我的第一本数学解题书

一题多解教你学会解数学题

孟祥礼 ◎ 著

中国海洋大学出版社
CHINA OCEAN UNIVERSITY PRESS

我的第一本数学解题书

——一题多解教你学会解数学题

孟祥礼　著

中国海洋大学出版社
·青岛·

图书在版编目(CIP)数据

我的第一本数学解题书:一题多解教你学会解数学题/孟祥礼著.—青岛:中国海洋大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-5670-0693-5

Ⅰ.①我… Ⅱ.①孟… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 143495 号

出版发行	中国海洋大学出版社		
社　　址	青岛市香港东路 23 号	邮政编码	266071
出 版 人	杨立敏		
网　　址	http://www.ouc-press.com		
电子信箱	dengzhike@sohu.com		
订购电话	0532—82032573(传真)		
责任编辑	邓志科	电　　话	0532—85902495
印　　制	日照日报印务中心		
版　　次	2014 年 7 月第 1 版		
印　　次	2014 年 7 月第 1 次印刷		
成品尺寸	144 mm×215 mm		
印　　张	6.5		
字　　数	200 千		
定　　价	28.00 元		

前　言

多年以来，我一直有一个心愿，写这样一本书——《我的第一本数学解题书》。这本书应具有以下特色：

这是一本神奇的数学解题书：它用尽量少的题目将中学数学常用解题方法几乎一网打尽，让读者在阅读的过程中，边读边叹，被解法的多、巧、妙、奇所惊讶、震撼，怦然心动，涵泳回味，欲罢不能。让喜欢数学的人，从喜欢到迷恋；让讨厌数学的人，从讨厌到喜欢再到迷恋，从此爱上数学。

这是一本让人耳目一新的数学解题书：这本书能够颠覆读者对学习的认识，能够颠覆读者对数学学习的认识。

“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。”这句话常被我们用来鼓励学生们。但是，我想说，若你真想学有所成，刻苦是一方面，更重要的，“乐”才是正道，才是王道。做自己喜欢的事，苦吗？否！做的越多越乐！所以，这句话或可改为：“书山有路勤为径，学海无涯乐作舟。”

“能吃苦的，苦一阵子；不能吃苦的，苦一辈子。”这是许多名师、名校长教育学生的口头禅。但是，我认为这个观点错了，大错特错了！美好的教育用四个“苦”字来概括，彰显了教育者的短视。学习是让人从无知到有知、从愚钝到聪明、从聪明到更聪明的转化过程，是人生最美好的事情，可能累、也可能忙，但不应苦，是身累而心不累，是忙并快乐着，哪里有苦呢？因此，我认为，这句话应改为：“会享受的，享受一辈子；不会享受的，苦一辈子。”享受学习过程、享受战胜困难而取胜的喜悦。

数学枯燥乏味吗？我不认为这样。“数学之精髓在于它的自由。”(德国数学家乔治·康托尔)“公正而论，数学不仅拥有真理，而且拥有至高无上的美。”(英国数学家罗素)“音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学能给予以上的一切。”(德国数学家克莱因)“数学是流芳百世最可靠的途径。”(匈牙利数学家爱多士)每一个问题永远都会有另一种可能的解法，这是数学自由美的体现。一个看上去普通的问题，经过深思熟虑之后，往往会得出各种不同的解法，让人浮想联翩，赏玩不已，流连忘返，爱不释手。在学习过程中，不断追求数学的美感，就会不时产生思想的火花，从而冒出精彩独到的思路，这个过程是激荡人心的探索之旅，全然没有枯燥乏味。

这是一本让你铭记一生的数学解题书：如果你是一位数学教师，在你的职业生涯中，你会读过、见过形形色色的数学解题书，但是，能让你震撼的、让你几乎永生不忘的却少之又少，甚至没有，这本书将在你的脑海里留下永久的烙印；如果你是一位中学生，在你用过和正在用的数学解题书中，有哪一本书能给你带来心灵的震撼？你面前的这本书能！它以现行高中数学教科书中的一道复习参考题为线索，介绍了高中阶段解数学题的常用方法和技巧(含高考、自主招生和奥数)，一题多解、一题多巧解、一题多妙解、一题多奇解，给出了题目的二十个解法系列，这些解法将一些常见的知识、方法和技巧巧妙地排列组合，真实体现数学解题的奇趣。

历经二十余年的积累，经过几个月的艰辛撰写和反反复复的修改，这本书终于写成了。

解数学题的最高境界是玩数学题，玩中取乐，玩中激趣，玩中增智，玩中提能。拥有本书，你将从此学会玩数学题。

本书可供中小学数学教师、教研员、师范大学数学专业学生、

中学生以及数学爱好者参考。

本书在编写过程中得到了数学界同仁的热情帮助和关心，在此谨致谢忱。

感谢中国海洋大学出版社为本书的出版做出的努力。

限于水平，编写中也可能会“当局者迷”，存在一些错漏之处，敬请各位“旁观”的专家、同行和读者不吝指正。我的电子邮箱是qfmxl@sina.com，真诚致谢！

孟祥礼

2014 年 5 月于曲阜师范大学

目 录

题目及出处

题目:如图 1 所示,过点 $P(1,1)$ 作直线 AB,分别与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴交于 A,B 两点. 当直线 AB 在什么位置时,$\triangle AOB$ 的面积最小,最小面积是多少?

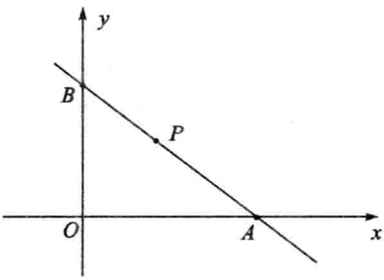

图 1

出处:本题是普通高中课程标准教科书人教版 A 版《数学选修 1-1》第三章"导数及其应用"的复习参考题 A 组第 8 题,也是人教版 A 版《数学选修 2-2》第一章"导数及其应用"的复习参考题 A 组第 8 题.

解法探究

图难于其易也，为大于其细也；天下之难作于易，天下之大作于细。

——老子《道德经》

学会“每一个问题永远都会有另一种可能的解法”，这才是最高层次的教学智慧，而这智慧能让孩子“真正”学会。

——（台湾教育家）林文虎《好老师在这里》

获得真正成功的公开秘密就是全身心地投入到题目中去。

——（美国著名数学家）乔治·波利亚（G. Polya）《怎样解题》

解法系列1　从直线的截距式方程入手

解法 1:设直线 AB 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>1,b>1)$.

$\because$ 直线 AB 过点 $P(1,1)$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \\ &\geqslant 1+\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2, \end{aligned}$$

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.

故当直线 AB 的横、纵截距都是 2 时,$\triangle AOB$ 的面积最小,最小面积是 2.

说明:本书中用到的关于不等式的几个结论:

1. 基本不等式:若 $a,b\in R$,则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

2. 均值不等式链:设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数,定义:

算术平均值:$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

几何平均值:$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

调和平均值：$H_n=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$.

平方平均值：$Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

有不等式链：$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

特别地，当 $n=2$ 时，有 $H_2\leqslant G_2\leqslant A_2\leqslant Q_2$，当且仅当 $a_1=a_2$ 时，等号成立.

我们把 $G_2\leqslant A_2$ 叫做二元算术—几何均值不等式，把 $H_2\leqslant A_2$ 叫做二元算术—调和均值不等式，把 $H_2\leqslant G_2$ 叫做二元几何—调和均值不等式.

3. 柯西(Cauchy)不等式：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是两个实数序列，则 $(\sum a_ib_i)^2\leqslant(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$，当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$（规定当 $a_i=0$ 时，$b_i=0$）时，等号成立.

4. 琴生(Jensen)不等式：

(1) 函数的凸性：设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，$\forall x_1,x_2\in I$，且 $x_1\neq x_2$，若总有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的上凸函数；若总有 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数.

(2) 琴生(Jensen)不等式：若函数 $f(x)$ 是区间 I 上的上凸函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$，则

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，等号成立；若函数 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,等号成立.

(3) 函数的凸性的判断方法:函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数,若 $f''(x)<0$,则函数 $f(x)$ 是区间 I 上的上凸函数;若 $f''(x)>0$,则函数 $f(x)$ 是区间 I 上的下凸函数.

解法 2:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab\\&=\frac{1}{2}ab\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\\&\geqslant\frac{1}{2}ab\left(2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\right)^2=2,\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 3:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\\&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2}=2,\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 4:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{2}{\sqrt{ab}},$$

当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.

$\therefore ab\geqslant 4$,当且仅当 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 5:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

$\therefore ab=a+b.$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(a+b)\\&=\frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\\&\geqslant 1+\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2,\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 6:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

由二元几何 — 调和均值不等式,得

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=2,$$

当且仅当 $a=b=2$ 时,等号成立.

$\therefore ab\geqslant 4$,当且仅当 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 7:同解法 5,得

$$ab = a + b.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b) \\ &= \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 2, \end{aligned}$$

当且仅当$\begin{cases} a = b \\ \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$,即 $a = b = 2$ 时,等号成立.(余略)

解法 8:同解法 5,得

$$ab = a + b.$$

$\therefore ab = a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$,当且仅当 $a = b = 2$ 时,等号成立.

$\therefore ab \geqslant 4$,当且仅当 $a = b = 2$ 时,等号成立.(余略)

解法 9:同解法 5,得

$$ab = a + b.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$a + b = ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

当且仅当 $a = b = 2$ 时,等号成立.

$\therefore a + b \geqslant 4$,当且仅当 $a = b = 2$ 时,等号成立.

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b) \geqslant 2$,当且仅当 $a = b = 2$ 时,等号成立.(余略)

解法 10:同解法 5,得

$$ab = a + b.$$

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2S_{\triangle AOB}},$$

当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.

$\therefore S_{\triangle AOB} \geqslant 2$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.（余略）

解法 11：同解法 5，得

$$ab = a+b.$$

由二元算术 — 调和均值不等式，得

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = 2,$$

当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b) \geqslant 2$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.（余略）

解法 12：同解法 5，得

$$ab = a+b.$$

由基本不等式，得

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \\ &\geqslant 2ab+2ab = 4ab,\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.

$\therefore ab \geqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立.（余略）

解法 13：同解法 5，得

$$ab = a+b.$$

由柯西(Cauchy)不等式，得

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b) \\ &= \frac{1}{2}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 = 2,\end{aligned}$$

当且仅当$\dfrac{\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 14:同解法 1,得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1.$$

$\therefore b=\dfrac{a}{a-1}$.

由二元算术 — 几何均值不等式,得

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab\\&=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{[(a-1)+1]^2}{a-1}\\&=1+\frac{1}{2}\left[(a-1)+\frac{1}{a-1}\right]\\&\geqslant 1+\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2,\end{aligned}$$

当且仅当 $a-1=\dfrac{1}{a-1}$,即 $a=2$ 时,等号成立.(余略)

解法 15:同解法 14,得

$$b=\frac{a}{a-1}.$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}ab\\&=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{2(a-1)},\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{S_{\triangle AOB}}=\frac{2(a-1)}{a^2}=-2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}\right).$$

当$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{2}$,即 $a=2$ 时,$\dfrac{1}{S_{\triangle AOB}}$ 取得最大值$\dfrac{1}{2}$,$S_{\triangle AOB}$ 取得最小值 2.(余略)

说明:用二次函数求最值(或值域)是中学数学的一种基本方