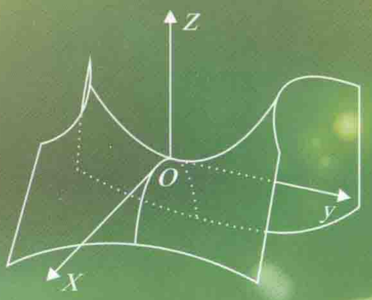
高等学校“十二五”规划教材

高等数学

下册

主编 王树勋 曹吉利



西北工業大學出版社

高等学校“十二五”规划教材

高　等　数　学

下　册

主　编　王树勋　曹吉利

副主编　田　壤　杨立夫

编　者　王树勋　曹吉利　田　壤　杨立夫

李　哲　高　云　苏晓海　刘莉君

田京京

主　审　张文鹏

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的．全书分为上、下两册，共十一章．上册内容包括：函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与数学建模初步；下册内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、最优化方法初步和变分法简介．

本书既可作为高等学校理工科本科生各专业的高等数学课程教材，也可供工程技术人员、教师、其他专业的学生学习参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王树勋，曹吉利主编．—西安：西北工业大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5612-3422-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①王… ②曹… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 195353 号

出版发行：西北工业大学出版社
通讯地址：西安市友谊西路 127 号　　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：727 mm×960mm　　1/16
印　　张：40
字　　数：740 千字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　　2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：56.00 元(上、下册)

前　言

随着科学技术的发展与进步，数学和其他学科一样，都面临着教学思想的转变及内容体系的更新，浓缩经典内容，渗透现代数学思想、方法，将单纯的知识传授变为知识传授与素质教育相结合，是摆在我们面前亟待解决的重大课题. 根据“教育部非数学类数学基础课程教学基本要求和高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革精神”，我们结合多年教学改革工作的体会和经验，在充分研讨的基础上，编写了本教材，并力求体现下述特点.

(1)浓缩经典极限理论，淡化运算技巧，突出极限思想，以够用为原则.

(2)从实例出发引入导数的概念，突出导数概念的背景，加强变化率问题，强调导数与微分的关系，突出微分的应用.

(3)中值定理的证明采用几何直观与代数分析证法，突出证明思想，注重定理的应用.

(4)对于弧微分采用了直观图形与夹逼准则相结合的新的处理方法，避免了传统教材中的某些不足.

(5)在积分学中，突出求原函数的方法及牛顿-莱布尼兹公式，淡化积分计算技巧，加强积分学在实际中的应用. 对于重积分采用行列式统一处理积分元素，在曲线积分与曲面积分中引入向量形式，使得概念清晰，计算简捷，两类线、面积分之间的联系直观明了，高斯公式、斯托克斯公式的证明较为简便.

(6)对于微分方程、空间解析几何、多元函数微分学及无穷级数，均不同程度地吸收了教学研究的成果，并结合微分方程介绍数学建模的基本方法，培养学生的创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力.

(7)介绍了一些现代数学方法，如最优化方法及工程中常用的变分法等内容.

(8)为了控制学时数，书中部分章节加有“ * ”号，其内容老师可根据实际学时数选讲或供学生自学 .

全书由王树勋、曹吉利拟订编写大纲及编写规划，并担任主编. 王树勋编写了第一、六章并绘制了全书插图，曹吉利编写了第三、五、八章，田壤编写了第二

章，杨立夫编写了第七章，田京京编写了第九章及下册的习题与答案，李哲、高云、苏晓海、刘莉君等编写了第四、十、十一章及上册的习题与答案. 全书由王树勋、曹吉利、田壤负责统稿.

本书自 2000 年开始筹划，并专门成立了教改小组，参阅了国内外大量改革教材及教改成果，在总结多年教学经验的基础上，初稿编写成讲义，经过连续多年使用、修改、充实，今正式出版与读者见面. 本书在编写过程中得到陕西理工学院领导和同志们的大力支持. 西北工业大学聂铁军教授、叶正麟教授给本书提出了宝贵的意见. 西北大学张文鹏教授在百忙中审阅了全书. 在此对各位领导、专家及同志们表示衷心的感谢.

由于水平有限，书中不足和考虑不周之处在所难免，恳请专家、同行和读者批评指正.

编　者

2012 年 7 月

目　　录

下册

第五章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应,将平面上的图形和方程相对应,从而用代数方法研究几何问题.空间解析几何也是如此.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上,用代数方法讨论空间的几何图形.本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作 3 条两两垂直的数轴,它们都以定点 O 为原点,且一般取相同的长度单位,这 3 条数轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴).它们的正向符合右手系(当右手的 4 个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向).通常将 x 轴、y 轴放置在水平面上,z 轴为铅垂线,符合右手系,这样 3 条坐标轴就组成了空间直角坐标系(见图 5-1),点 O 称为坐标原点.每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是 xOy 面、yOz 面、zOx 面.3 个坐标面把空间分成 8 个部分,称为 8 个卦限.并逐个编号为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ,分别称为第一卦限,第二卦限,…,第八卦限(见图 5-2).

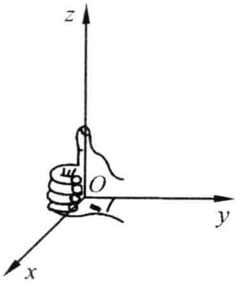


图　5-1

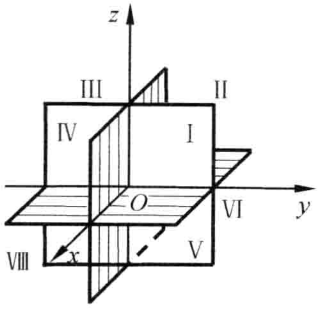


图　5-2

常采用的坐标系表示法有斜二侧(图 5-1)及正等侧(见图 5-3).

设 M 为空间的一点(见图 5-4),过点 M 分别作 3 个与坐标轴垂直的平面,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R,其坐标依次为 x,y,z,从而得到一个有序数组(x,y,z);反之,给定一有序数组(x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $\overline{OP}=x,\overline{OQ}=y,\overline{OR}=z$,然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,这 3 个平面确定了惟一的交点 M.这样,空间点 M 就与有序数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系.称 x,y,z 为点 M 的直角坐标,记为 $M(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

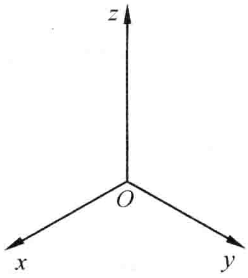


图 5-3

问题 坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征?

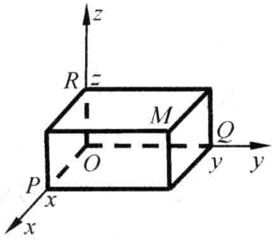


图 5-4

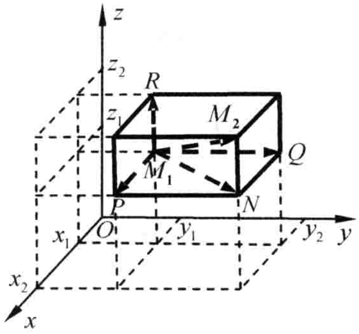


图 5-5

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 M_1,M_2 各作 3 个分别垂直于 3 条坐标轴的平面,这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 5-5).因为

$$|\overline{M_1M_2}|^2=|\overline{M_1N}|^2+|\overline{NM_2}|^2=$$
$$|\overline{M_1P}|^2+|\overline{M_1Q}|^2+|\overline{NM_2}|^2=$$
$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

所以

$$|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{5-1}$$

这就是两点间的距离公式.

例 1 设 P 是空间内一点,其坐标为(x,y,z),即 $P(x,y,z)$,求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得:

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0,y,z)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 zOx 坐标面的垂足之坐标为 $(x,0,z)$.

例 2 写出点 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴、坐标面与坐标原点对称点的坐标.

解 根据点与坐标及对称性的关系得:

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于坐标原点 O 对称点的坐标为 $(-1,-2,-3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 所求的点 M 在 z 轴上,所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$,根据题意有 $|\overline{MA}|=|\overline{MB}|$,即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=$$
$$\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

化简得 $z=\frac{14}{9}$,故所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 5-1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x,y,z),从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线,试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点? 指出下列各点的位置.
$A(3,4,0)$;$B(0,1,2)$;$C(3,0,0)$;$D(0,-1,0)$.

4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问

在它们上面的点的坐标各有什么特点？

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上，求与 3 点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时，常会遇到这样的一类量，它们既有大小又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，将这种既有大小又有方向的量，称为向量（或矢量）.

在数学上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图 5－6）. 或用一个黑体字母 $\boldsymbol{a}$ 表示 . 书写时，用上面加箭头的字母来表示向量，如 $\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模，如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$，也可记为 $\|\boldsymbol{a}\|$. 模为 1 的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可任意选取.

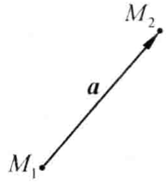


图　5－6

在这里只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种向量称为自由向量. 由于只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看，就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算（加减法、数乘向量）

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 A，C（见图 5－7(a)），向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（向量加法的三角形法则）.

仿此，也有向量加法的平行四边形法则(见图 5-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (见图 5-7(c)).

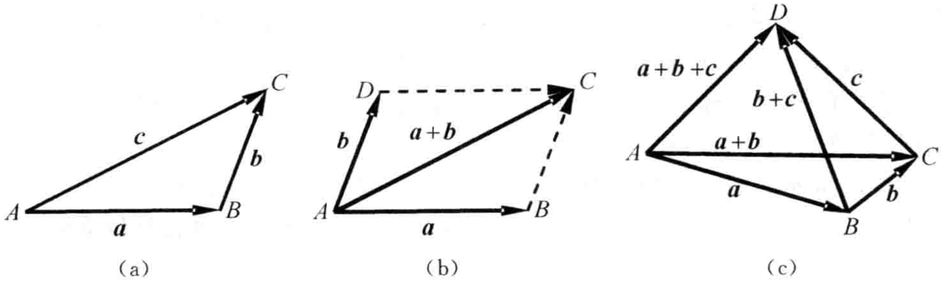


图 5-7

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，由此，规定 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ (见图 5-8).

2. 向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，且：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$.

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量与数的乘法满足以下运算规律：

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

其中 λ,μ 都是常数.

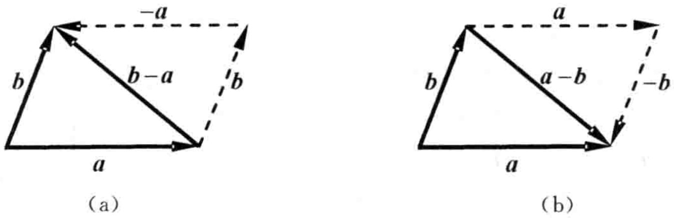


图 5-8

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，由数乘向量的规定可知，向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模等于 1，且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，记作 $\boldsymbol{e}_a$，即 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

三、向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具，须将向量运算用代数表示. 因此，在空间直角坐标系中，若将向量的始点移到坐标原点 O，则这个向量完全由其终点确定；反过来，任给空间一点 M，总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说，空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标为 $M(x,y,z)$，过终点 M 作与坐标轴垂直的平面，其垂足依次为 P,Q,R（见图 5－9），由向量的加法及数乘向量运算，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (5-2)$$

称式(5－2)为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便，亦记

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z) \qquad (5-3)$$

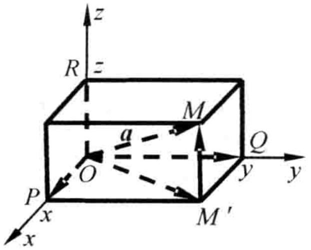


图 5－9

称式(5－3)为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

将向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中，如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，根据向量的线性运算，如图 5－10 所示，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=&\\ &(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\\ &(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

若记 $x_2-x_1=a_x$，$y_2-y_1=a_y$，$z_2-z_1=a_z$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)$$

利用向量的坐标，可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=&(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=\\ &(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z) \quad (\lambda \text{ 为常数})$$

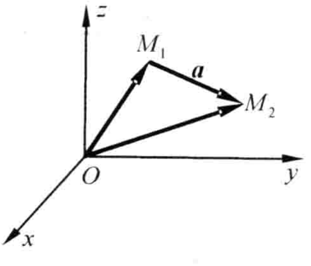


图 5－10

例 1 设有二非零向量

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

证明 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

证明 先证必要性. 如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 且 $\lambda\neq 0$，即有 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，由于二向量相等有

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

再证充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$，设其比为 λ，于是 $a_x=\lambda b_x$，$a_y=\lambda b_y$，$a_z=\lambda b_z$，即 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

例 2 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为已知两点，而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda\neq -1)$（图 5-11），即

$$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\lambda$$

求分点 M 的坐标 x,y 和 z.

解 因为 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 在一直线上（见图 5-11），所以依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$$

而

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

有

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$$

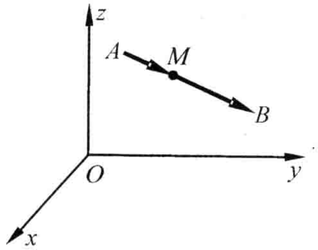


图 5-11

即

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2))=$$
$$\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

由此即得点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时,点 M 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点,其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

四、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示,也可以用它的坐标来表示,为了应用上的方便,有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\overrightarrow{M_1M_2}$,根据两点间距离公式

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,可以用它与 3 条坐标轴的夹角 α,β,γ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi, 0\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$ 来表示它的方向(见图 5-12). 称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

因为 $\triangle M_1PM_2$, $\triangle M_1QM_2$, $\triangle M_1RM_2$ 都是直角三角形,所以

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(5-4)$$

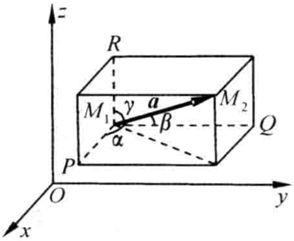


图 5-12

由上式易得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\qquad(5-5)$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

即与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$, $M_2(1,3,0)$,求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,-\sqrt{2})$$