



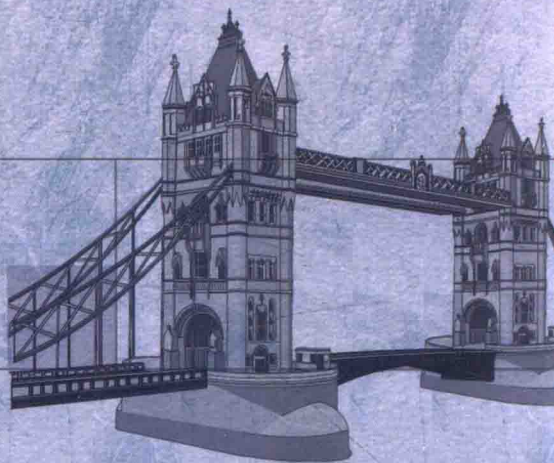
新世纪

普通高等教育应用型本科土木工程专业系列规划教材

理论力学

LILUN LIXUE

主 编 苏振超
主 审 周广春



大连理工大学出版社

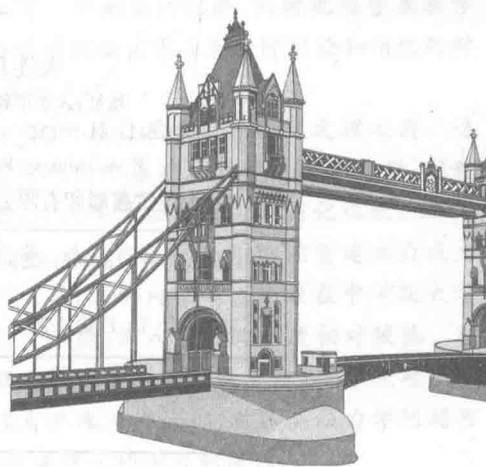


普通高等教育应用型本科土木工程专业系列规划教材

理论力学

LILUN LIXUE

主 编 苏振超
副主编 薛艳霞 宫思维
主 审 周广春



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

理论力学 / 苏振超主编. — 大连: 大连理工大学出版社, 2014. 11
普通高等教育应用型本科土木工程专业系列规划教材
ISBN 978-7-5611-9585-7

I. ①理… II. ①苏… III. ①理论力学—高等学校—教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 244392 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市软件园路 80 号 邮政编码: 116023

发行: 0411-84708842 邮购: 0411-84708943 传真: 0411-84701466

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连雪莲彩印有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 185mm×260mm 印张: 20 字数: 509 千字
印数: 1~2000

2014 年 11 月第 1 版 2014 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑: 王晓历 责任校对: 郝芳
封面设计: 张莹

ISBN 978-7-5611-9585-7

定价: 42.00 元

前 言

《理论力学》结合编者长期从事理论力学教学与改革的经验与体会,按照教育部高等学校力学教学指导委员会制定的最新版《理论力学课程教学基本要求(A类)》,针对理论力学课程难教、难学之隐,在理论力学教学内容的系统性、逻辑性和完整性,以及在一些概念的阐述等方面做了新的探索和改革,形成了具有以下特点的、不同于流行体系的理论力学知识体系:

(1)对理论力学知识体系的讲授顺序进行调整,将原来的第一篇由静力学改为运动学,这样安排主要是为了更好地讲解静力学,也有利于学生更深入地理解静力学,同时也为讲授虚位移原理创造条件。

(2)将约束及自由度的概念置于教材的开端,作为统领整部教材的基本概念,既满足了运动学的需要,同时也满足了静力学和动力学的需要。

(3)静力学一篇包含矢量静力学和分析静力学两部分内容,能够使学生更全面地掌握静力学内容,为各专业基础课及专业课的学习打好基础。虚位移原理的前移一方面使学生对静力学内容有一个完整的理解,同时也为学生在学习过程中深入理解该原理留出更多与教师讨论和消化的时间,分散了这一教学难点。

(4)将动力学的达朗贝尔原理置于三大定理之前。这样安排主要是考虑达朗贝尔原理对于学生而言较新,同时又比较实用和通用,所以给学生留出时间消化吸收。三大定理主要是通过动量、动量矩及动能等物理量建立力或力偶与运动量之间的关系,这些内容学生已经在中学及大学物理课程中有了初步了解,深入学习的难度相对较低。达朗贝尔原理的前移有利于活跃学生的思维,使学生对动量定理和动量矩定理有更深入的认识,对各类动力学问题可以一题多解,从而提高学生的学习积极性。

(5)将教育部高等学校力学教学指导委员会制定的《理论力学课程教学基本要求(A类)》专题部分中的理论部分集中在一起,作为分析动力学基础一章,这样内容紧凑,前



● 2 理论力学

后联系密切,便于按逻辑思维展开。

(6)具体内容方面,编者做了一些合理调整,如摩擦力、摩擦角概念的引入,复杂摩擦问题的求解,复杂虚位移之间关系的建立,无功约束的概念等。

本教材可用作高等学校土木水利类、机械类、航空航天类、船舶动力类等专业的理论力学课程教材,也可供高职高专院校师生及工程技术人员学习参考。后面附有习题答案供读者参考对照。

本教材在编写过程中,坚持以学生为中心的理念,以有效教学、激发学生的积极思维为导向,利用在正文中及例题后的【说明】【评注】【思考】等环节,加强学生思维能力以及提出和分析问题能力的培养,力求做到使学生的知识与能力协调发展,理论与实际相结合。

本教材由厦门大学嘉庚学院苏振超任主编,厦门大学嘉庚学院薛艳霞、中国地质大学长城学院宫思维任副主编。具体编写分工如下:苏振超撰写第一篇、第三篇及第四篇的第14章、第15章,并整理附录和参考答案;薛艳霞撰写第二篇;宫思维撰写第16章。本教材由苏振超负责统稿并定稿。哈尔滨工业大学博士生导师周广春教授任主审,周广春教授在百忙之中认真审阅了书稿,对全书的体系、内容等进行了详尽指导,在此表示衷心感谢!同时,本教材初稿完成后,编者也邀请了全国优博获得者、南京航空航天大学博士生导师王立峰教授审阅了书稿,提出了改进意见,在此谨致谢忱!

本教材主编曾参加清华大学博士生导师李俊峰教授的理论力学培训,本教材一些内容的处理方法是受到李俊峰教授的启发,并时常通过电子邮件受教于李俊峰教授。同时,在具体问题的讨论中,经常与南京航空航天大学王怀磊副教授研讨切磋,受益良多,在此对他们的热情帮助表示感谢!同时,也曾得到西南交通大学邱秉权教授、长江大学孟宪铸教授、五邑大学董清华教授、河海大学武清玺教授、南京航空航天大学胡海岩教授等前辈的指导和关心,在此一并致以谢意。此外,还要对厦门大学嘉庚学院领导及土木工程系领导在本教材编写过程中所提供的良好条件和帮助表示感谢!

在教材编写过程中,参考了很多国内外优秀的《理论力学》或《工程力学》教材,在此也向这些教材的作者致以敬意!

限于编者的水平,书中可能仍有疏漏之处,敬请广大教师和读者批评指正。

编者

2014年11月

所有意见和建议请发往:www.dutpbk.com

欢迎访问教材服务网站:<http://www.dutpbook.com>

联系电话:0411-84708462 84708445

目 录

| | |
|----------------|---|
| 绪 论 | 1 |
| 0.1 理论力学的内容和任务 | 1 |
| 0.2 理论力学的研究方法 | 2 |
| 0.3 理论力学的学习方法 | 3 |

第一篇 运动学

| | |
|-----------------------|----|
| 第 1 章 运动学基础 | 7 |
| 1.1 约束及约束方程 | 7 |
| 1.2 自由度和广义坐标 | 8 |
| 1.3 点的运动学 | 10 |
| 1.4 刚体的基本运动 | 19 |
| 习 题 | 25 |
| 第 2 章 点的合成运动 | 29 |
| 2.1 点的绝对运动、相对运动和牵连运动 | 29 |
| 2.2 速度合成定理 | 29 |
| 2.3 加速度合成定理 | 35 |
| 习 题 | 39 |
| 第 3 章 刚体的平面运动 | 43 |
| 3.1 刚体的平面运动及其运动方程 | 43 |
| 3.2 平面图形上各点的速度分析 | 45 |
| 3.3 平面图形上各点的加速度分析 | 50 |
| 3.4 刚体平面运动与点的合成运动综合应用 | 52 |
| 习 题 | 55 |

第二篇 静力学

| | |
|---------------------|----|
| 第 4 章 静力学基础及物体的受力分析 | 61 |
| 4.1 力及力系 | 61 |
| 4.2 刚体静力学的基本原理 | 64 |
| 4.3 力矩·力偶及力偶矩 | 66 |
| 4.4 约束及约束反力 | 71 |

| | | |
|-------|---------------------|-----|
| ● 4 | 理论力学 | |
| 4.5 | 物体的受力分析 | 74 |
| | 习 题 | 79 |
| 第 5 章 | 力系的简化 | 82 |
| 5.1 | 力的平移定理 | 82 |
| 5.2 | 力系向一点的简化 | 83 |
| 5.3 | 重心和形心 | 92 |
| 5.4 | 平行分布力系的简化 | 94 |
| | 习 题 | 98 |
| 第 6 章 | 平衡方程及其应用 | 101 |
| 6.1 | 汇交力系的平衡 | 101 |
| 6.2 | 力偶系的平衡 | 103 |
| 6.3 | 一般力系的平衡 | 105 |
| 6.4 | 物体系统的平衡·静定和静不定问题 | 108 |
| 6.5 | 平面静定桁架 | 114 |
| | 习 题 | 117 |
| 第 7 章 | 摩擦 | 122 |
| 7.1 | 摩擦力与摩擦角 | 122 |
| 7.2 | 考虑摩擦时物体系统的平衡 | 126 |
| 7.3 | 滚动摩阻 | 133 |
| 7.4 | 柔性体的摩擦 | 136 |
| | 习 题 | 138 |
| 第 8 章 | 虚位移原理 | 142 |
| 8.1 | 力的功 | 142 |
| 8.2 | 虚位移的概念与分析方法 | 147 |
| 8.3 | 虚位移原理的应用 | 151 |
| 8.4 | 势力场、有势力和势能 | 160 |
| 8.5 | 势力场中物体系统的平衡条件及平衡稳定性 | 162 |
| | 习 题 | 165 |

第三篇 动力学

| | | |
|-------|--------------|-----|
| 第 9 章 | 质点动力学 | 171 |
| 9.1 | 牛顿运动定律 | 171 |
| 9.2 | 质点的运动微分方程 | 172 |
| 9.3 | 质点动力学的两类基本问题 | 173 |
| 9.4 | 质点相对运动动力学 | 176 |
| | 习 题 | 180 |

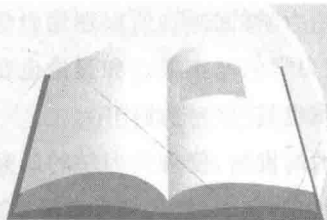
| | |
|---------------------------|-----|
| 第 10 章 达朗贝尔原理 | 182 |
| 10.1 质点和质点系的达朗贝尔原理 | 182 |
| 10.2 转动惯量与惯性积 | 184 |
| 10.3 惯性力系的简化 | 189 |
| 10.4 达朗贝尔原理的应用 | 191 |
| 10.5 一般定轴转动刚体的轴承动反力 | 197 |
| 习 题 | 201 |
| 第 11 章 动量定理 | 204 |
| 11.1 动量与冲量 | 204 |
| 11.2 质点与质点系的动量定理 | 205 |
| 11.3 质心运动定理 | 208 |
| 习 题 | 210 |
| 第 12 章 动量矩定理 | 213 |
| 12.1 质点及质点系的动量矩 | 213 |
| 12.2 质点与质点系的动量矩定理 | 216 |
| 12.3 矩心为动点的动量矩定理 | 220 |
| 12.4 刚体的平面运动微分方程 | 222 |
| 习 题 | 224 |
| 第 13 章 动能定理 | 228 |
| 13.1 动能 | 228 |
| 13.2 质点与质点系的动能定理 | 230 |
| 13.3 机械能守恒定律·功率方程 | 234 |
| 13.4 动力学普遍定律的综合应用 | 237 |
| 习 题 | 240 |

第四篇 专 题

| | |
|---------------------------|-----|
| 第 14 章 分析动力学基础 | 247 |
| 14.1 动力学普遍方程 | 247 |
| 14.2 第二类拉格朗日方程 | 249 |
| 14.3 第一类拉格朗日方程 | 253 |
| 14.4 哈密尔顿正则方程 | 255 |
| 14.5 哈密尔顿原理 | 258 |
| 习 题 | 262 |
| 第 15 章 碰 撞 | 264 |
| 15.1 碰撞问题的特征与恢复因数 | 264 |
| 15.2 研究碰撞运动的动力学普遍定理 | 265 |
| 15.3 两球的碰撞 | 267 |

● 6 理论力学

| | | |
|------------------------------|----------------------|-----|
| 15.4 | 平面运动刚体的碰撞问题举例 | 271 |
| 15.5 | 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的作用·撞击中心 | 273 |
| | 习 题 | 275 |
| 第 16 章 振动基础 | | 277 |
| 16.1 | 单自由度系统的自由振动 | 277 |
| 16.2 | 单自由度系统的衰减振动 | 280 |
| 16.3 | 单自由度系统的受迫振动 | 283 |
| 16.4 | 隔振的概念 | 287 |
| | 习 题 | 289 |
| 附录 I 基本知识 | | 291 |
| I.1 | 矢量及其运算 | 291 |
| I.2 | 等时变分 | 294 |
| I.3 | 常微分方程及其求解 | 296 |
| 附录 II 简单均质几何体的重心和转动惯量 | | 297 |
| | 习题答案 | 299 |
| | 参考文献 | 310 |



绪 论

0.1 理论力学的内容和任务

1. 理论力学的内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的一门学科。

机械运动是物体在空间的位置随时间的变化,是所有运动形式中最简单的一种。例如,建筑物的振动、机器的运转、大气和河水的流动、车辆的行驶、人造卫星和宇宙飞船的运行等,都是机械运动。平衡(如物体相对于地球处于静止的状态)作为机械运动的一种特殊情况,也是理论力学的研究内容之一。

理论力学研究的内容是远小于光速的宏观物体的机械运动,以牛顿基本定律为基础,属于经典力学的范畴。用经典力学来解决相关问题,不仅方便,而且能够保证足够的精确性,所以经典力学仍有很大的实用意义,并且随着新问题的不断出现还在不断地发展着。

研究物体机械运动的普遍规律有两种基本方法,并以此形成了理论力学的两大体系:一是用矢量的方法研究物体机械运动的普遍规律,称为矢量力学;二是用数学分析的方法进行研究,称为分析力学。本书对这两种研究方法按照问题的性质加以介绍,而不是按照多数教材那样集中介绍分析力学,并希望以此使读者早接触分析力学的概念,提高读者利用分析力学的方法解决力学问题的能力。

本书内容包括运动学篇、静力学篇、动力学篇、专题篇四篇。

2. 理论力学的任务

理论力学是一门理论性较强的技术基础课,学习理论力学有下述任务:

(1)土木、机械、水利、航空、船舶等工程专业一般都会涉及机械运动的问题。有些工程实际问题可以直接应用理论力学的基本理论去解决,如土木、水利工程中的平衡问题;传动机械的运动学分析;机器和机械设计中的均衡问题;振动问题和动反力问题等。而一些比较复杂的工程实际问题,则需要应用理论力学的理论和其他专门知识共同解决,如土木工程中结构物对动荷载的响应分析及建筑物的抗震设计、机械工程中机构的动力响应及其优化设计等。虽然我们不可能在理论力学中讨论这些专门问题,但理论力学却是研究这些问题的基础。由此可见,掌握理论力学知识十分重要。

(2)理论力学的研究对象是力学中最普遍、最基本的规律。很多工程专业的课程,如材料

● 2 理论力学

力学、结构动力学、流体力学、振动力学、机械原理等,都要用到理论力学的知识,所以理论力学是学习一系列后续课程的基础。同时,在日常生活和生产中,理论力学的基本概念和理论也在指导着人们的实践活动,所以理论力学的基本知识对提高公民素质也具有一定的作用。

(3)理论力学知识是许多新兴学科的研究基础。现代科学技术的发展,使理论力学的研究内容渗透到其他科学领域,形成了一些新兴学科。例如,非线性动力学、非完整系统动力学、多体系统动力学、动力系统的稳定性理论、机器人动力学、卫星姿态动力学等等。总之,为了探索新的科学领域,必须打下坚实的理论力学基础。

(4)理论力学的理论来源于实践又服务于实践,既抽象又紧密结合实际,研究的问题涉及面广,而且系统性和逻辑性强。学习理论力学,对培养辩证唯物主义的分析方法,培养逻辑思维和分析解决问题的能力都具有重要作用。

0.2 理论力学的研究方法

1. 工程实际问题的简化

在工程实际问题中,我们所考察的物体复杂多样,即使是同一类型的问题,其受力状况也不尽相同。为便于研究,需将工程实际问题进行简化,以得到合理的力学模型,再在此基础上做进一步的计算和分析。将一个实际问题抽象为合理的力学模型并不容易,需要在实践中锻炼并不断提高这方面的能力。一般来说,工程实际问题可从三方面加以简化:物体的几何尺寸、受到的约束和承受的荷载(力)。

在简化过程中,因为要略去一些次要因素,必须包含着某种近似性。例如,当某些尺寸远小于其他有关尺寸时可忽略不计,在微小面积上的力可看作集中力,接触面很光滑或经过充分润滑时可不计摩擦等等。究竟哪些因素可以视为次要因素而略去,与研究问题的性质及其精确度有关。例如,在研究一般抛射运动时,将抛射体作为质点看待,且只计重力而不计空气阻力,得到的结果是可用的;但在研究远射程炮弹的运动时,如果作同样的假设,则炮弹可能偏离射击目标。另一方面,如果我们对实际存在的一些因素,不分主次,全部计入,看起来似乎是符合实际,但结果可能使问题无法求解,或者虽能求解,但困难极大,费时费力,而实际工作中并不需要这样高的精确度。所以,对一个具体问题,在抽象成为力学模型时,可作哪些近似假设,可忽略哪些因素,必须深入分析,力求合理,既要满足实际要求,又必须在数学计算上方便可行。

有关工程实际问题的简化方法将在本书有关章节中进一步叙述,下面介绍由实际问题抽象而得到的质点、质点系、刚体和刚体系几种力学模型。

(1)质点。如果一个物体的大小和形状对所讨论的问题而言可以忽略不计,而只需考虑其质量时,即可将该物体视为只有质量而没有大小的一个点,称为质点。

(2)质点系。质点系是相互间有一定联系的有限或无限多个质点的总称。

(3)刚体。刚体是指在任何外力作用下都不变形的物体。所以刚体中任意两个质点之间的距离始终保持不变,或者刚体可视为由无限多个质点组成的不变形的质点系。

(4)刚体系。刚体系是指按照一定的连接方式将单个刚体连接起来,形成的具有一定功能

的物体系统。对刚体系的分析往往以单个刚体为基础,并按确定的连接方式将刚体之间的相关力学量联系起来。

上述几种理想的力学模型,都是客观存在的实际物体的科学抽象,它们并不特指某些具体物体,而是概括了各种物体。不论物体是金属、木质、混凝土或其他材料,也不论是土建、水利工程中的建筑物构件或机械的零、部件,在研究它们的平衡或运动时,都可将其看作上述几种模型之一来加以考察(需要考虑变形者除外),原则上并无差别。这是人们认识深化的结果,也表明了理论的普遍意义。

2. 理论力学的研究方法

科学研究的过程,就是认识客观世界的过程,任何正确的科学研究方法,一定要符合辩证唯物主义的认识论。理论力学的研究和发展也必然遵循这个正确的认识规律。

(1)通过观察生活和生产实践中的各种现象,进行无数次的科学实验,经过分析、综合和归纳,总结出力学最基本的概念和规律。如力和力矩的概念,加速度的概念等。

(2)在对事物观察和实验的基础上,通过抽象建立力学模型。客观事物总是复杂多样的,当我们得到大量来自实践的资料之后,必须根据所研究的问题的性质,抓住主要的、起决定性作用的因素,略去次要、偶然的因素,深入事物的本质,了解其内部联系,这就是力学中普遍采用的抽象化方法。例如,在某些问题中忽略实际物体受力后的变形,得到刚体的模型;在另一些问题中则忽略物体的大小和形状,得到质点的模型等。一个物体究竟应当作为质点还是作为刚体看待,主要决定于所讨论问题的性质,而不决定于物体本身的大小和形状。即使同一个物体,在不同的问题里,随着问题性质的不同,有时应作为质点,有时则应作为刚体。例如,地球半径约为 6370 km,当研究其在绕太阳公转的轨道上的运行规律时,可以看作质点,当考察其自转时,就需看作刚体,而研究地震波的传播时,就必须将其视为变形体。

(3)在建立力学模型的基础上,从基本定律出发,用数学演绎和逻辑推理的方法,得出正确的具有物理意义和实用价值的定理和结论,并应用它们指导实践,推动生产力的发展。

从实践到理论,再由理论回到实践,通过实践进一步补充和发展理论,然后再回到实践,如此循环往复,每一个循环都在原来的基础上提高一步。与所有的学科一样,理论力学也是沿着这条道路不断向前发展的。

0.3 理论力学的学习方法

在工科院校的许多专业中,理论力学是一门理论性较强的专业基础课,与工程技术的联系比较密切。但理论力学的学习有它自身的一些特点,特别是其逻辑严密,知识点多,题目变化多样,一题多解等,构成不少同学学习理论力学的障碍。所以为了更好地学习理论力学,需掌握一定的学习方法。

第一,要不断培养学习兴趣。理论力学中的很多问题都来自实践,要努力看透问题的物理实质,并将实际的问题翻译成力学问题,不断增加学习力学课程的源动力。

第二,应注意理论力学的研究方法。即对每一章讨论的问题,应搞清楚问题的含义、解决

4 理论力学

问题的思路及关键环节,将章与章之间、节与节之间的知识点系统化。对于处理各种问题的方法,例如,分析法、几何法、叠加法等,初学者应细心体会总结。

第三,对于具体的学习内容,应理解概念,记住结论,掌握方法,灵活解题。理论力学中的多数习题,应做到举一反三,触类旁通,灵活应用,一题多解,以最少的计算过程获得正确的解答,掌握各定理的适用条件及其之间的联系,培养解决问题的能力。

第四,要用系统的观点看待理论力学问题。学习理论力学,要注意系统的方法。例如,力系,物体系统等均为一个系统。一个系统应有这个系统所独有的特征及其范围。例如,一个力系有该力系的不变量;一个物体系统或一个物体的子系统,其内力和外力具有相对性;一些物理量与系统内力的无关性等等,需要在学习过程中仔细揣摩。

总之,只要学习目的明确,学习方法正确,上课认真听讲,课下及时复习,独立完成作业,坚持不懈,自强不息,就一定能学好理论力学。

第一篇

运动学

运动是指物体在空间中的位置随时间的变化,运动学则是用几何学的方法来研究物体随时间的运动。在运动学中,只分析物体的运动形态及其描述方法,而不涉及影响物体运动的受力、质量等有关物理因素或其他非物理因素。

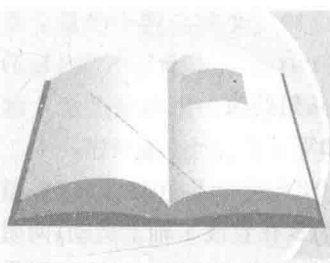
一个物体在空间中的位置和运动总是相对于别的物体的位置和运动而言,因此,在描述物体位置和运动时,必须首先选取另一个物体作为参照体或参考体,然后在参考体上建立参考坐标系。参考坐标系固连于参考体上,但可以在空间中无限延展。通常选取地球或相对于地球静止或作匀速直线运动的物体作为参考体,如地面上的建筑物、机构的支座等。

同一物体在不同的参考坐标系中会表现出不同的运动形式,这就是运动的相对性。

在运动的描述中,度量时间要涉及到“瞬时”和“时间间隔”两个概念。瞬时是指某个确定的时刻,抽象为时间坐标轴上的一个点,用 t 表示;时间间隔是指两个瞬时之间的一段时间,是时间坐标轴上的一个区间 $[t_1, t_2]$,用 Δt 表示,即 $\Delta t = t_2 - t_1$ 。

在运动学中,通常把物体抽象为点和刚体。点是指不考虑物体的大小和质量,在空间占有确定位置的几何点。刚体是指物体内任意两点间距离保持不变的无数点的集合。

学习运动学的目的,首先是为学习静力学和动力学打好基础,因为运动分析不仅是分析静力学的基础,也是动力学分析的基础,并且还往往是问题的难点和关键所在;其次,运动学在机构的运动分析等工程实际中有其独立的作用;同时,运动学知识还将为学习机械原理、结构动力学等其他相关课程奠定必要的理论基础。



第 1 章

运动学基础

1.1 约束及约束方程

当一个物体受到另一个物体的阻碍而使它的运动受到一定限制时,则说该物体受到了约束。换言之,约束就是限制物体任意运动的条件。当一个质点或质点系统中的某些质点,受到某些给定的限制条件,这些条件称为质点或质点系的约束。不受约束可以任意运动的质点系称为自由质点系,与此相反,受有约束而不能任意运动的质点系则称为非自由质点系。

确定一个质点在空间的位置需要三个独立参数,这些参数或代表长度或代表角度,统称坐标。对于由 n 个质点组成的自由质点系,则需要 $3n$ 个独立坐标,这 $3n$ 个的坐标集合称为质点系的位形。约束可以通过由坐标(位置)、坐标对时间的导数(速度)以及时间 t 之间的方程加以描述,这些方程称为约束方程。约束方程是约束的数学表达形式。

如果限制运动的条件是几何性质的,即约束方程不含速度分量,这种约束称为几何约束。如果速度也受到一定条件的限制,即约束方程包含速度分量则称为运动约束,或微分约束。

当约束方程中不显含时间时,这种约束称为定常约束;若约束方程中显含时间,这种约束则称为非定常约束。对于运动约束而言,方程中不仅含有时间与坐标,同时还含有坐标对时间的导数。

只限制质点系中各质点的几何位置,或虽能限制质点系中各质点的速度,但能积分成坐标的有限形式的约束称为完整约束。换言之,完整约束是用有限形式的方程而不是用微分方程来确定的。若运动约束允许作积分,它还是属于完整约束。完整约束是时刻 t 加在系统可能位置上的约束。约束方程总是以微分形式表示,不可能积分成有限形式的约束称为非完整约束。非完整约束是对点的速度所施加的限制。理论力学中讨论的约束几乎都是完整约束。通常将仅受到完整约束的系统,称为完整系统,而将包含非完整约束的系统称为非完整系统。

按构成约束的形式,约束可分为单面约束和双面约束。由不等式表示的约束方程称为单面约束。这种约束方程只能限制物体某些方向的运动,而不能限制相反方向的运动,而由等式表示的约束则称为双面约束。

按照上述有关约束的定义,对 n 个质点组成的系统来说,双面约束方程的一般数学形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

式中, s 为系统中的约束数目。

几何约束一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (1-2)$$

8 理论力学

定常几何约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad j=1, 2, \dots, s \quad (1-3)$$

对于静力学问题,约束不随时间而改变,其中的约束都是定常几何约束。

对 n 个质点组成的系统来说,单面约束方程的一般数学形式如下:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, s \quad (1-4)$$

如图 1.1 所示,在 Oxy 平面内,质点 A 在半径为 r 的圆周上运动, B 在直线 x 轴上运动,两质点的距离 l 保持不变(也可以将 OA 和 AB 视为杆件,两杆以 A 点相互连接,可以相互转动,但在 A 点不能相互移动,这种机构称为平面曲柄链杆机构),则该系统的约束方程为: $z_1 = 0, x_1^2 + y_1^2 = r^2, z_2 = 0, y_2 = 0, (x_1 - x_2)^2 + y_1^2 = l^2$ 。

从图 1.1 的约束方程可以看出,该系统的约束均为定常完整的双面约束,这些约束方程联系了各质点的坐标。

对于具有运动约束的系统,在约束方程式中可能还包含质点的速度。例如,如图 1.2 所示在 Oxy 平面内,摆长 l 随时间变化的单摆,就是非定常约束的一个例子。设单摆原长为 l_0 ,拉动绳子的速度 v_0 为常数,则其约束方程,除 $z=0$ 这一定常完整约束之外,还有非定常的几何约束方程: $x^2 + y^2 = (l_0 - v_0 t)^2 = l^2(t)$ 。

在单摆中,借助于不可伸长的柔索或刚杆均可使质点 M 作圆周运动,但柔索只能限制质点 M 向圆周外运动,而不能限制向内运动,约束为单面约束,其约束方程应写为

$$x^2 + y^2 \leq l^2$$

而刚杆使质点 M 只能做圆周运动,约束为双面约束,其约束方程为: $x^2 + y^2 = l^2$ 。

图 1.3 表示半径为 r 的轮子沿直线轨道作纯滚动(滚动而不滑动),轮子除了受几何约束 $y_A = r$ 外,还受到作纯滚动的运动学条件的限制,可写为: $\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$,它包含线速度与角速度的关系(在后面章节会详细说明)。该约束方程 $\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$ 是可以积分的,故虽然方程中包含速度项,但仍属完整约束。

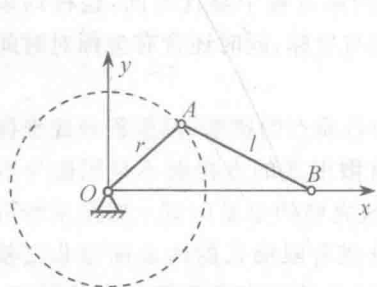


图 1.1

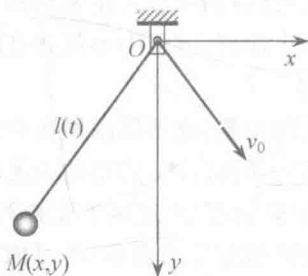


图 1.2

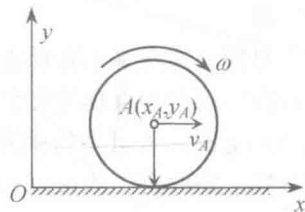


图 1.3

1.2 自由度和广义坐标

质点及质点系统的自由度与广义坐标是与系统的约束有联系的两个基本概念。首先考虑一个质点的情况。在欧氏空间中,一个自由质点可以在空间的三个独立方向任意运动,因此我们说,它具有三个自由度。在三维直角坐标系中,这个自由质点的位置还可以通过其坐标 x, y, z 用三个独立的参变量描述。对于一个受约束的质点而言,它的自由度因受到约束的限制而减少;其次,它的坐标由于必须满足一个或两个约束方程,描述其在位形空间中位置的独立