小波分析基本理论

丁宣浩 编著

中国科学技术出版社

重庆工商大学学术著作出版基金资助

小波分析基本理论

于宣浩 编著

中国科学技术出版社
· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

小波分析基本理论/丁宣浩编著.—北京：中国科学技术出版社，2007.8

(学科建设)

ISBN 978-7-5046-4776-4

Ⅰ.小… Ⅱ.丁… Ⅲ.小波分析-理论-研究
Ⅳ.G642.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 129645 号

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010-62103210　传真：010-62183872
科学普及出版社发行部发行　新千年印制有限公司印刷
*
开本：889 毫米×1194 毫米　1/32　印张：10　字数：250 千字
2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
册数：1—1000 册　定价：25.00 元
ISBN 978-7-5046-4776-4/G・459

内容简介

本书可作为工科硕士研究生以及需要系统了解小波分析的基本理论的工程师的基础读物。其主要内容包括必要的泛函分析基础如序列空间 l^p 与函数空间 $L^p(E)$ 理论;傅立叶级数与傅立叶变换理论;窗口傅立叶变换理论;在此基础上建立小波分析的理论。先引入连续小波变换、二进小波、正交小波、半正交小波、R－小波的概念，然后引入多分辨分析的概念，系统地介绍构造多分辨分析、构造各类基小波的理论和方法，介绍将函数通过多分辨分析进行分解和重构的Mallat金字塔算法，以及向高维小波与小波包的推广，介绍小波应用的一些基本思想方法。最后介绍第二代小波，即基于提升格式的小波的知识作为拓广。

本书线条清楚，逻辑严密，自成体系，每章后面都配备关键词，便于掌握每章基本内容。

前　　言

小波分析自20世纪80年代初诞生以来，虽然只有短短的20多年时间，但已经广泛地应用到科学技术的许多领域，如数学领域的数值计算、微分方程求解、概率统计、函数空间刻划等；信号处理中的信号检测、目标识别、以及信号消噪等；图像处理中的数据压缩、去噪、数字水印、指纹鉴别、动态目标跟踪等；通信中的自适应均衡、扩频通信和分形调制等。广泛应用于语音信号、雷达信号、医学信号、天文信号、地震信号、机械故障信号等的分析与处理。小波分析是许多专业，如数学、物理、化学、生物、电子信息类、机械工程类、自动控制类等专业必须了解的知识。

作者多年来在桂林电子科技大学为工科许多专业及数学各类专业开设共同的小波分析，是把小波分析作为这些专业的共同基础来讲授的，不深入展开专业性很强的应用，只注重系统的介绍小波分析基本理论和基本方法，为学生在今后各自专业中的应用打下一定的基础。

目前，国内外出版的小波分析著作或教材，大多专业性较强，大多趋向于小波分析的应用。许多著作为了强调应用，还专门避开小波分析的许多理论分析和推导。而许多小波分析理论专著，往往需要读者有较好的数学基础。能否编辑一本既可以使学生系统地了解小波分析的基本理论和基本方法，同时又符合工科硕士研究生的基础知识水平，并且使学生通过学习该课程还能提高自己的数学思维能力的书呢？就是为了这个宗旨，作者特根据自己多年的讲义和一些研究心得编辑成本书。

小波分析来源于信号分析，是 Fourier 分析划时代的发展结

果，是数学家与工程师共同创造的结果。小波分析本质上是一种新的分解函数的方法。

将许多复杂的函数由固定的若干性质简单且良好的函数表示出来，这在数学中有许多例子。如函数的泰勒级数展开：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

右边级数中的运算只涉及加减乘除四则运算，这为计算复杂函数 $f(x)$ 的值提供了方便。

一个复杂的以 2π 为周期的函数可以展开成傅立叶级数：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\text{int}}$$

原子基函数 $\omega(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ 是一个“正弦波”，它是生成所有的以 2π 为周期的在区间 $[0,2\pi]$ 上平方可积函数的一个单独函数。对于具有大的绝对值的整数 n, $\omega_n(t)=\omega(nt)=e^{\text{int}}=\cos nt+i\sin nt$ 有高的频率，其角频率为 n。所以区间 $[0,2\pi]$ 平方可积函数是由具有各种频率的“正弦波”组成。这种分解如果仅从数学里面去看，只不过是同一个函数的两种表示形式。但在信息工程中，这却为分解信号提供了一个很好的理论依据。正如要设计机械装置，必须分析机械的受力情况，要对力进行分解一样，在信号分析和处理中，也要对信号进行分解。我们都知道，日光是由赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色的光合成的，这七种光分别是具有不同频率的电磁波。要提取某种单色波，就必须对光信号进行分解。语音信号也是由不同频率的声波合成的。将语音信号分解为不同频率的波，一般低频部分是有用信号，而高频部分却可能是噪声。

什么是“小波”？顾名思义，“小波”就是小的波形。所谓“小”是指它具有衰减性；而称之为“波”则是指它的波动性，即其振幅呈正负相间的震荡形式。

设 $\psi(x)$ 是一个小波，令 $\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-k)$，那么任

一个在$(-\infty,\infty)$上平方可积的函数可以表示成：

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

关键是，与傅立叶分析一样，我们将信号分解为不同频带的分量之和。上式中的$c_{j,k}$就是第j个频带，第k段时间范围内的信息。这为分析和处理非周期信号提供了一个分解信号的新工具。

人们往往认为数学很抽象，往往脱离现实世界。但上面的例子却正如数学大师陈省生所说，数学使科学简单化。数学为处理复杂事物，提供了非常好的工具。

有人说小波分析是信号处理的工具，有人说小波分析是一种新的数值计算的方法，那么小波分析的基础是什么？我认为，小波分析是在傅立叶分析基础上发展起来的，小波分析研究的基本对象是L^p空间与l^p空间的对象，按照算子理论的观点，小波变换不过是一种特殊的线性算子。因此，学习小波理论，必须以泛函分析为基础。因此，本书第一章就引入了泛函分析的基本知识，赋范线性空间、内积空间，具体细致的讨论L^p空间与l^p空间。框架、黎斯基、正交基的概念贯串始终。本书在傅立叶分析，多分辨分析理论，由尺度函数构造小波的理论，双正交小波理论等方面有许多自己的研究心得。虽然读这本书对于工科的研究生还是有一定的困难，但是我相信，只要认真地读下去，是可以克服这些困难的，对小波分析的基本理论一定有一个比较系统的了解，而且还能提高自己理解数学思想方法的能力。

参考网站：

1.http://www.amara.com/current/wavelet.html

2.http://www.mathsoft.com/wavelets.html

目 录

第一章 l^p 与$L^p(E)$空间

小波分析研究的主要对象是序列空间 l^p 和可积函数空间 $L^p(E)$，因此这一章我们首先介绍这两种空间。而这两种空间不过是常用抽象空间的特殊例子，因此我们有必要先引入一些抽象空间的概念。

第一节 常用抽象空间的定义

什么是空间？所谓的空间，不过是一个集合加上一些运算法则，也就是该空间元素共同遵守的法则。不同的要求，就得到不同的空间。设 R 是实数域，C 是复数域，K 表示 R 或 C。

定义 1 （距离空间）设 X 为一非空集合，如果对于 X 中的任何两个元素 x, y，均有一个确定的实数 $\rho(x, y)$ 与之对应且满足下面的三个距离公理：

（1）非负性：$\rho(x, y) \geqslant 0$，且 $\rho(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$；

（2）对称性：$\rho(x, y) = \rho(y, x)$；

（3）三角不等式：$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$，这里 z 也是 X 中任意一个元素，则称 ρ 是 X 上的一个距离，而称 X 是以 ρ 为距离的距离空间。

例 1 设 X 为一非空集合，对于 X 中的任何两个元素 x,y，定义

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

容易验证$\rho(x,y)$是X上的一个距离，称X按上述距离为离散距离空间。

又定义$\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$，则容易验证$\rho_1(x,y)$也是$X$上的距离。

这个例子说明，任何一个非空集合，都可以成为距离空间，而且同一个集合可以在其上定义不同的距离，使其成为不同的距离空间。

定义 2（赋范线性空间） 设K是实数域或复数域，X是K上的线性空间，如果对于X中每个元素x，都有一实数$\|x\|$与之对应，它满足范数的三条公理：

（1）$\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0$的充分必要条件是$x=0$；

（2）$\forall\alpha\in K$，$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；

（3）$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称X为实或复赋范线性空间，称$\|x\|$为x的范数。

注：（1）设X为赋范线性空间，定义$\rho(x,y)=\|x-y\|$，容易验证ρ是X上的距离，故赋范线性空间按照这个距离也是距离空间。通常我们说赋范线性空间是距离空间，就是指这个距离如前所述是由范数产生的距离。

（2）设X为赋范线性空间，称$B=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$为$X$的单位球，容易证明$B$是凸集，即任意$x,y\in B$，可推出对任意数$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0,\alpha+\beta=1$，有$\alpha x+\beta y\in B$。

一般的距离空间的单位球不一定是凸集。

定义 3 设X为实或复赋范线性空间，点列$\{x_n\}\subset X$，如果存在$x\in X$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，则称点列$\{x_n\}$依范数收敛于$x$。

如果对任给的正数ε，总存在自然数N，当$n,m>N$时有$\|x_n-x_m\|<\varepsilon$，则称点列$\{x_n\}$为柯西（Cauchy）点列。

如果 X 中任何柯西点列都收敛于 X 中的点，则称 X 为完备的赋范线性空间，又称为 Banach 空间。

定义 4（内积空间）设 X 为实或复的线性空间，如果 X 内任意一对元素 x, y 都对应 K 中一个数，记为 (x, y) 或 $\langle x, y\rangle$，它满足内积的四条公理：

（1）$(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$；

（2）$(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$；

（3）$(x, y)=\overline{(y, x)}$；

（4）$(x, x)\geqslant 0$，且 $(x, x)=0$ 的充分必要条件是 $x=0$。

则称 X 为实或复内积空间，简称内积空间，(x, y) 称为元素 x 与 y 的内积。

注：设 X 为实或复内积空间，定义 $\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$，可以验证这是一个范数，故内积空间也是赋范线性空间。如果内积空间按照这个范数是完备的，则称其为 Hilbert 空间。

定义 5 设 H 是一个 Hilbert 空间。

（1） 设 $x, y\in H$，若 内积 $\langle x, y\rangle=0$，则说 x 与 y 正交，记作 $x\perp y$。

（2） 设 $\{x_i : i\in I\}\subset H$。若当 $i\neq j$ 时 $x_i\perp x_j$，则称 $\{x_i\}$ 为正交系。若 $\{x_i\}$ 为正交系且 $\|x_i\|=1$，则称 $\{x_i\}$ 为标准正交系。

（3） 设 $A, B\subseteq H$。约定 $A\perp B$ 当且仅当 $\forall a\in A, \forall b\in B$ 有 $a\perp b$，此时称 A 与 B 互相正交；$x\perp A$ 当且仅当 $\forall a\in A$ 有 $x\perp a$；记 $A^{\perp}=\{x\in H : x\perp A\}$，称作 A 的正交补。

定理 1 （勾股定理的推广）若 $\{x_i\}$ 为有限的正交系，则

$$\left\|\sum_i x_i\right\|^2=\sum_i\|x_i\|^2。$$

证明： $\left\|\sum_i x_i\right\|^2=\left\langle\sum_i x_i,\sum_i x_i\right\rangle=\sum_i\sum_j\left\langle x_i,x_j\right\rangle=\sum_i\|x_i\|^2$ 。

定理 2 设$\{e_i:i\in N\}$是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系，则以下条件是等价的：

（1）$\{e_i\}$ 是 H 的标准正交基，即任意 $x\in H$ 可以展开为级数

$$x=\sum_i\langle x,e_i\rangle e_i$$

上面等式的意思是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^n\langle x,e_i\rangle e_i-x\right\|=0$ ；

（2）$\{e_i\}$ 是 H 的基本集，即$\{e_i\}$的线性组合的全体 $span\{e_i\}=\left\{\sum_i c_ie_i\right\}$ 在 H 中稠密；

（3）$\{e_i\}$是完全正交系，即若 $x\perp\{e_i\}$，则 $x=0$；

（4）对任给 $x\in H$ ，成立 Parseval 等式：

$$\|x\|^2=\sum_i|\langle x,e_i\rangle|^2；$$

（5）对任给 $x,y\in H$ ，成立内积公式：

$$\langle x,y\rangle=\sum_i\langle x,e_i\rangle\langle e_i,y\rangle。$$

证明：为方便起见，设 $a_i=\langle x,e_i\rangle$。

显然（1）$\Rightarrow$(2)。

（2）$\Rightarrow$(3)。设条件（2）满足，$x\perp e_i,\forall i$ ，取序列 $\{x_n\}\subseteq span\{e_i\}$，使得 $x_n\to x$ 。由于 x_n 是 e_i 的线性组合，因此，$x\perp x_n$ ，从而 $\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle x,x_n\rangle=0$ ，即 $x=0$ 。

（3）$\Rightarrow$(1)。设条件（3）满足。取定 $x\in H$ ，令 $s_n=\sum_{i=1}^n a_ie_i$ ，只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\|s_n-x\|=0$ 。直接计算

$\langle s_n, s_n - x\rangle = \langle s_n, s_n\rangle - \langle s_n, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle = 0$，因此 $s_n \perp s_n - x$。于是由勾股定理，

$\|x\|^2 = \|(x-s_n)+s_n\|^2 = \|x-s_n\|^2 + \|s_n\|^2 \geqslant \|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$。

可见级数 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2$ 收敛。而 $\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n}|a_i|^2$，因此 $\{s_n\}$ 是柯西列。于是存在 $y\in H$ 使 $\lim_{n\to\infty}\|s_n - y\| = 0$，即 $y = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$。

计算得 $\langle y-x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, e_j\rangle e_j, e_i\right\rangle - \langle x, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$，由条件（3）知 $y - x = 0$，即 $x = y = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$，$\{e_i\}$ 是 H 的标准正交基。

（1）$\Leftrightarrow$ (4)。如果条件（1）满足，则对任意 $x\in H$，$\lim_{n\to\infty}\|s_n - x\| = 0$。从而由 $\|s_n\| - \|x\| \le \|s_n - x\|$ 推出 $\|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2 \to \|x\|^2$，即 $(1) \Rightarrow (4)$。

反之，如果条件（4）满足，则

$$
\begin{aligned}
\|s_n - x\|^2 &= \langle s_n - x, s_n - x\rangle = \|s_n\|^2 - \langle s_n, x\rangle - \langle x, s_n\rangle + \|x\|^2 \\
&= \|s_n\|^2 - \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, x\right\rangle - \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\rangle + \|x\|^2 \\
&= \|s_n\|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i\langle e_i, x\rangle - \sum \overline{a}_i\langle x, e_i\rangle + \|x\|^2 \\
&= \|s_n\|^2 - \|s_n\|^2 - \|s_n\|^2 + \|x\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n\|^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

即 $(4) \Rightarrow (1)$。

又容易推出 $(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4)$，故定理得证。

定义 6 设 $\{e_i : i\in N\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交基，对 $x\in H$，称数列 $\{\alpha_i = \langle x, e_i\rangle : i\in N\}$ 为 x 关于基 $\{e_i\}$ 的广义 Fourier

系数，级数 $x=\sum_i \langle x,e_i\rangle e_i$ 称作 x 关于基 $\{e_i\}$ 的广义 Fourier 级数。

定理 3 （正交分解定理）设 A 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间，则有正交和分解：

$$H = A \oplus A^{\perp},$$

即任意 $x\in H$ 可唯一地分解为

$$x = x_1 + x_2,$$

其中 $x_1 \in A$，$x_2 \in A^{\perp}$。

证明：对 $x\in H$，设 $d(x,A)=\inf\{\|x-a\|:a\in A\}$，则存在点列 $\{\alpha_n\}\subset A$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\alpha_n\|=d(x,A)$，容易计算

$$\|\alpha_n-\alpha_m\|^2=\|(\alpha_n-x)-(\alpha_m-x)\|^2=2(\|\alpha_n-x\|^2+\|\alpha_m-x\|^2)-\|(\alpha_n-x)+(\alpha_m-x)\|^2$$

$$=2(\|\alpha_n-x\|^2+\|\alpha_m-x\|^2)-4\left\|\frac{\alpha_n+\alpha_m}{2}-x\right\|^2$$

$$\leqslant 2(\|\alpha_n-x\|^2+\|\alpha_m-x\|^2)-4d(x,A)\to 0 \text{（当 } n,m\to\infty\text{）。}$$

这样 $\{\alpha_n\}$ 是柯西列。由于 H 是完备的，A 是闭的，因此存在 $\alpha\in A$ 使得 $\lim\|\alpha_n-\alpha\|=0$。从而 $d(x,A)\leqslant\|x-\alpha\|\leqslant\|x-\alpha_n\|+\|\alpha_n-\alpha\|\to d(x,A)(n\to\infty)$，故 $\|x-\alpha\|=d(x,A)$。

令 $\beta=x-\alpha$，对任意 $y\in A$，$\forall\lambda\in C$，有

$$d(x,A)^2\leqslant\|x-(\alpha+\lambda y)\|^2=\|\beta-\lambda y\|^2=\|\beta\|^2-\lambda\langle y,\beta\rangle-\overline{\lambda}\langle\beta,y\rangle+|\lambda|^2\|y\|^2$$

$$=d(x,A)^2-\lambda\langle y,\beta\rangle-\overline{\lambda}\langle\beta,y\rangle+|\lambda|^2\|y\|^2$$

于是

$$\lambda\langle y,\beta\rangle+\overline{\lambda}\langle\beta,y\rangle-|\lambda|^2\|y\|^2\leqslant 0,$$

取 $\lambda=\frac{\langle\beta,y\rangle}{\|y\|^2}$代入上式，得$\left|\langle\beta,y\rangle\right|^2\leqslant 0$，故$\langle\beta,y\rangle=0$，从而 $\beta\perp A$。

于是 $x=\alpha+\beta$，这蕴涵 $H=A+A^{\perp}$。由于$A\cap A^{\perp}=\{0\}$且 $A\perp A^{\perp}$，故

$$H=A\oplus A^{\perp}。$$

证毕。

定义 7 设A是 Hilbert 空间H的闭子空间，对任意$x\in H$有唯一地分解

$$x=x_1+x_2,$$

其中 $x_1\in A$，$x_2\in A^{\perp}$。定义从H到A到映射$P_A:H\to A$使得$P_Ax=x_1$，称P_A为H到A上的正交投影算子，简称投影算子。

容易证明投影算子具有如下的性质：

（1）任意$x\in A$，$P_Ax=x$，P_A的值域 $ranP_A=P_AH=\{P_Ax:x\in H\}=A$；

（2）$\forall x\in A^{\perp},P_Ax=0$，$P_A$的核或零空间 $KerP_A=\{x\in H:P_Ax=0\}=A^{\perp}$；

（3）$P_A^{\ 2}=P_A$，任意$x,y\in H$，有$\langle P_Ax,y\rangle=\langle x,P_Ay\rangle$；

（4）$1-P_A$ 是H到$A^{\perp}$上的正交投影算子。

（5）$\forall x\in H$有$\|P_Ax\|\leqslant\|x\|$。

（6）设$A=span\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是标准正交系，则对任意$x\in H$有

$$P_Ax=\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i \text{ 且对任意复数 } a_i \text{ 成立 } \|x-P_Ax\|\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right\|,$$

称P_Ax为x在A中的最佳逼近元。

定义 8 设X是数域K上的线性空间，M,N是X的线性子空