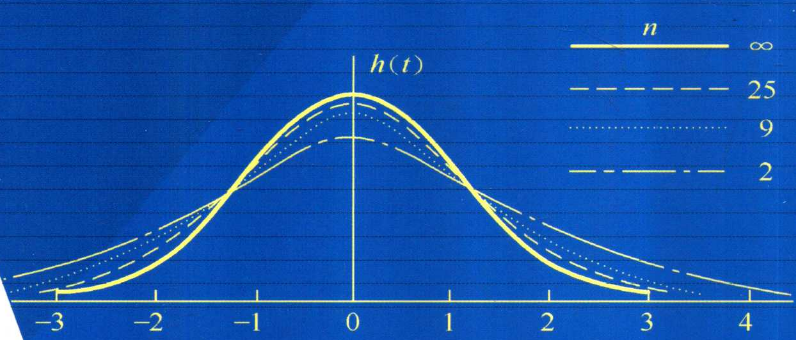
工业和信息化部“十二五”规划教材
21世纪高等学校规划教材

随机数学及其应用

陈萍 侯传志 冯予 编著

Random Mathematics with Applications



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化部“十二五”规划教材
21世纪高等学校规划教材

随机数学及其应用

陈萍　侯传志　冯予　编著

Random Mathematics with Applications

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

随机数学及其应用 / 陈萍，侯传志，冯予编著. -- 北京 : 人民邮电出版社，2015.2
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-38052-4

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①陈… ②侯… ③冯… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②随机过程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第302128号

内容提要

随机数学是研究随机现象的现代概率论和数理统计知识的统称，包括测度论、随机过程、随机分析、高等数理统计、统计决策等内容，是一门应用性极强的学科。本书由测度论知识概要、随机过程及其应用、随机分析、贝叶斯统计推断和统计决策四部分组成。在叙述方式上注重一定的直观性，同时也保留一些必需的数学上的严谨性。

本书可供高等院校非数学专业高年级大学生、硕士和博士研究生作为教材使用，也可供相关专业教师及工程技术人员参考。

◆ 编　著　陈　萍　侯传志　冯　予
责任编辑　戴思俊
执行编辑　税梦玲
责任印制　沈　蓉　彭志环

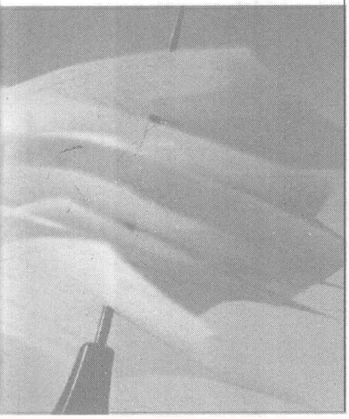
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.5　2015 年 2 月第 1 版
字数：292 千字　2015 年 2 月北京第 1 次印刷

定价：34.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言 Foreword



随着科学技术的飞速发展，随机数学作为重要的工具在信号处理、自动控制、动态可靠性、武器性能评估、天文气象、经济管理、金融数学等各个领域都得到了极其广泛的应用。可以预见，随着科技的进步特别是高新技术的发展，随机数学的应用将会更加的深入和广泛。作为社会的栋梁，当代大学生和研究生要更好地从事相关研究，对随机数学知识的需求也将越来越迫切，往往并非是学的太多而是学的不够多。

概率数学有两种叙述方式：一种是初等概率论的表述，直接从事件发生可能性大小的角度来描述，可以培养对概率的感性认识，这是一种直观但不严格的做法；另一种是从测度论的角度，它基于更抽象的理论知识，这种做法的好处自然是理论体系完备且无懈可击。原本是只有数学专业的学生才需要按照这种方法讲述，对于非数学类的学生，由于基础知识的欠缺，对此总是望而却步。但近年来，相关应用领域对第二种知识结构的需求却在逐渐加强。为此我们采用一种介乎这两者之间的处理方式，既照顾一定的直观性，同时也保留一些必需的数学上的严谨性。作为一种尝试，我们希望能够让原来“专属于”数学专业的随机数学的知识在其他专业中得以普及。

本书在内容安排上，以应用随机过程为主线，补充必要的测度论的相关知识，在知识体系上力求满足封闭性。重点放在概念以及数学思想和方法的介绍，力求将抽象的知识直观化，并注意选择与工科学生专业相关的一些例题作为抽象结论的深化。力求做到让学生在教学规定时间内对现代随机数学的理论有一定深度的了解，掌握具有实用性的随机数学理论，便于学生将所学的数学方法应用于自己的研究方向，达到学以致用的目的。

第 1 章从测度论的观点介绍概率论；第 2 章介绍随机过程中的一些基本概念；第 3 章介绍在理论和应用中都最简单但又极重要的一类计数过程——泊松过程；第 4 章介绍随机过程领域中研究最多、成果最丰富也是最重要的过程——马尔可夫过程；第 5 章介绍近年来在应用中逐渐引起人们重视的鞅论；第 6 章介绍联系随机领域和分析领域的重要随机过程——布朗运动；第 7 章介绍随机数学中的“微积分”——

随机分析，这是近年来在理论和应用中都得到高度重视并充满生机和活力的领域；第 8 章介绍非频率派统计的主流方法——贝叶斯统计学。 第 1 章～第 5 章由侯传志编写，第 6 章和第 7 章由陈萍编写，第 8 章由冯予编写。 全书由陈萍和侯传志统稿。

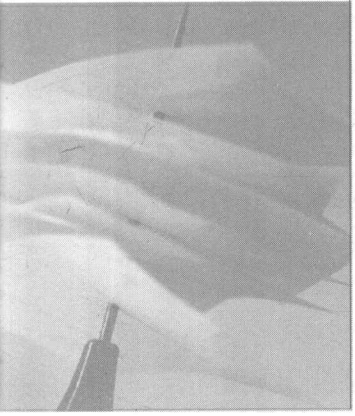
随机数学的内容非常丰富，但由于作者个人经验，在选材时难免会挂一漏万。 限于篇幅，对于每章内容也只能择其要义讲述，希望可以起到抛砖引玉的效果。 另外，感谢南京理工大学理学院统计与金融数学系诸位同事在本书编写中提供的大力帮助；感谢南京理工大学《随机过程》课程和《随机数学》课程班上的诸位同学，在使用本讲义授课的 8 年中，同学们指出了讲义中很多的错漏之处，对于本书的完善起到了极大的作用。

限于编者水平，本书难免会有不当或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2014 年 9 月

目　录 Content



第 6 章　布朗运动

第 7 章　随机分析简介

第 8 章　贝叶斯统计推断简介

附录　常用统计分布族 /191

参考文献 /192

第1章 测度论基础下的概率论简介

概率论是从数量上研究随机现象统计规律的学科。时至今日,概率论在现实生活的各个层面都已经有了极其广泛的应用。本章的目的是让学生初步了解测度论的基础知识,并且从测度论的角度重新认识和理解初等概率论中的相关概念。这主要基于以下两个原因。

(1)从严格的数学意义上来讲,测度论是概率统计(特别是随机过程论)须臾不可或缺的工具,很多基本的概念和问题,离开了测度论的工具就很难解释清楚。初等概率论中的诸多概念大多是不完备的,譬如事件、概率和期望等。其主要原因是限于当时学生的层次和可接受的水平。但随着学习层次的提高和应用范围的进一步扩大,就必须要在更高的层次和观点上重新对这些概念加以严格化,而要做到这一点,就必须运用测度论的工具对这些概念进行重新定义和理解。考察随机数学的发展历史,这种对测度论的依赖在未来发展中将会更加迫切。

(2)在教学和科研中所遇到的情况告诉我们:虽然测度论是高等概率论的基础,但却常常出现不能很好地将测度论的知识应用于概率论中的情况,因此我们认为在教学过程中,将两者结合起来介绍是合理的,这对读者更深刻掌握随机方法的实质有很大的帮助。目前,这种看法已经得到诸多概率统计同行的赞同,并且已经有了一些开展这方面教学实践的专门教材。

在概率论的发展史上,前苏联的伟大数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在他划时代的著作《概率论基础》中首先将概率论建立在严格的测度论基础之上。他的工作使概率论终于摆脱了伪科学的帽子,并最终发展成为现代数学的重要分支。

本章力图以尽量少的篇幅和尽量直观的论述方式,围绕测度论的几个重要的定理展开讨论,从测度论的观点重新定义和诠释概率论中的一些基本概念及其结论。但限于篇幅,一些概念和定理的论述方式也尽量采用概率论的直观角度的形式,而不采用严格和抽象的测度论的形式。本章大多定理只叙述结论但不证明,对证明过程感兴趣的读者,可以参考书末列举的测度论的相关文献。

1.1 可测空间与概率空间

测度论是研究如何测量(或度量)集合的理论,其基本任务就是用一个数字表示对一个抽象集合的度量。直观上,可以按照以下观点来理解本节所给出的相关的概念:

(1)样本空间:奠定了测度论所要研究的范围。

(2)样本空间上的σ-代数:给定了将要研究的对象,其元素即为可测集。

(3)测度:给定了度量集合的工具。

以上的3个要素就构成了可测空间,而概率空间则是在概率的背景下,可测空间的一种特例,相关的概念也就构成了我们常见的样本空间、随机事件和概率。

1.1.1 可测空间与可测集

集合是现代数学中最基本的概念之一。一个给定的集合，是指具有某种性质的事物的全体，构成集合的每个事物称之为元素。常用大写英文字母表示集合，除非特别说明，常在一个指定的非空集合中讨论问题，并称这个集合为空间。

假定读者已具备初等集合论的知识，下面给出本书常用的一些记号。

Ω:样本空间。

ϕ:空集。

$\#(A)$:A 中元素的个数。

$\omega\in A$:ω 属于 A。

$\omega\notin A$:ω 不属于 A。

$A\subset B$:A 是 B 的子集。

$A\cup B$:A 与 B 的并集。

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 分别表示有限个和可数个集合的并。

$A\cap B$(或 AB):A 与 B 的交集。

$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i,\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 分别表示有限个和可数个集合的交。

$A-B$:A 与 B 的差。

$\overline{A}$(或 A^c):A 的逆(或余)集，即 $\overline{A}=\Omega-A$。

$A\Delta B$:A 与 B 的对称差，即 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$。

δ_A(或 χ_A):集合 A 的示性函数，即 $\delta_A(\omega)=\chi_A(\omega)=\begin{cases}1, & 若\ \omega\in A\\ 0, & 若\ \omega\notin A\end{cases}$。

定义 1.1 设 Ω 为给定的非空集合，以 Ω 的子集作为元素的集合称为一个**集族**或**集类**，即“集合的集合”，通常用 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 等来表示。以下除非特别说明，都假定集族是非空的。

下面介绍一种与概率论关系最为密切的集类：σ-代数。

定义 1.2 设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 的子集组成的集类，若满足

(1)$\Omega\in\mathscr{F}$；

(2)若 $\forall A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$；

(3)若 $\forall A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i\in\mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的 σ-代数，称二元组 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间，称 $A\in\mathscr{F}$ 为可测集。

【例 1.1】

(1)集类 $\{\phi,\Omega\}$ 为 σ-代数，称之为最“粗”的 σ-代数；

(2)由 Ω 的所有子集组成的集类为 σ-代数，记为 2^{Ω}，称为最“细”的 σ-代数；

(3)设 $A\subset\Omega$,则集类$\{\Omega,A,\overline{A},\phi\}$是 σ-代数;

根据定义,可以证明下面的重要结论。

性质 1.1 若$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$是 Ω 上的两个 σ-代数,则$\mathscr{F}_1\cap\mathscr{F}_2$是 Ω 上的 σ-代数。

虽然 σ-代数的交仍然是 σ-代数,但 σ-代数的并却不一定是 σ-代数。

读者由例 1.1 的(3)举例说明。根据性质 1.1,可得下面重要的概念。

定义 1.3 设$\mathscr{A}$为 Ω 上的非空子集类,称包含$\mathscr{A}$的最小的 σ-代数为$\mathscr{A}$生成的 σ-代数,记之为$\sigma(\mathscr{A})$。

注意到,2^{Ω} 就是包含$\mathscr{A}$的一个 σ-代数,因此包含$\mathscr{A}$的最小的 σ-代数是存在的。根据性质 1.1,对所有包含$\mathscr{A}$的 σ-代数取交即可得到$\sigma(\mathscr{A})$,或者表示为

$$\sigma(\mathscr{A})=\bigcap_{\mathscr{F}\supset\mathscr{A}}\mathscr{F}$$

式中,$\mathscr{F}$ 表示所有包含$\mathscr{A}$的任意 σ-代数。

前面提到,两个 σ-代数$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$的并集不一定是 σ-代数,称由两个 σ-代数的并生成的 σ-代数为$\mathscr{F}_1$和$\mathscr{F}_2$生成的 σ-代数,记为 $\sigma(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)$,类似可以定义多个 σ-代数生成的 σ-代数。

【例 1.2】

(1)设$\mathscr{A}=\{A\}$,则 $\sigma(\mathscr{A})=\{\Omega,A,\overline{A},\varphi\}$;

(2)设 $\Omega=R^n$,$n\geqslant1$,令 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$b=(b_1,\cdots,b_n)$,若$-\infty\leqslant a_k\leqslant b_k\leqslant+\infty$,$k=1,2,\cdots,n$,则记为 $a\leqslant b$,令$\mathscr{C}=\{(a,b]\mid a\leqslant b,a,b\in R^n\}$,则称 $\sigma(\mathscr{C})$为 n 维波雷尔代数,记为$\mathscr{B}(R^n)$,$\mathscr{B}(R^n)$中的元素称为 n 维波雷尔(Borel)集。实际上,根据生成 σ-代数的定义还可证明,$\mathscr{B}(R^n)$也可以由所有的开集类或所有的闭集类生成。

下面讨论关于集合序列的极限。

定义 1.4 设$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$为一个集合序列,则

(1)称集合$\{\omega\mid\omega$属于无穷多个 $A_n,n=1,2,\cdots\}$为集列$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$的上极限,记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup A_n$ 或$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A_n$;

(2)称集合$\{\omega\mid\omega$至多不属于有限多个 $A_n,n\geqslant1\}$为集列$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$的下极限,记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\inf A_n$ 或$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$;

(3)若$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$的上极限和下极限相等,则称该集列极限存在,记为 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$。

下面的定理给出了上极限和下极限的重要刻画。

定理 1.1

(1)$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$;

(2)$$\limsup_{n\to+\infty}A_n=\{\omega\mid\forall n,\exists k\geqslant n,s.t.\ \omega\in A_k\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k;\tag{1.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\{\omega\mid\exists n,\forall k\geqslant n,s.t.\ \omega\in A_k\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty}A_k。\tag{1.2}$$

利用上、下极限的定义和集合运算律即可证明,留作练习。根据定理 1.1 可知下列推论。

推论 1.1

(1)若$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$为单调递增集列,则极限存在,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$;

(2)若$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$为单调递减集列,则极限存在,且$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$。

性质 1.2

(1)$\delta_{\liminf\limits_{n\to\infty}A_n}=\liminf\limits_{n\to\infty}\delta_{A_n}$,$\delta_{\limsup\limits_{n\to\infty}A_n}=\limsup\limits_{n\to\infty}\delta_{A_n}$;

(2)$\overline{\limsup\limits_{n\to+\infty}A_n}=\liminf\limits_{n\to\infty}\overline{A}_n$,$\overline{\liminf\limits_{n\to+\infty}A_n}=\limsup\limits_{n\to\infty}\overline{A}_n$;

(3)设$\mathscr{F}$为Ω上的σ-代数,集列$\{A_n,n=1,2,\cdots\}\subset\mathscr{F}$,则

$$\limsup_{n\to+\infty}A_n\in\mathscr{F},\liminf_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{F}$$

作为上下极限的应用,讨论下列重要的单调集列。

定义 1.5 设$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$为一个集合序列,若对于$\forall n,A_n\subset A_{n+1}(A_n\supset A_{n+1})$,则称$\{A_n,n=1,2,\cdots\}$为单调递增集列(单调递减集列)。

【例 1.3】 设A,B为两个非空集合,令$A_{2n-1}=A,A_{2n}=B,n=1,2,\cdots$,则由定理 1.1 易证$\lim\limits_{n\to+\infty}\sup A_n=A\cup B$,$\lim\limits_{n\to+\infty}\inf A_n=A\cap B$。

1.1.2 测度与概率

可测即指可以测量或可以度量之意,那么用来测量的工具就是这里要提到的"测度"的概念。将一个集合同一个数字对应起来的好处是显而易见的,至少可以对两个集合进行大小的比较,即便在应用中也更易于进行数据处理。在实变函数论中,勒贝格(Lebesgue)测度是线段长度或者欧氏空间中面积或体积(包括多维下的抽象体积)的延伸。将勒贝格测度的概念进一步推广,可得到测度的概念。

定义 1.6 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间,μ为定义在$\mathscr{F}$上取值于$[0,+\infty]$的映射,若μ满足

(1)$\mu(\phi)=0$;

(2)若$A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots$为互不相容的集列,则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)\tag{1.3}$$

则称μ为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度,称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为**测度空间**。

条件(2)称为μ满足可列可加性或σ-可加性。

根据取值范围的不同,测度或测度空间一般分为下面的几类:

(1)称μ为**有限测度**,若$\mu(\Omega)<\infty$,此时称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为有限测度空间;

(2)称μ为σ**有限测度**,若存在$\mathscr{F}$中的集列$\{A_n,n\geqslant1\}$,满足$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=\Omega$,且$\forall n,\mu(A_n)<+\infty$,此时称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为$\sigma$-有限测度空间;

(3) 称μ为**概率测度**,若$\mu(\Omega)=1$,此时称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为概率空间,概率测度常记为P,概率空间中的可测集称为随机事件,简称事件。

下面给出几个测度的例子。

【例 1.4】 设Ω是一非空集合,$\mathscr{F}$是Ω的所有子集所组成的σ-代数,若满足

(1)$\forall A\in\mathscr{F}$,定义$\mu_1(A)=0$;

(2)定义$\mu_2(\varphi)=0,\forall A\in\mathscr{F}$,且$A\neq\varphi$,$\mu_2(A)=+\infty$。

由测度的定义,容易验证 μ_1,μ_2 都是测度,但 μ_2 既不是有限测度,也不是 σ-有限测度。

【例 1.5】 设全空间 Ω 中含有无穷可列个元素,$\mathscr{F}=2^{\Omega}$,令

$$\mu(A)=\begin{cases}\#(A), & \text{若 } A \text{ 含有限个元素}\\ +\infty, & \text{若 } A \text{ 含无限个元素}\end{cases}$$

则容易验证 μ 是 σ 有限测度,不是有限测度,称 μ 为计数测度。

【例 1.6】 设可测空间$(R^n,\mathscr{B}(R^n))$,$\forall A\in\mathscr{B}(R^n)$,设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,$b=(b_1,\cdots,b_n)$且 $a\leqslant b$,$A=(a,b]$,(或$(a,b)[a,b][a,b)$),令 $\mu((a,b])=\prod\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$,可验证 μ 为测度,称之为勒贝格测度。此外,若 μ 为$\mathscr{B}(R^n)$上的 σ-有限测度,且满足 $\mu((a,b])<+\infty$,则称 μ 为勒贝格-斯蒂阶测度。

下面给出测度的基本性质。

定理 1.2 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间,则 μ 满足

(1)有限可加性:设 $A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots,n$,且互不相容,则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

(2)单调性:$\forall A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,则 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

(3)可减性:$\forall A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,$\mu(B)<+\infty$,则

$$\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$$

(4)连续性:设 $A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots$为单调(递增或递减)集列,且 $A=\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$ 则

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$$

事实上,对于概率测度而言,可以证明上述(1)~(4)等价。

定义 1.7 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间,$A\in\mathscr{F}$,若 $\mu(A)=0$,则称 A 为 μ **零测集**;若任何 μ-零测集的子集都属于$\mathscr{F}$,则称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为**完备测度空间**。

1.2 可测函数与随机变量

本节定义可测空间中"函数"的概念,在抽象的测度空间和相对"简单"的空间之间建立映射关系,从而达到更好的研究和探讨测度空间相关性质的目的。为此首先引入可测映射和可测函数等相关概念。

1.2.1 可测函数的定义和性质

定义 1.8 设$(\Omega,\mathscr{F})$与$(E,\mathscr{E})$为可测空间,f 为 Ω 到 E 中的映射,若 $\forall A\in\mathscr{E}$,有

$$f^{-1}(A)=\{\omega\,|\,f(\omega)\in A\}\in\mathscr{F} \tag{1.4}$$

成立,则称 f 为$\mathscr{F}$**可测映射**,记为 $f\in\mathscr{F}/\mathscr{E}$。特别地,若$(E,\mathscr{E})=(R,\mathscr{B}(R))$,也可记为 $f\in\mathscr{F}$。

记 $\overline{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,-\infty\leqslant x_i\leqslant+\infty,i=1,2,\cdots,n\}$。

(1)当$(E,\mathscr{E})=(\overline{R}^n,\mathscr{B}(\overline{R}^n))$,则称 f 为 n 维可测函数;

(2)设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，f为n维可测函数，则称f为n维随机变量。

记$f^{-1}(\mathscr{E})=\{f^{-1}(A),\forall A\in\mathscr{E}\}$，由式(1.4)可知，$f$为$\mathscr{F}$可测映射的充要条件为$f^{-1}(\mathscr{E})\subset\mathscr{F}$。

下面的结论给出了可测函数的重要刻画。

性质 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，f为Ω到实数域R的函数，$\forall a\in R$，则以下条件等价：

(1)f为可测函数；

(2)$\{\omega|f(\omega)\leqslant a\}\in\mathscr{F}$；

(3)$\{\omega|f(\omega)<a\}\in\mathscr{F}$；

(4)$\{\omega|f(\omega)\geqslant a\}\in\mathscr{F}$；

(5)$\{\omega|f(\omega)>a\}\in\mathscr{F}$。

【例 1.7】 关于可测函数的几个例子。

(1)常数函数可测；

设$f(\omega)\equiv c,\forall\omega\in\Omega$，注意到

若$a\geqslant c$，则$\{\omega|f(\omega)>a\}=\varphi$；

若$a<c$，则$\{\omega|f(\omega)>a\}=\Omega$；

(2)$\forall A\in\mathscr{F}$，集合A的δ_A为可测函数；

(3)设$\Omega=R$，$\mathscr{F}$为波雷尔代数，那么定义在实数集上的任何连续函数都是波雷尔可测的，这是由于此时$\{\omega|f(\omega)>a\}$是R中的开集，从而是可列个开区间的并，因此$\{\omega|f(\omega)>a\}\in\mathscr{F}$，但可测函数不一定连续，反例留作练习，所以可测性的概念要比连续性的定义更广泛。

(4)在可测空间$(R,\mathscr{B}(R))$上，f是任意单调函数，则f为$\mathscr{B}(R)$可测，证明留作练习。

需要注意的是，由于可测函数可取$\pm\infty$，通常规定$\pm\infty$与有限数的运算规则如下，$\forall x\in R$

$$(\pm\infty)+x=x+(\pm\infty)=x-(\mp\infty)=\pm\infty$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$$

$$x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0\\ 0, & x=0\\ \mp\infty, & x<0\end{cases}$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0$$

但下列的运算被认为是无意义

$$(\pm\infty)-(\pm\infty),(\pm\infty)+(\mp\infty),(\pm\infty)/(\pm\infty),\pm\infty/\mp\infty,x/0$$

下面性质表明，可测函数经简单的代数运算后，可测性一般不会改变。

性质 1.4 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，函数$f,g,\{f_n,n\geqslant1\}$都为实值可测函数，则

(1)$f\cdot g$为可测函数；

(2)若$f\pm g$处处有意义，则$f\pm g$为可测函数；

(3)若f/g处处有意义，则f/g为可测函数；

(4)$\inf\limits_{n\geqslant1}\{f_n\}$，$\sup\limits_{n\geqslant1}\{f_n\}$，$\liminf\limits_{n\to+\infty}f_n$，$\limsup\limits_{n\to+\infty}f_n$为可测函数；

(5)$\{f=g\}$，$\{f\leqslant g\}$为可测集。

f 的逆映射 f^{-1} 是 $(E,\mathscr{E})$ 到 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 的映射，下面讨论关于 f^{-1} 的相关命题。

定理 1.3 设 f 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映射，逆映射为 f^{-1}，则

(1) f^{-1} 与集合的逆运算可以交换，即 $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c,\ \forall B\in\mathscr{E}$；

(2) $f^{-1}(\mathscr{E})\equiv\{f^{-1}(B):\forall B\in\mathscr{E}\}\subset\mathscr{F}$ 为子 σ 代数，且是使 f 可测的最小 σ-代数；

(3) 设 $\mathscr{A}$ 是 E 上的任一集类，则 $f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))=\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))$。

证明 (1)和(2)由定义直接验证可得；

(3)由(2)知，$f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))$ 为 σ 代数，注意到

$$\mathscr{A}\subset\sigma(\mathscr{A})\Rightarrow f^{-1}(\mathscr{A})\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))\Rightarrow\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))$$

此外，令 $\mathscr{G}\triangleq\{C\subset E:f^{-1}(C)\in\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))\}$。显然，$\mathscr{A}\subset\mathscr{G}$，可证 $\mathscr{G}$ 为 σ-代数，故 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{G}$，于是 $f^{-1}(\sigma(\mathscr{A}))\subset\sigma(f^{-1}(\mathscr{A}))$。

定义 1.9 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，$(E,\mathscr{E})$ 为可测空间，$\mathscr{H}$ 为 Ω 到 E 的一族映射，记 $f^{-1}(\mathscr{E})=\{f^{-1}(A)\mid\forall A\in\mathscr{E}\}$，令 $\mathscr{G}\triangleq\sigma\{\bigcup\limits_{f\in\mathscr{H}}f^{-1}(\mathscr{E})\}$，则 $\mathscr{G}$ 为使 $\mathscr{H}$ 中所有元素可测的最小 σ-代数，称 $\mathscr{G}$ 为函数族 $\mathscr{H}$ 在 Ω 上生成的 σ-代数。特别地，若 $\mathscr{H}$ 只含有一个函数 f，则记 $\mathscr{G}=\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{E})$，称为**函数 f 生成的 σ-代数**。

下面定理给出了 $\sigma(f)$ 可测函数的一个刻画。

定理 1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，$(E,\mathscr{E})$ 为可测空间，f,g 为 Ω 到 E 的映射，则 g 为 $\sigma(f)$ 可测的充分必要条件是存在 $h\in\mathscr{E}$，使得 $g=h\circ f$。

关于可测映射的复合映射有下面的重要结论。

定理 1.5 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$，$i=1,2,3$ 为三个可测空间，$f:\Omega_1\to\Omega_2$，$g:\Omega_2\to\Omega_3$，且 f,g 都是可测映射，则 $(g\circ f)(\omega)=g(f(\omega))$ 且为 $\Omega_1\to\Omega_3$ 上的可测映射。

证明：由定理 1.3 得

$$(g\circ f)^{-1}(\mathscr{F}_3)=f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{F}_3))\subset f^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$$

由此易知，如果 X 是(或多维)随机变量，f 都是可测函数，那么 $f(X)$ 仍然是随机变量。这一点在初等概率论中只是做了直观的说明，这一点如果不用测度论的知识就无法解释清楚。在测度的基础上，可对初等概率论中的分布函数有一个新的理解。

【例 1.8】 设 X 为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 n 维的随机变量，由定理 1.3 知

$$\sigma(X)=\{X^{-1}(B):\forall B\in\mathscr{B}^n\}\subset\mathscr{F}$$

是 σ-代数，它只包含与 X 有关的随机事件。$\forall B\in\mathscr{B}^n$，令 $P_X(B)\triangleq P(X^{-1}(B))$，可证 $P_X(\cdot)$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的概率测度，它表明了 X 取值的概率分布规律，由它可以决定 X 的概率分布函数：$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，

$$F(x_1,\cdots,x_n)=F(x)=P_X((-\infty,x])=P(X_1\leqslant x_1,,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$

下面讨论可测函数的构造性质。

定义 1.10 设 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 为 Ω 的划分，即 $\{A_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 为互不相容的集合序列，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$a_i\in R$，$i=1,2,\cdots,n$，则称 $f(\cdot)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\delta_{A_i}(\cdot)$ 为**简单函数**。

显然，示性函数与简单函数都是可测函数。

定理 1.6 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，f为可测函数，则

(1)存在简单可测函数列$\{f_n,n\geqslant 1\}$，使得对$\forall n\geqslant 1$，有$|f_n|\leqslant|f|$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$；

(2)若f非负，则存在非负递增简单可测函数列$\{f_n,n\geqslant 1\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。

证 注意到$f=f^+-f^-$，其中$f^+=f\vee 0$，$f^-=-f\vee 0$，于是(1)可由(2)推得。而对于(2)，令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\delta_{\{k/2^n\leqslant f<(k+1)/2^n\}}+n\delta_{\{f\geqslant n\}}$$

则$\{f_n,n\geqslant 1\}$为非负单调递增简单可测函数，易证$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$。

该定理给出了可测函数的构造方法，其使用方法一般是：

需要证明可测函数f满足性质时，先证明当f为示性函数时结论成立，然后证明f为简单函数时结论成立，于是得到结论对于f为非负可测函数成立，最后由公式$f=f^+-f^-$得到当f为一般可测函数时也成立。该方法称为“典型方法”，在测度论中占有重要地位，很多表面繁杂的结论，采用这种方法都可以得到简单的证明。

1.2.2 随机变量序列的收敛性

在测度论和概率论中，收敛性是一个极其重要的问题，本节简要介绍各种收敛性的概念以及相互之间的关系。为了后面应用的方便，只以概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量为例给出各种收敛性的定义。对于一般的测度空间与可测函数而言，各种收敛性的定义也是完全类似的。

设$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$与X都是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量。

定义 1.11(依概率收敛)

称$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$依概率P收敛于X，若$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$满足$\forall\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to+\infty}P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$$

或

$$\lim_{n\to+\infty}P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$$

记为$X_n\xrightarrow{P}X$。如果将概率测度改为一般测度μ，即是依测度μ收敛。

注意依概率收敛与数列的收敛的不同。例如数列$\{a_n,n\geqslant 1\}$，且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，则意味着$\forall\varepsilon>0$，当$n$充分大时，$\{|a_n-a|\geqslant\varepsilon\}$是一个不可能事件；然而$X_n\xrightarrow{P}X$却表明，$n$充分大时，$A_n\triangleq\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}$的概率越来越接近0，但给定一个$n$(无论多么大)，$A_n$的概率不一定为0，当然也就不一定是不可能事件。

定义 1.12(几乎必然收敛)

称$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$几乎必然收敛于X，若$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$满足

$$P(\lim_{n\to+\infty}X_n=X)=1$$

也称之为依概率1收敛于X，记为$X_n\xrightarrow{a.s.}X$。

需要说明的是，对于一般的测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$而言，若

$$\mu(\lim_{n\to+\infty} X_n \neq X)=0$$

则称$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$关于测度μ几乎处处收敛于X，记为$X_n \xrightarrow{a.e.} X$。

实际上，当给定$\omega\in\Omega$，$X_n(\omega)$，$X(\omega)$都是实数，$P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X)=1$表明数列极限$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$不成立的$\omega$所组成的集合（根据前面结论，该集合是可测集）的测度为0。这也就是说，高等数学中的命题“函数列收敛的充要条件是它的任意子列都收敛”对于$a.e.$而言不再成立，因为在可数子列中可能有不收敛的零测集存在。

可以证明，$X_n \xrightarrow{a.s.} X$等价于

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}\{|X_k - X|\geqslant\varepsilon\}\right)=0$$

该式给出了几乎处处收敛的一个重要刻画。若将概率测度改为一般测度μ，即是关于测度μ几乎处处收敛。

定义 1.13（*r* 阶收敛）

设随机变量序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$满足$E(|X_n|^r)<+\infty$，$E(|X|)<+\infty$，其中$r>0$为常数，称$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ r阶收敛于X，若$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$满足

$$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|^r)=0$$

记为$X_n \xrightarrow{r} X$。特别地，当$r=2$时，称$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$均方收敛于X。均方收敛在随机过程理论中有重要的意义，关于它的进一步讨论可参阅后面的相关章节。

定义 1.14（弱收敛和依分布收敛）

(1)设随机变量序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$的相应的分布函数列为$\{F_n(x), n=1,2,\cdots\}$，如果存在一个非降函数$F(x)$，使得

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

在$F(x)$的每个连续点上都成立，则称$F_n(x)$弱收敛于$F(x)$，记作$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$。

易知，这样得到的极限函数是一个有界的非降函数，也可以选择使得它是右连续的，然而，$F(x)$不一定是分布函数，请读者自行举出反例。此外需要注意的是，定义并不要求在非连续点上的收敛性。

(2)设随机变量序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$相应的分布函数列为$\{F_n(x), n=1,2,\cdots\}$，随机变量X的分布函数为$F(x)$，若$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$，则称$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$依分布收敛于$X$，记作$X_n\xrightarrow{d}X$。

初等概率论中的中心极限定理，无一例外都是构造后的随机变量序列依分布收敛于正态分布的分布函数。下面的定理给出了几种收敛性的关系。

定理 1.7 (1)$X_n\xrightarrow{a.s.}X$或$X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$；

(2)$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow$存在$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$的子列$\{X_n'\}$，使得$X_n'\xrightarrow{a.s.}X$；

(3)$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$；

下面给出在概率论中有着重要应用的波雷尔-康特立(Borel - Canteli)引理。