



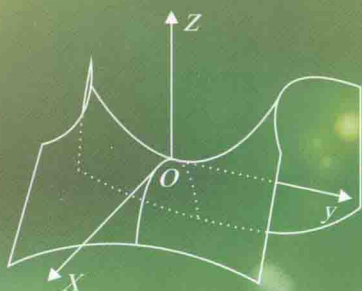
高等学校“十二五”规划教材



高等数学

下 册

主编 王树勋 曹吉利



西北工业大学出版社

高等学校“十二五”规划教材

高等数学

下 册

主 编 王树勋 曹吉利

副主编 田 壤 杨立夫

编 者 王树勋 曹吉利 田 壤 杨立夫

李 哲 高 云 苏晓海 刘莉君

田京京

主 审 张文鹏



西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的. 全书分为上、下两册, 共十一章. 上册内容包括: 函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与数学建模初步; 下册内容包括: 向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、最优化方法初步和变分法简介.

本书既可作为高等学校理工科本科生各专业的高等数学课程教材, 也可供工程技术人员、教师、其他专业的学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王树勋, 曹吉利主编. —西安: 西北工业大学出版社, 2012. 8

ISBN 978-7-5612-3422-8

I. ①高… II. ①王… ②曹… III. ①高等数学—高等学校—教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 195353 号

出版发行: 西北工业大学出版社

通讯地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编: 710072

电 话: (029) 88493844 88491757

网 址: www.nwpup.com

印 刷 者: 陕西向阳印务有限公司

开 本: 727 mm×960mm 1/16

印 张: 40

字 数: 740 千字

版 次: 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 56.00 元(上、下册)

前 言

随着科学技术的发展与进步,数学和其他学科一样,都面临着教学思想的转变及内容体系的更新,浓缩经典内容,渗透现代数学思想、方法,将单纯的知识传授变为知识传授与素质教育相结合,是摆在我们面前亟待解决的重大课题.根据“教育部非数学类数学基础课程教学基本要求和高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革精神”,我们结合多年教学改革工作的体会和经验,在充分研讨的基础上,编写了本教材,并力求体现下述特点.

(1)浓缩经典极限理论,淡化运算技巧,突出极限思想,以够用为原则.

(2)从实例出发引入导数的概念,突出导数概念的背景,加强变化率问题,强调导数与微分的关系,突出微分的应用.

(3)中值定理的证明采用几何直观与代数分析证法,突出证明思想,注重定理的应用.

(4)对于弧微分采用了直观图形与夹逼准则相结合的新的处理方法,避免了传统教材中的某些不足.

(5)在积分学中,突出求原函数的方法及牛顿-莱布尼兹公式,淡化积分计算技巧,加强积分学在实际中的应用.对于重积分采用行列式统一处理积分元素,在曲线积分与曲面积分中引入向量形式,使得概念清晰,计算简捷,两类线、面积分之间的联系直观明了,高斯公式、斯托克斯公式的证明较为简便.

(6)对于微分方程、空间解析几何、多元函数微分学及无穷级数,均不同程度地吸收了教学研究的成果,并结合微分方程介绍数学建模的基本方法,培养学生的创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

(7)介绍了一些现代数学方法,如最优化方法及工程中常用的变分法等内容.

(8)为了控制学时数,书中部分章节加有“*”号,其内容老师可根据实际学时数选讲或供学生自学.

全书由王树勋、曹吉利拟订编写大纲及编写规划,并担任主编.王树勋编写了第一、六章并绘制了全书插图,曹吉利编写了第三、五、八章,田壤编写了第二

章,杨立夫编写了第七章,田京京编写了第九章及下册的习题与答案,李哲、高云、苏晓海、刘莉君等编写了第四、十、十一章及上册的习题与答案.全书由王树勋、曹吉利、田壤负责统稿.

本书自2000年开始筹划,并专门成立了教改小组,参阅了国内外大量改革教材及教改成果,在总结多年教学经验的基础上,初稿编写成讲义,经过连续多年使用、修改、充实,今正式出版与读者见面.本书在编写过程中得到陕西理工学院领导和同志们的大力支持.西北工业大学聂铁军教授、叶正麟教授给本书提出了宝贵的意见.西北大学张文鹏教授在百忙中审阅了全书.在此对各位领导、专家及同志们表示衷心的感谢.

由于水平有限,书中不足和考虑不周之处在所难免,恳请专家、同行和读者批评指正.

编 者

2012年7月

目 录

下册

第五章 向量代数与空间解析几何	(1)
第一节 空间直角坐标系.....	(1)
一、空间直角坐标系(1) 二、空间两点间的距离(2) 习题5-1(3)	
第二节 向量及其线性运算.....	(4)
一、向量的概念(4) 二、向量的线性运算(加法、数乘向量)(4) 三、向量的坐标表示(6) 四、向量的模与方向余弦的坐标表示式(8) 习题5-2(9)	
第三节 数量积 向量积 * 混合积	(10)
一、两向量的数量积(10) 二、两向量的向量积(13) * 三、向量的混合积(15) 习题5-3(17)	
第四节 平面及其方程	(18)
一、平面的点法式方程(18) 二、平面的一般式方程(19) 三、两平面的夹角(21) 四、点到平面的距离(22) 习题5-4(23)	
第五节 空间直线及其方程	(24)
一、空间直线的对称式方程与参数式方程(24) 二、空间直线的一般式方程(25) 三、两直线的夹角(26) 四、直线与平面的夹角(27) 习题5-5(29)	
第六节 二次曲面及其方程	(31)
一、曲面方程的概念(31) 二、旋转曲面(32) 三、柱面(34) 习题5-6(35)	
第七节 常见的二次曲面及其方程	(36)
一、椭球面(36) 二、抛物面(37) 三、双曲面(39) 习题5-7(39)	
第八节 空间曲线及其方程	(40)
一、空间曲线的一般方程(40) 二、空间曲线的参数方程(42) 三、空间曲线在坐标面上的投影(42) 习题5-8(44)	
第五章总习题	(45)
第六章 多元函数微分学	(47)
第一节 多元函数的基本概念	(47)
一、预备知识(47) 二、多元函数(49) 三、多元函数的极限(50) 四、多元函数的连续性(53) 习题6-1(55)	
第二节 偏导数	(57)
一、偏导数(57) 二、二元函数偏导数的几何意义(59) 三、高阶偏导数(59) 习题6-2(61)	

第三节 全微分及其应用	(62)
一、全微分的概念(62) 二、全微分与偏导数的关系(63) * 三、全微分在近似 计算及误差估计中的应用(66) 习题 6-3(67)	
第四节 多元复合函数的微分法	(68)
一、复合函数的一阶偏导数、全导数(68) 二、多元复合函数的高阶偏导数(71) 三、全微分的运算性质及全微分的形式不变性(73) 习题 6-4(74)	
第五节 方向导数与梯度	(75)
一、方向导数(75) 二、梯度(77) 习题 6-5(80)	
第六节 隐函数及其微分法	(80)
一、一个方程的情形(81) 二、方程组的情形(83) 习题 6-6(85)	
第七节 微分法在几何上的应用	(86)
一、空间曲线的切线及法平面(86) 二、曲面的切平面及法线(88) 习题 6-7 (91)	
第八节 多元函数的极值及其求法	(91)
一、多元函数极值的概念(91) 二、极值的必要条件及充分条件(92) 三、条件 极值(96) 习题 6-8(100)	
第六章总习题	(100)
第七章 重积分	(102)
第一节 重积分的概念及性质	(102)
一、实例(102) 二、重积分的概念(104) 三、重积分的性质(105) 习题 7-1 (109)	
第二节 二重积分的计算	(110)
一、直角坐标系下的计算(111) 二、二重积分的换元法与极坐标系下二重积分 的计算(116) 三、用二重积分计算曲面面积(121) 习题 7-2(124)	
第三节 三重积分的计算	(126)
一、直角坐标系下三重积分的计算(126) 二、三重积分的换元法及柱面、球面坐 标系下的计算方法(130) 习题 7-3(134)	
第四节 重积分的应用	(136)
一、非均匀几何形体的静力矩及质心(136) 二、转动惯量(138) 三、引力与液 体压力(140) 习题 7-4(141)	
第七章总习题	(142)
第八章 曲线积分与曲面积分	(145)
第一节 对弧长的曲线积分	(145)
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(145) 二、对弧长的曲线积分的计算(147) 三、对弧长的曲线积分的应用举例(150) 习题 8-1(152)	
第二节 对坐标的曲线积分	(153)
一、对坐标的曲线积分的概念与性质(153) 二、对坐标的曲线积分的计算(155)	

三、两类曲线积分之间的联系(159)	习题 8-2(160)	
第三节 格林(Green)公式及其应用		(161)
一、格林公式(161)	二、平面上曲线积分与路径无关的条件(166)	三、二元函数的全微分求积(170)
	* 四、全微分方程(174)	习题 8-3(176)
第四节 对面积的曲面积分		(177)
一、对面积的曲面积分的概念与性质(177)	二、对面积的曲面积分的计算(179)	
	习题 8-4(183)	
第五节 对坐标的曲面积分		(184)
一、对坐标的曲面积分的概念与性质(184)	二、对坐标的曲面积分的计算(186)	
	三、两类曲面积分之间的联系(190)	习题 8-5(192)
第六节 高斯公式 * 通量与散度		(193)
一、高斯公式(193)	* 二、通量与散度(197)	习题 8-6(199)
第七节 斯托克斯公式 * 环流量与旋度		(200)
一、斯托克斯公式(200)	* 二、空间曲线积分与路径无关的条件(204)	* 三、环流量与旋度(205)
	* 四、高斯公式与斯托克斯公式的向量形式(206)	习题 8-7(207)
第八章总习题		(208)
第九章 无穷级数		(211)
第一节 常数项级数的概念及性质		(211)
一、常数项级数的概念(211)	二、收敛级数的基本性质(215)	习题 9-1(218)
第二节 常数项级数的审敛法		(218)
一、正项级数的审敛法(219)	二、交错级数及其审敛法(228)	三、任意项级数(230)
	习题 9-2(232)	
第三节 幂级数		(235)
一、函数项级数的基本概念(235)	二、幂级数及其收敛域(236)	三、幂级数的四则运算及分析运算性质(240)
	习题 9-3(243)	
第四节 函数展开成幂级数		(244)
一、泰勒级数(245)	二、函数展开成幂级数(246)	习题 9-4(251)
第五节 幂级数的应用		(252)
一、函数的多项式逼近(252)	二、近似计算(253)	* 三、欧拉公式(256)
	* 四、微分方程的幂级数解法(256)	习题 9-5(258)
第六节 周期函数的傅里叶级数		(258)
一、三角级数、三角函数系的正交性(258)	二、以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数(260)	三、以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数(265)
	* 四、傅里叶级数的复数形式(266)	习题 9-6(268)
第七节 非周期函数的傅里叶级数展开问题		(269)
一、定义在区间 $[-l, l]$ 上的函数展开成傅里叶级数的方法(269)	二、定义在区	

间 $[0, l]$ 上的函数展开成正弦级数或余弦级数(271)	* 三、定义在区间 $[a, b]$
上的函数展开成傅里叶级数的方法(273)	习题 9-7(274)
第九章 总习题	(275)
* 第十章 最优化方法初步	(278)
第一节 学科简介	(278)
第二节 二维最优化问题的图解法	(280)
一、线性最优化问题(280)	二、非线性最优化问题(281)
第三节 对偶方法	(283)
一、对偶问题的提出(283)	二、对偶性原则(284)
第四节 松弛变量法	(285)
第五节 惩罚函数法	(287)
一、外部惩罚函数法(287)	二、内部惩罚函数法(290)
* 第十一章 变分法简介	(292)
第一节 变分法的基本概念	(292)
一、引例(292)	二、变分法的基本概念(294)
第二节 泛函 $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 的变分问题	(296)
一、泛函 $J[y(x)]$ 取得极值的必要条件(296)	二、几种简单泛函极值的求解
(299)	三、可动边界的变分问题(301)
第三节 多个函数的变分问题	(303)
第四节 多元函数的变分问题	(305)
第五节 条件极值	(307)
附录	(312)
附录 I 二、三阶行列式	(312)
附录 II 部分习题答案或提示	(313)
参考文献	(331)

第五章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应,将平面上的图形和方程相对应,从而用代数方法研究几何问题.空间解析几何也是如此.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上,用代数方法讨论空间的几何图形.本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作 3 条两两垂直的数轴,它们都以定点 O 为原点,且一般取相同的长度单位,这 3 条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴).它们的正向符合右手系(当右手的 4 个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向).通常将 x 轴、 y 轴放置在水平面上, z 轴为铅垂线,符合右手系,这样 3 条坐标轴就组成了空间直角坐标系(见图 5-1),点 O 称为坐标原点.每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是 xOy 面、 yOz 面、 zOx 面.3 个坐标面把空间分成 8 个部分,称为 8 个卦限.并逐个编号为 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII,分别称为第一卦限,第二卦限, ..., 第八卦限(见图 5-2).

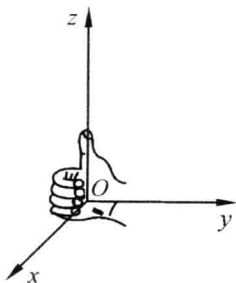


图 5-1

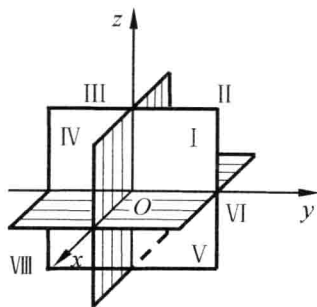


图 5-2

常采用的坐标系表示法有斜二侧(图 5-1)及正等侧(见图 5-3).

设 M 为空间的一点(见图 5-4),过点 M 分别作 3 个与坐标轴垂直的平面,它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R , 其坐标依次为 x, y, z , 从而得到一个有序数组 (x, y, z) ; 反之, 给定一有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别作 $\overline{OP}=x, \overline{OQ}=y, \overline{OR}=z$, 然后过 P, Q, R 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 这 3 个平面确定了唯一的交点 M . 这样, 空间点 M 就与有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系. 称 x, y, z 为点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

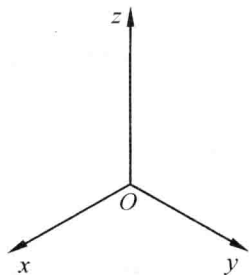


图 5-3

问题 坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征?

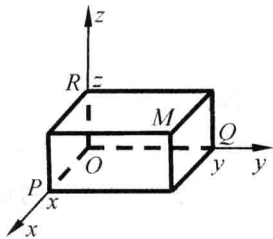


图 5-4

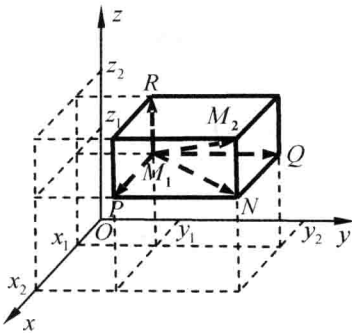


图 5-5

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 过 M_1, M_2 各作 3 个分别垂直于 3 条坐标轴的平面, 这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 5-5). 因为

$$\begin{aligned} |\overline{M_1M_2}|^2 &= |\overline{M_1N}|^2 + |\overline{NM_2}|^2 = \\ &= |\overline{M_1P}|^2 + |\overline{M_1Q}|^2 + |\overline{NM_2}|^2 = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

所以

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5-1)$$

这就是两点间的距离公式.

例 1 设 P 是空间内一点, 其坐标为 (x, y, z) , 即 $P(x, y, z)$, 求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得:

(1) 点 $P(x, y, z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x, 0, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0, 0, z)$.

(2) 点 $P(x, y, z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0, y, z)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 zOx 坐标面的垂足之坐标为 $(x, 0, z)$.

例 2 写出点 $P(1, 2, 3)$ 关于各坐标轴、坐标面与坐标原点对称点的坐标.

解 根据点与坐标及对称性的关系得:

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1, -2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1, 2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1, -2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1, 2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1, 2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1, -2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于坐标原点 O 对称点的坐标为 $(-1, -2, -3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 所求的点 M 在 z 轴上, 所以可设该点坐标为 $M(0, 0, z)$, 根据题意有 $|\overline{MA}| = |\overline{MB}|$, 即

$$\begin{aligned} \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} &= \\ \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2} \end{aligned}$$

化简得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求的点为 $M(0, 0, \frac{14}{9})$.

习题 5-1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x, y, z) , 从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线, 试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a, b, c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点? 指出下列各点的位置.
 $A(3, 4, 0); B(0, 1, 2); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0)$.

4. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问

在它们上面的点的坐标各有什么特点?

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上, 求与 3 点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(3, 1, 2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时, 常会遇到这样的一类量, 它们既有大小又有方向, 如力、力矩、位移、速度、加速度等, 将这种既有大小又有方向的量, 称为向量(或矢量).

在数学上, 往往用有向线段来表示向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点, M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (见图 5-6), 或用一个黑体字母 $\mathbf{a}$ 表示. 书写时, 用上面加箭头的字母来表示向量, 如 $\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模, 如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $\mathbf{a}$ 的模为 $|\mathbf{a}|$, 也可记为 $\|\mathbf{a}\|$. 模为 1 的向量称为单位向量, 模为零的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$, 其方向可任意选取.

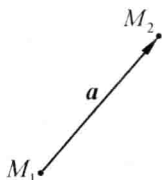


图 5-6

在这里只研究与起点无关的向量, 即只考虑向量的大小和方向, 而不论它的起点在什么地方, 这种向量称为自由向量. 由于只讨论自由向量, 所以如果两个向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的模相等且方向相同, 就说向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 是相等的, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 从几何直观来看, 就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反, 就称这两个向量平行, 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行, 记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

二、向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 连接 A, C (见图 5-7(a)), 向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的和, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (向量加法的三角形法则).

仿此,也有向量加法的平行四边形法则(见图 5-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $a + b = b + a$.

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ (见图 5-7(c)).

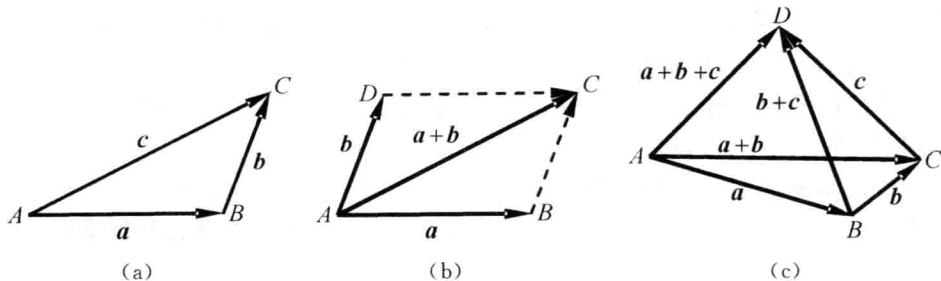


图 5-7

设 a 为一向量,与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的负向量,记作 $-a$,由此,规定 $b + (-a)$ 称为向量 b 与 a 的差,记作 $b - a = b + (-a)$ (见图 5-8).

2. 向量与数的乘法

设 a 是一个非零向量, λ 是一个非零实数,则 a 与 λ 的乘积记作 λa ,规定 λa 是一个向量,且:

(1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$.

(2) λa 的方向为:当 $\lambda > 0$ 时,与 a 同向;当 $\lambda < 0$ 时,与 a 反向.

如果 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$,则规定 $\lambda a = 0$.

容易验证,向量与数的乘法满足以下运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$.

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

其中 λ, μ 都是常数.

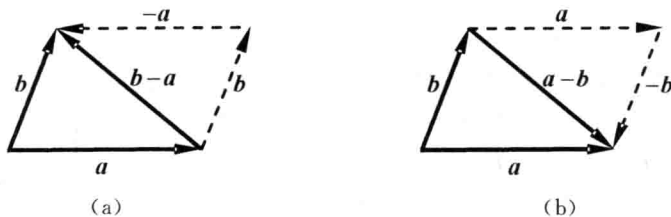


图 5-8

设 a 是非零向量,由数乘向量的规定可知,向量 $\frac{a}{|a|}$ 的模等于 1,且与 a 同方向,记作 e_a ,即 $e_a = \frac{a}{|a|}$. 显然 $a = |a| e_a$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

三、向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具,须将向量运算用代数表示. 因此,在空间直角坐标系中,若将向量的始点移到坐标原点 O , 则这个向量完全由其终点确定; 反过来,任给空间一点 M , 总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说,空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量,分别记作 i, j, k .

设向量 a 的起点在坐标原点, 终点坐标为 $M(x, y, z)$, 过终点 M 作与坐标轴垂直的平面, 其垂足依次为 P, Q, R (见图 5-9), 由向量的加法及数乘向量运算, 有

$$a = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

即

$$a = xi + yj + zk \quad (5-2)$$

称式(5-2)为向量 a 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便, 亦记

$$a = (x, y, z) \quad (5-3)$$

称式(5-3)为向量 a 的坐标表示式.

将向量 $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中, 如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 根据向量的线性运算, 如图 5-10 所示, 得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \\ &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) = \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \end{aligned}$$

若记 $x_2 - x_1 = a_x, y_2 - y_1 = a_y, z_2 - z_1 = a_z$, 则

$$\overrightarrow{M_1M_2} = a = a_xi + a_yj + a_zk = (a_x, a_y, a_z)$$

利用向量的坐标, 可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $a = a_xi + a_yj + a_zk, b = b_xi + b_yj + b_zk$, 于是

$$a \pm b = (a_xi + a_yj + a_zk) \pm (b_xi + b_yj + b_zk) = (a_x \pm b_x)i + (a_y \pm b_y)j + (a_z \pm b_z)k$$

$$\text{即 } a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda a = \lambda(a_xi + a_yj + a_zk) = \lambda a_xi + \lambda a_yj + \lambda a_zk$$

即

$$\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad (\lambda \text{ 为常数})$$

例 1 设有二非零向量

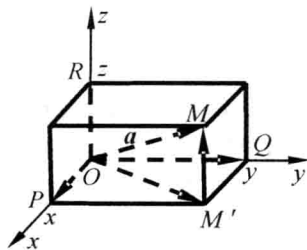


图 5-9

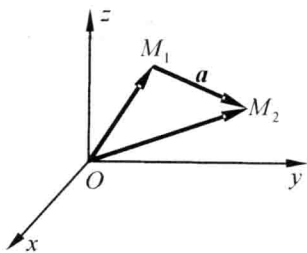


图 5-10

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

证明 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

证明 先证必要性. 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ 且 $\lambda \neq 0$, 即有 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 由于二向量相等有

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

再证充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, 设其比为 λ , 于是 $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, 即 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 则 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

例 2 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点, 而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{MB}$, 使它们的值的比等于某数 $\lambda (\lambda \neq -1)$ (图 5-11), 即

$$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \lambda$$

求分点 M 的坐标 x, y 和 z .

解 因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在一直线上 (见图 5-11), 所以依题意有

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

而

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

有

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

从而

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \frac{1}{1+\lambda}((x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) = \\ &= \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \end{aligned}$$

由此即得点 M 的坐标为

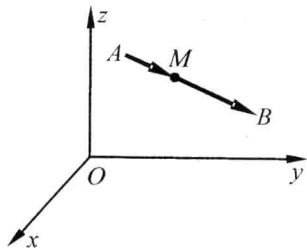


图 5-11

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时, 点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点, 其坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

四、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示, 也可以用它的坐标来表示, 为了应用上的方便, 有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 根据两点间距离公式

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

即

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

对于非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 可以用它与 3 条坐标轴的夹角 α, β, γ ($0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma \leq \pi$) 来表示它的方向 (见图 5-12). 称 α, β, γ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向角. 称 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

因为 $\triangle M_1 P M_2$, $\triangle M_1 Q M_2$, $\triangle M_1 R M_2$ 都是直角三角形, 所以

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (5-4)$$

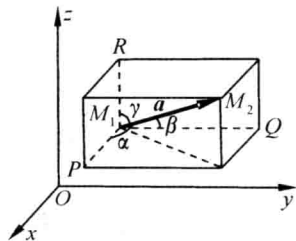


图 5-12

由上式易得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (5-5)$$

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则有

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} (a_x, a_y, a_z) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

即与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$, $M_2(1, 3, 0)$, 求 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$$