清代三角学的数理化历程

特古斯　尚利峰◎著

科学出版社

教育部博士点基金项目(20111502110001)

清代三角学的数理化历程

特古斯　尚利峰◎著

科学出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

清代三角学的数理化历程 / 特古斯，尚利峰著. —北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-042228-6

I.①清… II.①特… ②尚… III. ①三角–数学史–中国–清代 IV.①O124-092

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 244698 号

责任编辑：樊 飞 郭勇斌 高丽丽 / 责任校对：胡小洁
责任印制：赵德静 / 封面设计：铭轩堂

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 11 月第一次印刷 印张：12 1/2
字数：300 000

定价：79.00 元

序

三角学是一门历史悠久的知识领域，其早期发展与天文学密不可分，文艺复兴以后摆脱对天文学的依赖而成为一门独立的数学分支，不仅有着日益广泛的应用，并且在近现代数学的进化中扮演着重要的角色。因此，三角学的发展在任何一本数学通史中都是必不可少的篇章。

中国古代没有一般“角”的概念，因而没有西方意义上的三角学，以勾股定理为基础的测望之术扮演着异曲同工的角色。勾股测望术形成了后来中算家吸收西方三角学的认知基础，同时也成为“中学为体”的重要部分而使近代数学在中土的传播呈现曲折迂回的过程。三角学在中国的发展虽不如秦汉、魏晋和宋元时期一些巅峰的数学成就那般辉煌，但也有着不容忽视的学术意义和史学研究价值。好比一座缩微文化景观，通过三角学在中国的发展，我们可以认识中国传统数学的成就与缺失，透析中西文化传播交流的特征，从而为中国科学技术现代化提供历史借鉴。

在这方面以往已有不少探讨，但多偏重于西方三角学第一次东渐及其前中国本土的传统，总的来说尚缺乏系统梳理与综合比较。这本《清代三角学的数理化历程》，以清代三角学的演进为重点，同时也用相当的篇幅论述了古代的相关知识，实质上构成了一部三角学在中国的发展全史。两次传入的三角知识与会通结果当然是此书最精彩的部分，从独立于天文学到独立于几何学，从结果的近似性到精确性进而一般化，作者描绘了一幅三角学在中国发展历程的脉络清晰、详略有致的工笔画。

一部科学史著作的价值，不仅在于介绍一个民族或地域在历史上的科学成就，同时也在于揭示该民族或地域科学发展的弱点和障碍，此书在这方面是值

得肯定的。作者充分展示了中国古代勾股割圆术和弧矢术的成就，以及明清学者在吸收、会通西方三角学过程中表现出的智慧，同时也批判了他们在思想方法上的局限和受到的社会羁绊，分析入木，富有启益。

史学与哲学的融合，使特古斯教授的作品具有一种特殊的韵味。作者以独到的科学哲学观与方法论驾驭着丰富而又纷杂的史料，解难破疑，化朦胧为清澄，读之快哉！

特古斯的博士学位论文即以“清代级数论纲领分析”为题，获得博士学位以来,他一直坚持在明清数学史这块园地辛勤耕耘，成果累累，业已成为国内研究明清数学史的深有造诣的专家。此书是他继《清代级数论史纲》之后推出的又一部力作，可谓“更上一层楼”。我们热烈祝贺此书的成功出版，相信这将会进一步推动和深化中国近代科学文化史特别是数学史的研究。

中国科学院数学与系统科学研究院

李文林

2013年8月31日于北京中关村

目　录

引　言

明末清初，随着西学东渐，三角知识传入中国。当时历法需要改革，三角学可用于历法研究，因而得到明清学者的重视。不过，它的可靠性有待证实，因为儒者担心“暗伤王化”。由于存在中西之见，引进必须经过会通，清代三角学的结构与变迁由此限定。两次传入的三角知识大不一样，两次会通的数学结果也不一样，值得深入研究。

关于三角学的第一次传入与会通，学者已有大量研究，李俨等数学史前辈已做了奠基性的工作。李俨的文章“三角术和三角函数表的东来”探讨了三角学第一次传入的历史，他的另一篇文章“明清算家的割圆术研究”探讨了第一次数学会通的结果。通过细心的史料整理与内容分析，他为进一步研究奠定了很好的基础。在此基础上，其他学者继续探讨第一次传入的三角知识及其会通结果，研究范围逐步扩展。梅荣照的文章“王锡阐的数学著作《圜解》”分析了“圜解”的方法与结果，李迪、郭世荣的《清代著名天文数学家梅文鼎》涉及梅文鼎关于三角学的会通与结果，山田庆儿的《中国古代科学史论》涉及清代学者关于“弦矢捷法”的会通与结果，笔者的《清代级数论史纲》涉及中算家关于三角函数幂级数展开式的研究。同类研究工作目前已有不少，它们为本书提供了有用的线索。

关于三角学的第二次传入与会通，目前的研究不多，只有个别学者进行了有价值的探索。田淼的《中国数学的西化历程》包括“清代末年传入的三角学知识”，探讨了“清末数学家对三角函数概念的认识”，说明了三角比例数取代八线概念，以及符号代数取代图解方法的经过。《三角数理》是第二次传入的典型的西方三角学著作，杨楠探讨了它的译本及其影响，分析了它的内容及其传播情况。同类的研究虽然不多，但是思路新颖，值得借鉴。

至于第一次会通的传统数学基础、第二次会通的最后结果、两次会通引起的数学变化其意义究竟何在，均有待进一步探讨。这对了解清末学者的三角知识与特点，了解中国数学由传统向现代的转变，了解近代中西思想的交流，不无裨益。

本书将探讨清代三角学的数理化历程，关键是基本概念与变迁，涉及中国古代的知识传统、两次传入的三角知识与会通结果。第一次数学会通立足于一定的传统知识，清初学者认为三角学通于古法，譬如，勾股术、割圆术与弧矢术。对于它们的结构特性、发展变化及其三角学意义，以往研究有所遗漏，有待进一步探讨，由此可以说明古代的知识传统。由第一次会通引起的概念进化及其结果，以往研究

者没有特别地关注，有待进一步探讨，由此可以说明第二次西学东渐之前中算家的三角知识与特点。

第二次传入的三角知识在形式上有了较大变化，所有对象都可以符号代之，所有结果“俱能以算术核之”。关于比例数与割圆八线的区别，学者尚未展开深入分析，仍需进一步探讨，由此可以说明第二次会通工作的特点。关于数理方法与代数方法的区别，学者的研究尚未涉及，有待探讨，由此可以说明第二次会通工作的范围。数学会通方式在废除科举制度后发生了很大变化，这种变化的结果及其意义有待探讨，由此可以说明清末三角知识的结构与特点。以往学者的研究没有将三角函数与割圆八线或比例数区别开来，三角函数概念真正的建立与发展仍有待探讨，清末三角学的结构变化由此得到说明。

本书的重点是中西概念的会通与结果，涉及古代的有关知识与传统，以及两次传入的三角知识与特点。由于内容广泛，涉及大量的原始文献与研究文献，因而材料的选择与表达有难度。我们的基本原则是：不求面面俱到，只想说明基本概念与变迁。相关的文献资料，包括以往学者的研究工作，都要根据原文合理重建。选择典型的原始文献，通过内容分析，说明中西数学概念的不同特点。在此基础上，通过比较分析，说明会通前后基本概念的变化及其意义。

第一，通过分析传统勾股术、割圆术及弧矢术的结构特性与发展变化，说明有关三角学的传统知识与特点。

第二，通过分析《大测》及《测量全义》中的基本概念和方法，说明第一次传入的三角知识与特点。选择王锡阐、梅文鼎、明安图及项名达等的相关著作作为典型案例，通过分析概念和方法的变化，说明第一次会通的结果。

第三，选择《三角数理》及《代数术》等著作，通过分析有关概念和方法，说明第二次传入的三角知识及其特点。

第四，选择《割圆术辑要》及《新三角问题正解》等著作作为第二次会通的典型案例，通过分析概念和方法的变化，说明清末学者的三角知识及其特点。

第五，选择《平面三角法》等著作，通过分析三角学的结构与变迁，说明全盘西化的结果。

通过引用新材料与新方法，本书得出若干新观点：古代的弧矢概念实质上是物理的，相应的结果则是近似的。本书根据原文分析，区分物理、几何、算术与分析的概念，说明了清代三角学的结构与变迁，由此引出一些新观点。某些古法有其三角学意义，但是古代学者没有严格区分近似关系与精确关系，原因是它们未能独立于天文学。第一次数学会通使三角学独立于天文学，物理概念进化为几何概念，结果是精确关系取代了近似关系。第二次西学东渐使三角学独立于几何学，几何概

念进化为算术概念，特殊关系被一般关系所取代。三角函数概念并不是第二次会通的结果，而是全盘西化的结果，全盘西化则是第二次会通的最后结果。清末学者引进了“三角函数”，然而有名无实，全盘西化之前函数概念并未真正建立起来。科举制度废除以后三角学全盘西化，基本概念进化为三角函数，三角级数论走向现代函数论。上述观点得到了新材料的支持，如卢靖(1855~1948)的《割圆术辑要》、长泽氏的《三角法公式》及陈文的《平面三角法》，它们在这里被初次探讨。

古代的学者未能分辨物理的弧矢与几何的弧矢，由于西学东渐，弧矢概念几何化，最终实现数理化。几何化说明了清代割圆术的兴衰，物理概念几何化使清代割圆术获得空前发展，进一步几何化则使基本概念独立于割圆术，最终被欧氏几何之理取而代之。三角学的数理化包括代数化与分析化，代数化过程涉及代数之常法与纯形式定义，分析内容涉及无穷级数与正交函数。晚清学者未能分辨几何、算术与分析的概念，以为三角函数即八线。他们接受了代数之常法，但拒绝了纯形式定义，未能完成代数化。至于无穷级数与正交函数，由于未能有效地利用微积分，他们不可能实现分析化。无论如何，由于受到日本数学的影响，清末学者的平面三角学最终全盘西化。

从形式的观点看，三角学可由二项式导出，基本概念可依欧拉公式定义。晚清三角学背道而驰，数理概念几何化，西法归入割圆术。清代学者曾有机会独立完成数理化，然而古代的形式主义传统似乎被忘却了，何以至此值得深思。

第一章 古代的知识传统

清初学者认为，三角学通于古法，甚至觉得古法更为基本。由此导致了截然不同的两种结果：一些学者尝试会通中西，以便“补益王化”；另一些学者则极力维护传统，以免破坏古法固有的和谐关系。前者引进新概念、新方法，使三角学独立于天文学，最终以精确结果取代了近似结果；后者没有对近似关系与精确关系作出区分，由于受到知识传统的制约，他们拒绝了无穷的概念，因而无法使三角学独立于天文学。

第一节 有关概念

梅文鼎(1633~1721)认为，中西数学的原理是一致的，因为中西“共戴一天”。数学的天是自然的天，自然的天没有中西之别。中西相隔虽数万里，但数学原理不容不合。所以三角学通于古法，譬如，勾股术、割圆术与弧矢术。

一、勾股术

传统勾股术包括勾股算术、勾股容方与容圆、整勾股数等问题，涉及勾股恒等式、内接正方形边长、内切圆直径和不定方程的整数解，皆与不失本率原理有关。不失本率原理是算术的，由于古人将其用于解决勾股问题获得成功，后人便以为它是几何的，并举“幂图”为证。

在清代三角学概念的进化过程中，作为传统勾股术的一个典型方面，勾股算术曾经起到过特殊的作用。这不仅因为“三角即勾股之变通”，更为重要的是，中算家在古代的传统中找到了勾股算术的形式基础。人们由此感到西算没有那么危险，于是加快了三角学的形式化步伐，虽然直到20世纪以前，该进程并未真正完成。

勾股算术起源于和较相求问题，问题取决于勾股恒等式转而依赖更为基本的关系，但是长期以来被几何解释所掩盖。从形式的观点看，勾股恒等式完全取决于算术关系

$$(a+c)(b+c)=ab+(a+b)c+c^2, \tag{1}$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca, \tag{2}$$

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)。 \tag{3}$$

古代学者曾以不同的形式引用过这些结果，但是清代以前它们未能成为勾股算术

的基础，这是算术依赖于几何的结果。

根据古代的观点，(3)是由磬折形与矩形的关系所确立的：

勾实之矩以股弦差为广、股弦并为袤，而股实方其里。……股实之矩以勾弦差为广、勾弦并为袤，而勾实方其里。[1]

这里 $0<a\leqslant b<c$，因此，由勾实之矩或股实之矩表达的因式分解公式缺乏一般意义。古代学者认为“矩出于九九八十一”，勾实之矩与股实之矩也不例外，都是由乘法公式的证明生成的概念。早期中算家用到乘法公式

$$(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b), \tag{4}$$

它是由(3)所确立的，但几何解释掩盖了因式分解过程。后来，徐光启(1562~1633)给出(3)的另外一种几何解释

$$a^2=c^2-b^2=b(c-b)+c(c-b)=(c-b)(c+b),$$

其中 $0<a,\ b<c$，从而 $a,\ b$ 获得对称性。

至于(1)、(2)，它们的几何意义如此显然，以至于没人感到它们还需要证明，直到西学东渐。《九章算术》“少广”章涉及数字多项式

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{k_1+\cdots+k_n=k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},$$

其项数可以任意多，而次数不难推广到“诸乘方”。开方术是把多项式的展开作为二项式的多次展开，例如，“今有积五万五千二百二十五步，问为方几何”，答案由

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1\end{aligned}$$

确定，这与(2)完全一致。

杨辉(13世纪)的《乘除通变算宝》以数值形式给出(1)，他称之为“连身加法”。譬如，“铜二十九砣，每砣二十三斤，问重几何”，结果是

$$(9+20)(3+20)=9\times3+9\times20+20\times3+20\times20.$$

随着西学东渐，徐光启给出了(1)、(2)的一般性证明：

两和相乘为乙巳直角形，倍之为丁戊直角形。以为实平方开之，得巳庚直角方形与丁戊等，即其边为弦和和者。何也？丁戊全形内有弦幂二，股弦矩内形、勾弦矩内形、勾股矩内形各二。与巳庚全形内诸形比，各等。独丁戊形内余一弦幂，巳庚形内余一勾幂、一股幂。并二较一亦等，即巳庚方形之各边皆弦和和。[2]

也即

$$\begin{aligned}2(a+c)(b+c) &= 2[ab+(a+b)c+c^2] \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \\ &= (a+b+c)^2。\end{aligned} \tag{5}$$

古代的数值结果由此得以一般化，但仍要求$0<a,b<c$，这是由“弦和和”所限定的。c变号的结果出自“弦和较”，徐光启就此证明了(2)但没有涉及(1)。及至清初，梅文鼎给出(5)所有可能的变号结果，虽然他未就变号情形论及(1)、(2)。

由于未能摆脱几何直观，明末清初的学者不可能将(1)、(2)及(3)完全一般化。不过，通过(3)的推广使用，梅文鼎得到

$$(a+b)^2-c^2=(a+b-c)(a+b+c),$$

$$c^2-(b-a)^2=(c-b+a)(c+b-a)。$$

由古代的弦图，有

$$(a+b)^2-c^2=c^2-(b-a)^2=2ab,$$

于是

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(a+b+c) \\ &=(c-b+a)(c+b-a)=2ab。\end{aligned} \tag{6}$$

梅文鼎认为，(6)说明了勾股算术的“立法之根”，并称“其理皆具古图中”，将合理性归之于面积变换。

一个世纪后，项名达(1789~1850)在比例关系中找到了勾股算术的基础，变化是由数学会通引起的。他发现，勾股恒等式虽然可用面积关系来解释，但却并不依赖于这样的解释。对于因式分解公式，西算给出了不同的解释，(3)被归结为相似勾股形的比例关系。根据《几何原本》，在勾股形中如果由直角向弦作垂线，则与垂线相邻的两个勾股形相似，故垂线为弦上两段的比例中项。[3]这种解释后来被中算家收入《数理精蕴》，同时还收入了西算的种种“和较比例”，包括合比、分比及合分比等基本关系。很可能由此得到启发，项名达将(3)作为勾股算术的立法之根，并释之以三率连比例

$$(c-b):a=a:(c+b)。 \tag{7}$$

根据比例的性质，“凡有比例加减之，其和较亦可互相比例”。因此，由(7)可以“另生比例”导出其他勾股恒等式，而“诸术开方之所以然，遂于是得”。比例关系(7)仍出于几何的思考，勾股算术仍然需要这样一个几何基础。但是在此基础上建立的其他勾股恒等式，则为纯粹的算术关系，项名达的形式化工作已很接近现代的标准。

由于比例的解释，(3)已不再要求$a\leqslant b$，事实上它们已经具备了对称性质。然

而中算家对此缺乏明确的认识，包括项名达本人在内，他们未能充分理解它的重要意义。

随着第二次西学东渐，符号代数传入中国，为勾股算术的进一步形式化创造了有利条件。该进程至杨兆鋆(1854~?)基本完成，他给出如下运算结构作为勾股算术的基础

$$A_{i,j}A_{i+1,j+1}=A_{i,j+1}A_{i+1,j}\text{，}\ 1\leqslant i,j\leqslant 4\text{，}$$

其中

$$A_{11}=b+c\text{，}\ A_{12}=a\text{，}\ A_{i1}=A_{1i}\text{，}$$

$$A_{13}=A_{11}-A_{12}\text{，}\ A_{14}=A_{11}+A_{12}\text{。}$$

由此构造勾股和较乘法表，无需借助任何直观证据。

不难证明，它有两个重要性质

$$A_{i,j}=A_{j,i}\text{，}\ A_{i,j}A_{m,n}=A_{i,n}A_{m,j}\text{。}$$

据此“推阐尤捷”，可得“所有可能的”勾股恒等式，只需用到(1)、(2)、(3)。

二、割圆术

清初学者认为传统割圆术说明了三角学原理，因为“三角非八线不能御”，而八线出自“勾股割圆之法”。清代学者由传统割圆术发展出割圆连比例法，说明了弦矢与二项式系数的关系，虽然弦矢与二项式本身的关系没有说清楚。

二分弧法说明了传统割圆术，在《九章算术》圆田术注中，刘徽(3 世纪)给出了二分弧法：

> 假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半其数均等，合径率一而外周率三也。又按为图，以六觚之一面乘半径，因而三之得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之则得二十四觚之幂。割之弥细所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。觚面之外犹有余径，以面乘余径，则幂出弧表。若夫觚之细者与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不外出矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。[4]

他取单位圆周的 1/3“觚而裁之，每辄自倍”，并以3×2^n觚之一面c_n乘半径r，因而$3\times 2^{n-1}$之，得$3\times 2^{n+1}$觚之幂

$$s_{n+1}=3\times 2^{n-1}rc_n\text{。}$$

由于

$$s_{n+1} = \pi r^2 \ (n \to \infty),$$

而$r=1$，故当n充分大时

$$\pi \approx s_{n+1}。$$

确定s_{n+1}的关键是c_n，它与余径d_n有勾股关系

$$c_n = \sqrt{\left(\frac{c_{n-1}}{2}\right)^2 + d_{n-1}^2},$$

$$d_n = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c_n}{2}\right)^2}。$$

由此可得

$$c_{n-1}^2 = 4c_n^2 - c_n^4,$$

$$c_n^2 = 2d_{n-1},$$

$$c_{n-1} = 2c_n(1-d_n)。 \tag{8}$$

其中$c_0=\sqrt{3}$，$c_1=1$。三者并不独立，后者可依前两者而定，事实上

$$\begin{aligned} c_{n-1}^2 &= 4c_n^2 - c_n^4 = c_n^2(4-c_n^2) \\ &= c_n^2(2-c_{n+1}^2)^2 = 4c_n^2(1-d_n)^2。\end{aligned}$$

显然，正3×2^n边形的周长为

$$2\pi_n = 3\times 2^n c_n。$$

由于

$$\pi_n \to r\pi (n \to \infty),$$

当n充分大时

$$r\pi \approx \pi_n。$$

传统割圆术的目标主要是求π。由此生成的概念“觚面”与“余径”，或者“弦”与“矢”，本身并没有成为进一步研究的对象，它们的性质(8)也没有引起特别的关注。随着西学东渐，中算家由二分弧法发展出n分弧法，n分弧法说明了清代割圆术。

所谓n分弧法，根据明安图(？~1764)的说法，就是“上取隔三位者减之”。比如，“六分弧，则减二分弧者；七分弧，则减三分弧者”，也即

$$c_{n+2} = (2-c_1^2)c_n - c_{n-2}。$$

其中$c_0=0$，c_1为本弧通弦。n分弧法包含二分弧法

$$c_2 = 2c_1(1-d_1),$$

其中$2d_1 = c_{\frac{1}{2}}^2$。因此，明安图的n分弧法等价于

$$c_{n+1} = 2(1-d_1)c_n - c_{n-1}。$$

关于明安图的思路历程，陈际新(18世纪)有如下记录：

因思古法有二分弧法，西法又有三分弧法，则递分之亦必有法也。由是思之，遂得五分弧及七分弧。次列三分弧、五分弧、七分弧三数观之，见其数可依次加减而得，遂加减至九十九分弧。然其分数皆奇数也。又思之，遂得二分弧。依前法，推至四分弧、六分弧，加减至百分弧，则偶数亦备矣。然犹分而不能合也，又思之，奇偶可合矣。[5]

由此看来，他先得到"奇数"

$$c_{2k+1} = (2-c_1^2)c_{2k-1} - c_{2k-3}。$$

又思之，得"二分弧"

$$c_{2k} = 2c_k - \frac{1}{4}c_k^3 - \frac{1}{4\cdot 16}c_k^5 - \cdots。$$

于是"依前法"，得到"偶数"

$$c_{2k+2} = (2-c_1^2)c_{2k} - c_{2k-2}。$$

又思之，发现"奇偶可合"，得到前述结果。

不难看出，"奇数"决定本弧通弦的多项式，"偶数"决定幂级数。这是因为"偶数"有赖于"二分弧"，它无法表示为本弧通弦的有限形式。它也不能由n分弧法本身确定，对此，我们将在后续章节继续讨论。

董祐诚(1791~1823)的n分弧法止得明安图的"奇数"，但是改进了方法，简化了证明。他引进递加法[6]

$$D_{n-1} + D_{n+1} = \begin{cases} c_n, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ 2d_n, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

其中$D_0 = D_1 = 0$，而

$$D_{n+1} = \begin{cases} (1-D_n)c_1 + D_{n-1}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ D_n c_1 + D_{n-1}, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

因此，董祐诚的n分弧法可归结为

$$2D_{n\pm1} = \begin{cases} c_n \pm (1-D_n)c_1, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ 2d_n \pm D_n c_1, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

项名达推广了董祐诚的递加法，给出[7]

$$X_{n+1}(l)+X_{n-1}(l)=\begin{cases}c_m, & 若|n|不为奇数,\\ 2(1-d_m), & 若|n|为奇数,\end{cases}$$

$$X_{n+1}(l)=(-1)^n X_n(l)c_1+X_{n-1}(l)。$$

这里 n 为任意整数，而

$$m=2l+n-1,$$

l 为不大于 1 的正有理数。$X_n(l)$ 的初值与 l 的取值有关，并且

$$X_0(1-l)=X_0(l)。$$

项名达的 n 分弧法等价于

$$2X_{n\pm1}(l)=\begin{cases}c_m\pm X_n(l)c_1, & 若|n|不为奇数,\\ 2(1-d_m)\mp X_n(l)c_1, & 若|n|为奇数。\end{cases}$$

令 $m=1$ 可以得到二分弧法，清代割圆术与传统割圆术的关系由此得到说明。

三、弧矢术

弧矢术可用于历法研究，可以提高历法的精度，因而得到古代学者的重视。《授时历》是中国古代最为成功的历法之一，这与它应用“会圆术”有关。沈括(1030~1094)的会圆术也许是中算史上最早的弧长公式，人们还不清楚它的立术依据。以下分析表明，它能建基于刘徽的割圆术。

刘徽将其二分弧法应用于弓形，得出弧田新术，说明了旧术的局限。在不大于半周的任一弧上，他“觚而裁之，每辄自倍”，得到弓形面积近似序列

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}2^{k-1}c_{k+1}d_{k+1}。$$

由二分弧法

$$rc_{n-1}=2c_n(r-d_n),$$

有

$$2c_kd_k=r(2c_k-c_{k-1}),$$

因此

$$s_n=2^{n-1}rc_{n+1}-\frac{1}{2}c_1(r-d_1)。$$

但

$$2^nc_{n+1}\to l(n\to\infty),$$

即