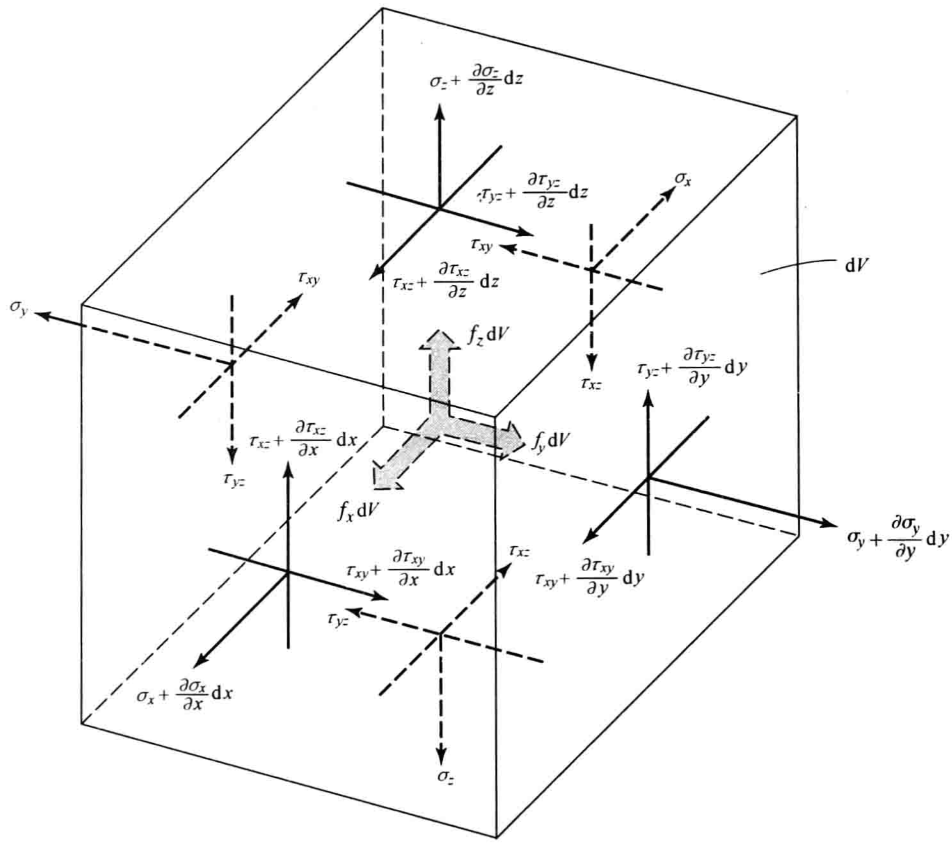

图1.2 微小体元的平衡

其中，σ_x、σ_y、σ_z为正应力；τ_{yz}、τ_{xz}、τ_{xy}为切应力。下面考虑图1.2所示微小体元的平衡问题。首先由应力乘上所对应的面积可以得到合力，然后取平衡，有$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$及$\sum F_z=0$，注意有$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，可以得到平衡方程如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+f_z=0\end{cases} \tag{1.6}$$

1.5 边界条件

参照图1.1可以看出，存在有位移边界条件和外载边界条件。如果在S_u边界上有固定的位移$\boldsymbol{u}$，则

$$\boldsymbol{u}=\mathbf{0} \text{ 在 } S_u \text{ 上} \tag{1.7}$$

也可以考虑形如 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}$ 的边界条件，其中，$\boldsymbol{a}$ 为所给定的位移。

下面讨论图 1.3 所示四面体 $ABCD$ 的平衡问题。图中的 DA、DB 以及 DC 分别平行于 x、y 及 z 轴，面积 ABC（由 $\mathrm{d}A$ 表示）位于表面，如果 $\boldsymbol{n}=(n_x,\ n_y,\ n_z)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathrm{d}A$ 的单位法线，则有 $BDC=n_x\mathrm{d}A$，$ADC=n_y\mathrm{d}A$，$ADB=n_z\mathrm{d}A$，沿三个轴取平衡有

$$\begin{cases}\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z=T_x\\ \tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z=T_y\\ \tau_{xz}n_x+\sigma_{yz}n_y+\sigma_z n_z=T_z\end{cases} \tag{1.8}$$

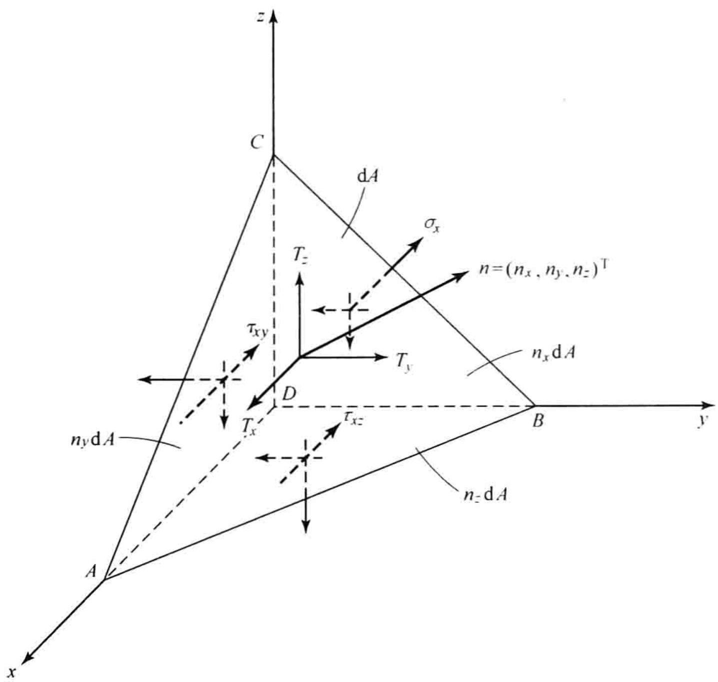

图 1.3 物体表面上的一个微小体元

在外力所施加的边界 S_T 上，这些条件必须满足。对于集中载荷，可以视为作用在一个很小和有限的区域上的分布载荷。

1.6 应变-位移关系

对应于式（1.5）中应力的表达，将应变表示为一个列向量形式，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{xz},\gamma_{xy})^{\mathrm{T}} \tag{1.9}$$

其中，ε_x，ε_y 及 ε_z 为正应变，而 γ_{yz}，γ_{xz}以及 γ_{xy}为工程切应变。

图 1.4 表示 dx-dy 面的小变形情况，同样也可以表达其他面的变形情况，因此，有

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.10}$$

以上应变表达仅在小变形情况下才成立。

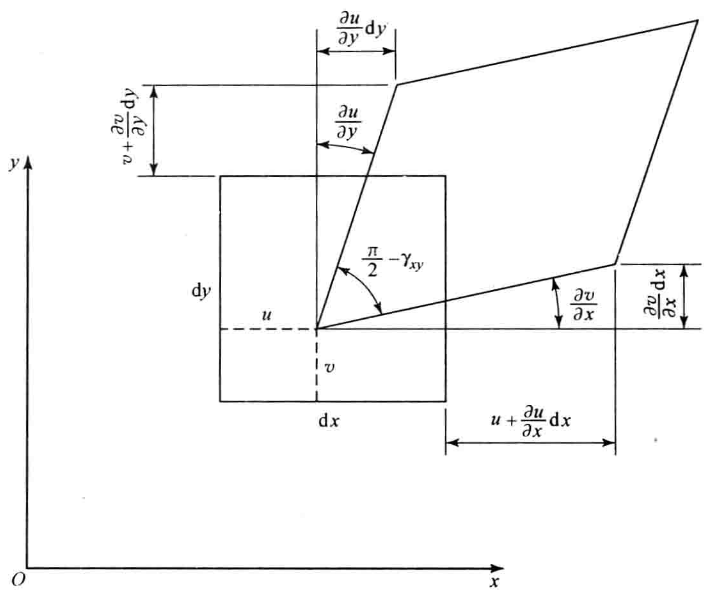

图 1.4 具有变形的微小体元的表面

1.7 应力-应变关系

对于线弹性材料，应力-应变关系服从广义胡克定律，对于各向同性材料，仅需要两个材料常数，即弹性模量（或杨氏模量）E 和泊松比 ν。就物体内的一个立方体单元，胡克定律可以写成

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \tag{1.11}$$

剪切模量（或刚性模量）G 为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.12}$$

由胡克定律，可以得到

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.13}$$

将式（1.11）中的（$\sigma_y+\sigma_z$）等进行代换，可以写出它的逆形式为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.14}$$

$\boldsymbol{D}$ 为对称的（6×6）的材料常数矩阵，即

$$\boldsymbol{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu\end{pmatrix} \tag{1.15}$$

特殊情形讨论

一维情形　在一维情形中，沿着 x 方向的正应力 σ 对应于正应变 ε，应力-应变关系非常简单，即为

$$\sigma=E\varepsilon \tag{1.16}$$

二维情形　在二维情形中，问题分为平面应力和平面应变。

平面应力　一个很薄的等厚度物体在其边界上受平面内的外载荷，这样的问题被称为平面应力问题。如图 1.5a 所示的圆环，它与中心杆件有紧配合而受内压，这就是一个平面应力问题，其应力 σ_z、τ_{xz}和 τ_{yz}取为零，这时，式（1.11）的胡克定律变为

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\sigma_x}{E}-\nu\dfrac{\sigma_y}{E}\\ \varepsilon_y=-\nu\dfrac{\sigma_x}{E}+\dfrac{\sigma_y}{E}\\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\\ \varepsilon_z=-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\end{cases} \tag{1.17}$$

它的逆形式为

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

它也常写为 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$。

平面应变　如果一个具有等截面的很长的筒体沿长度方向均受均匀外载，如图 1.5b 所示，从中截取受有外载的一小段，这就可以按平面应变问题进行处理。这时 ε_z、γ_{zx}、γ_{yz}为零，而 σ_z 不为零，其应力-应变关系可以直接由式（1.14）和式（1.15）得到：

$$\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}-\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_z\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 为（3×3）矩阵，它建立 3 个应力分量和 3 个应变分量之间的联系。

对于各向异性物体，若采用适当的取向主轴，也可以使用合适的 $\boldsymbol{D}$ 矩阵来描述材料。