数学文化

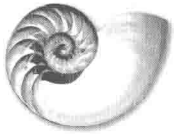
SHUXUE WENHUA

张知学

河北出版传媒集团公司
河北教育出版社

数学文化

张知学



河北出版传媒集团公司
河北教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化/张知学编著. —— 石家庄:河北教育出版社, 2010.12

ISBN 978-7-5434-7898-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学-文化-高等学校-教材 Ⅳ. ①01-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第249160号

书 名 数学文化

责任编辑 孙新龙 李彦所 李 利

装帧设计 赫 江

出 版 河北出版传媒集团公司 河北教育出版社
(石家庄市联盟路705号 http://www.hbep.com)

发 行 河北省新华书店

印 刷 河北联益印刷厂

开 本 787×1092 1/16

印 张 12

字 数 278千字

版 次 2010年12月第1版

印 次 2010年12月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5434-7898-5

定 价 28.00元

前　言

对于各个专业的大学生，学习数学的时间都有十多年了。这本《数学文化》的目的，不是要让他们再学一些新的数学内容，而主要是让他们在没有考试和升学的压力下，回过头来，从文化的角度，认真体会数学、品味数学和欣赏数学，从而获得从未有过的数学感受和文化感悟。

《数学文化》以通俗易懂的数学知识和历史事件为依托，讲授数学的思想、精神和方法，旨在提高大学生的数学素质、文化素质和思想素质，有利于大学生的人格发展和完善。

这本书选材上的特点是：第一，以数学问题、数学知识、数学历史包括数学家故事为载体，讲述数学思想、数学精神和数学方法，探讨数学中的文化内涵。第二，为了说明某些数学思想而必须介绍一些较专业的数学知识时，力求讲述通俗易懂。即使读者不太明白，也无碍于全书的阅读。第三，本书所涉及到的数学知识和数学人物，有古有今，有中有外；既有对数学思想本身的探索，更有对于数学与人文科学关系的思考。

通过多年的学习数学、研究数学和讲授数学以及工作和人生体会，作者深信数学学习对于人的全面素质提高具有重要的不可替代的作用。如果认真体会，数学不应该是枯燥无味、令人头痛的。相反，数学应该是生动的、美妙的和具有无限魅力的。20世纪一位数学大师说得好：音乐能激发或抚慰人的感情，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人聪慧，科学可以改善生活，而数学能做到这一切。

本书在写作过程中，参考了许多位专家学者的著作（见书后主要参考文献），作者在此向他们表示衷心的感谢。

本书所需要的预备知识不多，只要有高中数学知识和初等微积分知识就可以读懂。个别地方涉及到较高深的数学概念，暂时跳过去也不影响对全书的理解。

由于作者水平有限，书中一定有不少错误和一些不当的观点，敬请各位读者批评指正。

张知学

2010年8月于河北大学紫园

目　录

第一讲　什么是数学文化

近年来,"数学文化"一词在社会上,特别是在高等学校里逐渐流行起来。什么是数学文化呢?

1. 数学文化的内涵

文化,词典上的解释是指人类在社会历史发展过程中创造的物质财富和精神财富的总和,特别是指精神财富,如文学、艺术、教育、科学等。

如果按这样来解释文化,那么数学本身就是文化了。不过更多的人,其中包括专门从事数学工作的人,更倾向于这样理解数学文化:除了数学本身作为一门知识性的学科外,它还充满了人文精神,即更强调它具有的文化价值。

具体说来,数学文化是指数学的思想、精神、方法、观点,以及数学的形成和发展,还应包括数学家、数学史、数学美、数学教育以及数学与社会、科学和种种文化的联系,并由此展示数学文化体现的哲学思想(如认识论和辩证法)。

近年来,许多学校举办了以"数学文化"为主题的活动,一大批专门论述数学文化的书籍如《数学文化》、《数学与文化》、《数学文化导论》陆续出版,并且"数学文化"一词已在官方文件中正式使用。

在"数学文化"一词被日益广泛使用时,诸如"物理文化"、"化学文化"之类的词汇也曾出现过,但并没有流行起来。这是为什么呢?这是由数学学科独有的特点所决定的。与物理、化学等学科不同,数学学科的研究对象,并不是某种特定的、具体的物质及物质运动形态,而是从众多的物质及物质运动形态中抽象出来的,是人脑的产物;同时数学学科的研究方法和研究结果也是抽象的,它们不涉及任何具体事物。这样,就使数学具有超越具体学科和普遍适用的特征,从而使数学成为表现人文精神、人类文化的最好方式。总之,数学比物理、化学等学科更具有文化价值。

2. 什么是数学素养

数学素养也叫数学素质,这也是近来人们常常使用的一个词。

日本著名数学家米山国藏在他的《数学的精神、思想和方法》一书中说:"数学的精神、思想、方法是创造数学基础、发现新东西,使数学得以不断向前发展的根源。"大家知道,除了少数从事与数学有关的工作的人以外,对多数人来说,尽管在学校学习到不少数学知识,然而毕业走入社会后却没有机会用数学,所以不久就把具体的数学知识几乎忘光了。对这些人来说,数学岂不是白学了吗?米山国藏在该书中是这样说的:"不管他们从事什

么业务工作，唯有深深铭刻在头脑中的数学的精神，数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等（若培养了这方面的素质的话），却随时地发生作用，使他们受益终生。”

实际上，“数学素养”就是在学习数学过程中，除了数学知识以外剩下的那些东西。这大约包括以下几方面：以数学角度看待问题，善于抓住事物的本质；对问题的简洁、清晰、准确的表达能力；解决问题时严格的思维方式和有步骤的逻辑推理能力；崇尚真理、勇于探索的创新精神和能力等等。

对于受过良好数学教育的人来说，他们通过数学学习和训练形成的数学素养，无论干什么工作都将终身受用。数学中要求必须准确理解数学概念，这会使他们工作中准确把握而不致曲解或走偏；数学中研究的问题非常明确具体，这会使他们工作中避免遇事含糊不清或空泛议论；数学中严密的思维会使他们工作中洞察本质、思路清晰、迅速找到解决问题的办法；数学中严格简洁的叙述和论证，会使他们工作中不拖泥带水，讲话和行文简明扼要，工作效率高；数学中求解问题的技巧，会使他们妥善解决工作中遇到的各种矛盾；数学中繁杂而精确的计算会使他们善于经营管理和精明干练；数学中的演绎和归纳的训练，会使他们工作中善于分析和综合，由个别到一般，避免片面性。数学中解决难题的磨练，会培养他们不怕失败、百折不挠的奋斗精神；数学家发现定理和理论的故事，会启迪他们勇于探索的创新精神。所有这些都与他们从数学学习中得到的数学素质、科学素质息息相关，这些优良的素质在工作中经常发挥作用。

大学生数学素质的培养和提高必须通过数学学习。而学习数学文化，正是提高数学素养的有效途径。

一位进了大学的年轻人，一般学数学的时间都在十年以上了，有的人在大学里还要学习四年或更长的时间。这是除了语文课以外，其他学科都不能与之相比的。尽管如此，许多人除了记住一些数学知识和技巧外，并没有真正学到数学的精神、思想和方法，数学素养较差，也不了解数学对人类社会和人类文明的贡献，不懂得数学的文化价值。造成这种现象的原因是多方面的，但教育者——数学教师有不可推却的责任。

要使数学教育发挥其培养和提高学生数学素养的功能，首先必须做到的是，数学教师自觉地意识到数学教育的这种功能，并能充分理解数学所蕴含的精神、思想和方法。他们能从自己由于受数学的影响而产生的思想出发，直接把数学活生生的思想注入教育之中。平庸的数学教师向学生传授的是知识和技巧，而优秀的数学教师，特别是一些数学大师给予学生的则是思想。

许多数学家、科学家都十分重视数学文化对于提高人的素质方面的巨大作用。

著名德国科学家，X 射线的发现者伦琴在谈到科学工作者应具备什么素质时，他说：“第一是数学，第二是数学，第三还是数学。”

数学家狄尔曼说：“数学能够集中、加速和强化人们的注意力，能够给人发明创造的精细与谨慎的谦虚精神，能够激发人们追求真理的勇气和自信心……数学比起任何其他学科来，更能使学生们得到充实和增添知识的光辉，更能锻炼和发挥学生们探索事理的独立工作能力。”

美国数学家、数学史家莫里斯·克莱因说：“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言。数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、

哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说，满足了人类探索宇宙的好奇心和对美妙音乐的冥想，甚至可能有时以难以察觉到的方式但无可置疑地影响着现代历史的过程。”莫里斯·克莱因的话，强调了数学对从事一切学科的人们以及对一切学科的精神、思想的影响。

著名数学家王梓坤院士在《今日数学及其应用》课题研究中指出：“数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高技术）水平的推进与提高，对科技人才的培养和滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民的科学思维与文化素质的哺育。在这四方面的作用是极为巨大的，也是其他学科所不能全面比拟的。”王梓坤先生指出的数学四个方面的贡献中，第四方面就是人的素质，第二方面也与人的素质有关。可见数学对于培养和提高人的素质的巨大作用，是其他学科无法替代的。

3. 数学文化与人类思维

数学思维是人类思维的一个重要方面。数学思维在其形成与发展过程中，与人类思维互相影响，互相联系。人类思维方式离不开具体方法来培养，而通过学习数学来培养是极好的途径。有人讲过，“数学是思维的体操”，数学思维具有无穷的魅力。思维是数学的灵魂，数学从它诞生那一天起，就一刻也没离开过思维。数学思维方式及其对人类思维的影响是数学文化的重要内容之一。

数学思维包括抽象思维和逻辑思维等。

3.1 抽象思维

抽象是数学的特点之一。抽象思维，就是把同类事物中最关键、最根本的本质性东西提取出来，再加以归纳，使其具有更大的普适性。经过抽象思维产生的抽象概念必须涵盖同类事物中最本质的内容，而又舍弃了与讨论主题不相关的内容。正是由于抽象思维，才能弄清外表不同的问题之间的深刻联系，并在此基础上弄清数学学科中的统一性问题。

数学抽象思维最动人的典范是欧拉将哥尼斯堡七桥问题抽象为一般的一笔画问题。这不仅解决了哥尼斯堡七桥问题，还引发了图论和拓扑学这两个数学分支的产生。

数学思维的抽象性弥补了人类研究事物时依赖感观造成的缺陷。我们知道，科学家尤其是应用科学家基本上是与实物打交道，因而他们的思维就容易局限在由感观所观察到的事物，从而被束缚了手脚。而数学家可以借助抽象思维，在充满视觉、声觉、触觉的感观世界中，用数学方法处理诸如“能量”、“引力”、“电磁”这类物质，并常常用抽象的数学公式表达出来。更出人意料的是，一些看似互不相关的现象，却呈现出密切的联系性和一致性。例如麦克斯韦发现电磁波与光波具有相同的微分方程，从而揭示出电磁波与光波具有相同的物理属性。所有这样的成就，只有通过数学的抽象思维才能实现。

莫里斯·克莱因曾说过：“抽象是能在决然不同的问题中洞察到统一思想，并有一种集中必要的材料阐明其统一见解的艺术。”

抽象思维的关键是要找到所研究问题的主要的、本质的属性。抓住了这些最本质的东西以后，所有其他问题也就相对容易解决了。这反映人们在处理和解决问题（包括社会

问题)方面就是抓主要矛盾,或者说抓根本问题。

费兰西斯·培根是英国哲学家、思想家、作家。“知识就是力量”这句名言就是出自他的口。他认为从思想角度来分析科学与宗教的对立,最本质的问题是抓住人类的认识是从哪里来的,真理究竟是天赋的,还是经验的。由此出发,他创立了经验论哲学,成为近代实证科学的理论基础,并对后世哲学的发展产生了深刻影响。

法国大革命时期制定的《人权宣言》(1789 年 8 月 28 日颁布)也是这样。当时全世界宗教、种族千差万别,哪些是人的基本权利,他们从人的最基本的权利考虑,写出了《人权宣言》,成为人类历史上关于民主、自由的一个光辉的文献。

3.2　逻辑思维

逻辑思维是数学思维中最主要和最重要的部分。数学中的逻辑思维一般都具有典型的形式化特征,即以一种特殊语言符号出现。因此逻辑思维一定是抽象思维,但抽象思维不一定是逻辑的。

有人说,数学就是逻辑,他们强调数学不过是逻辑思维的产物。这种看法虽然是不科学、不全面的,但逻辑思维对于推动数学学科发展的重要作用是不可忽视的。

说到逻辑思维,不能不想到欧几里得几何。欧氏几何中有严密的逻辑推理:根据已知条件,明确所要证明的问题,然后从已知条件出发,利用已有的结论(包括公理等),一步一步地按着严格的逻辑关系,最后达到所要的结论。这种逻辑思维方式对于任何人,对于任何工作都是值得学习和借鉴的。许多人都曾谈到,中学学习几何时培养起来的逻辑思维能力对于他们后来的工作非常有用。

欧氏几何一向被人看作“脑体操”,这是指欧氏几何在训练人的大脑、思维能力方面有如体操对人的健康一样。历史上,欧氏几何一直是训练各类人员思维的传统学科,从中世纪神学院的课程,到近代欧洲各种大学,直到今天世界各地,几乎全都开设欧氏几何课程。人们之所以重视它,首先在于欧氏几何的编排体系从始至终贯穿严格的逻辑推理。在人们学习欧氏几何过程中,有时为了证明一个看似简单、明显的结论却不得不费一番周折;有时为了证明一个看似不一定成立的命题,巧妙地连结一两条辅助线就使问题变得十分清楚甚至一目了然。这样,每做一道题就是一次大脑的体操。这种体操不仅锻炼了人们的逻辑思维能力,也锻炼人们的洞察能力、分析能力和坚强意志。

爱因斯坦是非常推崇欧几里得的逻辑体系的。1933 年他曾在牛津大学讲过这样的话:“我们推崇古代希腊的西方科学的摇篮。在那里,世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹。这个逻辑体系如此精密地一步一步地推进,以致它的每一个命题都是不容置疑的——我这里说的是欧几里得几何。推理的这种可赞叹的胜利,使人类理智获得了为取得以后成就所必需的信心。如果欧几里得未能激起你少年时代的激情,那么你就不是一个天生的科学家。”

数学的逻辑思维,是从明确无误的初始概念出发,借助明确无误的公理和命题,用严格的明确无误的逻辑推理,达到正确的结论。这种纯粹严格的逻辑思维能够在认识宇宙上达到如此确定可靠的程度,一定会启发人们在一切领域中也这样做。因此,数学的逻辑思维方式应该成为人类认识方法的一个典范。由此我们再一次看到数学文化的巨大力量

和魅力。

数学中的逻辑方法再前进一步，就发展成为人们常说的公理化方法。一门学科实现公理化的标志是：它有一套原始概念和公理，而其余概念和命题全由原始概念和公理出发得到。现在，算术、几何、微积分、泛函分析、拓扑学、集合论、抽象代数和概率论等都已建立在公理化基础上。而力学、物理学、量子力量、热力学、统计力学等许多分支利用了公理化方法。值得注意的是康德、黑格尔、斯宾诺莎等人在一些相关人文科学（如哲学、伦理学）中也利用了公理化思想方法。近年来我国在教育理论研究中开始探讨教育科学逻辑起点（即原始概念和原始命题）。由此可见，源自数学的公理化方法已经产生广泛的影响，这种影响已经超出数学范围而进入自然科学领域，并逐渐渗透到人文学科领域。数学的公理化思想使数学作为文化具有更实际、更广泛的意义。

逻辑起点包括两方面，一是概念的起点，一是命题的起点。前者是定义新概念的出发点，后者是进行推理、获得新命题的出发点。数学在这两方面都率先而完美（相对完美）地解决了，这也正是其他学科，包括自然科学、社会科学和人文科学的某些学科愿意仿效它的原因。

迄今为止，各种学科中还没有哪一学科在使用公理化方法上像数学学科那样获得巨大成功。当然，我们也不知道其他学科需要不需要、能不能这样高标准的公理化。但是，任何一门被称之为科学的学科在进行推理的时候，公理化的思想和演绎的方法，还是或多或少应该注意和借鉴的。

4. 数学文化的哲学观

从古希腊开始，数学就成为哲学问题的重要来源。古希腊的大哲学家几乎都是大数学家。他们的代表人物有毕达哥拉斯、柏拉图和亚里士多德等。近代以来解析几何发明人笛卡儿、集合论的创始人康托尔、微积分的创始人之一莱布尼茨以及当代的庞加莱和罗素都是伟大数学家兼哲学家。他们在数学与哲学两个领域同样为后人留下了丰富的精神遗产。笛卡儿是近代哲学的创始人，莱布尼茨开创了德国自然哲学，罗素开创了现代分析哲学。他们的成就在西方哲学史上占有重要地位。

哲学研究世界的本质，它在人文科学中抽象性最高。数学研究世界的数与形，它比任何自然科学学科都具有更高的抽象性。学科的高度抽象性必然导致广泛的应用性。这两点共同特征，常常使数学与哲学在许多场合不期而遇，你中有我，我中有你。

哲学与数学相互依存，密不可分。数学为哲学的深入提供了对象，而哲学又为数学的发展起到一种引导作用。在数学的发展过程中，常常涉及到许多哲学问题，这些问题同时引起数学家和哲学家的关注，因而造成了数学与哲学二者互相影响。

数学家德谟林斯说得好：“没有数学，我们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度。而没有两者，人们就什么也看不透。”实际上，20 世纪以来出现的分析哲学、过程哲学、结构主义以及系统哲学都与数学方法有密切关系。另一方面，20 世纪以来，围绕数学基础的争论，由于哲学观点不同，西方数学家中逐渐出现了三大流派：以罗素为代表的逻辑主义，以布劳威尔为代表的直觉主义和以希尔伯特为代表的形式主义。

他们之间的争论既是数学流派的争论，也是哲学流派的争论。直到现在，这场争论仍没有停止。

在数学发展的历史长河中，处处体现了数学文化的哲学思想。在后面的各讲中，读者可以体会到这一点。在本讲中，我们就几个具体问题进行简要的讨论，广泛深入的探讨将留给读者。下面几个关于哲学思想问题，有的是属于认识论的，有的是属于方法论的。

(1) 无限问题

无限也叫无穷。在现代数学中，随处可见“无穷大”、“无穷小”、“无穷集合”、“无穷多”等术语。自然数的无穷性，大概是人类最早认识的无穷概念。我国春秋时期楚国人公孙龙的名言“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，充分体现了“无限”的思想。

“无穷”的思想作为数学中的内容大量涌现出来，那还是微积分学诞生之后的事情。到了极限理论、实数理论和集合理论等陆续形成的时期，数学离开“无穷”就寸步难行了。所以，希尔伯特说，数学是“关于无限的科学”。

任何无限都可以看作是由有限构成的。例如，自然数虽然无限多，但任何一个自然数都是有限数。一个发散级数之和是无限大，但它的任意部分和都是有限的。由于有限与无限存在密切关联，所以人们可以通过有限来认识无限。在现代数学中，绝对反对引入“无穷”概念的数学家是没有的。然而在数学的无穷观上自古以来就有两种不同主张的争论。

一种是“潜无限”观点，这种观点认为无限只是一个永远延伸着的过程，一种永无终止的生成过程，无限只能是潜在的，像自然数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 它不断生出新的更大的自然数，却永远不能生成“自然数全体”。另一种是“实无限”观点，这种观点认为无限是实实在在的，像“全体自然数”，区间 $[0,1]$ 上的全体实数等都是已经自我完成的实在的无限，因而可以成为数学研究的对象。可以看出，潜无限与实无限是两种互相排斥的哲学主张。前者只承认无限的过程而否认无限的完成，不承认无穷集合是数学研究实在的对象；而后者不否认无限的过程但更强调其完成，认为无穷集合是数学研究的实在的对象。

在数学史上，第一个坚持捍卫实无限观点并为之英勇奋斗的是德国数学家康托尔。他的集合论和超穷数理论令 19 世纪、20 世纪之交整个数学界乃至哲学界为之震撼，并极大地深化和影响了人类对无限的认识。

有学者认为，潜无限的过程主要反映了由有限向无限的转化，即有限与无限的同一性的表现；而实无限作为一种完成了的对象则主要反映了有限与无限的对立。在这个意义下，潜无限与实无限的矛盾可看作有限与无限矛盾的派生物。这是对于潜无限与实无限的对立统一性的解释。不论怎样，关于潜无限与实无限的争论，将不断深化人类对于无限的奥妙的认识。

(2) 必然性与偶然性

在哲学上，必然性是指客观事物联系和发展过程中合乎规律的、一定要发生的、确定不移的趋势。偶然性是指客观事物联系和发展过程中并非确定发生的，可以这样出现，也可以那样出现的不确定的趋势。

辩证唯物主义既承认必然也承认偶然，同时认为两者之间相互联系。当我们考察必然的时候，它总在一定条件下也看到偶然，甚至必然还通过偶然表现出来，但必然不是偶

然;当我们考察偶然的时候,也可以看到一些必然的因素,特别是从众多的偶然中容易发现必然,但偶然不是必然。数学研究必然,数学也研究偶然。概率论和统计学就是以偶然为基础研究必然。

在数学中,随机现象是指一次试验或观测中,其结果有多种可能,而事先无法断定究竟发生哪一种结果。随机现象的本质特征是通过大量的试验和观测,就其整体来看,将出现严格的非偶然性。随机现象也就是偶然现象。必然现象是指在相同条件下每次试验都必然发生的现象。概率论和统计学都是从数量侧面研究随机现象规律的科学,也就是从偶然中探求必然的规律。它们所面对的是自然界中的必然现象和随机现象。概率论是通过研究随机事件概率之间的定量关系来研究随机现象的规律性,而统计学则是从具体资料出发来研究随机现象的规律性。概率论与统计学为人类科学地认识必然与偶然提供了最佳的工具。数学家拉普拉斯曾这样评价概率论:"一门开始于研究赌博机会的科学,居然成了人类知识中最重要的学科,这无疑是令人惊讶的事情。"

(3) 量变与质变

质量互变规律是辩证法的三大规律之一。我们先看一个从量变到质变的简单例子。

大家知道,$\Delta=b^2-4ac$ 是二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的判别式。判别式 Δ 的数量变化($\Delta>0$,$\Delta=0$ 或 $\Delta<0$)将引起方程根的本质变化:两个不等实根、两个相等实根和两个复根。

另一个简单例子是等比级数 $1+q+q^2+\cdots$ 当公比 $q<1$ 时,级数收敛(级数和为有限数),而当公比 $q\geqslant 1$ 时,级数发散(级数和为无穷大)。

对立统一规律和否定之否定规律,是辩证法的另外两大规律。

微分与积分是遵从对立统一规律的典型例子,读者不妨认真体会。

在微积分最初由牛顿和莱布尼茨建立到不断严格化的过程中,从 18 世纪的达朗贝尔、欧拉和拉格朗日,到 19 世纪、20 世纪的柯西、外尔斯特拉斯、戴德金和康托尔等,都先后作出了重大贡献。每个人都是在前人基础上改进和完善,最后使微积分的基础达到完全成熟。这符合肯定—否定—否定之否定的辩证规律。

读者可以举出更多的例子,说明数学文化中的辩证法规律。

(4) 存在性问题

一个多项式(或方程)有没有根,一个线性方程组有没有解,一个无穷序列有没有极限,这些都是存在性问题。

存在性的证明有两种方法:构造性证明和纯粹性证明。

例如,关于一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的根,我们通过实际推导就能把它的两个根具体构造出来,即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}。$$

这就是一个简单的构造性证明,即通过有限步骤把根实际构造出来了。

对于一般的一元 n 次方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

可以证明，在复数域上有 n 个根(重根计重数)。这就是有名的代数基本定理。这个定理首先是由高斯证明的，后来也出现过许多证明方法。但所有这些证明只是告诉你 n 个根的存在性，但这 n 个根具体是什么样子，证明本身并没有告诉你。这是典型的纯粹性证明。

线性代数中的克莱姆法则是说，n 次方程 n 个未知量的线性方程组当系数行列式不等于零时一定存在唯一解，并且把这个解可以用行列式具体表达出来。所以这是构造性证明。

算术基本定理是说，任何一个整数都可以唯一分解为素因数的乘积。在这个证明中，只告诉你素因数分解式的存在性，并没指出分解式具体是什么样子。给你一个很大的整数，你也不一定能把它的素因数分解式求出来。这个证明就是纯粹性证明。

在数学史上，构造性证明一直占统治地位，而纯粹性证明曾经遭到排斥甚至公开反对。直觉主义流派认为，要证明任何数学对象的存在，必须同时证明它可以用有限的步骤构造出来，因此直觉主义流派不承认仅使用反证法的存在性证明(许多纯粹性证明，如算术基本定理就是用反证法证明的)。以希尔伯特为代表的形式主义流派坚决反对直觉主义的观点，他们认为不承认数学家使用纯粹性证明，“就像禁止天文学家使用望远镜一样”。

看来，围绕存在性问题，数学家们有不同理解。“存在”也是哲学上的概念，笛卡儿曾说“我思故我在”，黑格尔曾说“存在的就是合理的”。对于“存在”，不同的哲学流派有不同的观点。看来，在对待“存在”这个问题上，数学和哲学又走到一起了。

(5) 演绎与归纳

演绎与归纳是人类在科学探索中同时采用的两种方法，也是数学家们常用的两种方法。

演绎法是从正确的抽象原理出发，并将其应用于特殊例子，即从一般到特殊的推理过程。相反，归纳法则是从观察到的特殊例子得出一般性的结论。

自古希腊人首创逻辑演绎，又经欧几里得发展完善，演绎方法一直在数学学科中占有极其重要的位置。演绎法常被用作证明，获得结论。如果前提正确，结论则确定无疑。演绎法是由一般到特殊的推理，它有三段论的表现形式。三段论中含三项，即大项、中项和小项。中项起中间作用在结论中不出现。例如，“羊有两只角，A 是一只羊，A 有两只角。”这里，“羊”是中项，“两只角”(的动物)是大项，A 是小项。

演绎推理可以揭示事物的内在联系，使我们看到现象背后的本质，从而获得新结论、新知识。归纳与演绎不同，归纳是通过分析研究若干个事实，找出它们的共性，把特殊推到一般。虽然只考查了若干个别现象，但所得结论却超越了考查时所提供的材料。所以归纳不仅是一种推理，也是一种科学发现的有效方法。数学中许多定理、公式，常常是通过归纳法和猜想得到的。

归纳法又分为完全归纳法和不完全归纳法。完全归纳法是考虑了尽可能多的情况下而作出的推理，基于这一点，它得出的结论一般是可靠的。数学归纳法就是一个最典型的例子，它考虑了所有自然数的情形。不完全归纳法是只考虑一部分，不是尽可能多的情

况。因此，不完全归纳法的结论不太可靠，只能作参考。尽管如此，不完全归纳法在科学探索中也是常用的。例如，生物、化学等学科有时也只能作到这一步。在社会科学的论证方式中，常见一种以例代证的作法，举出一两个例子后就得出对于不同条件下的诸多对象的完全肯定的一般性论断。这样做，科学性值得怀疑，论断不能让人信服。

演绎与归纳，是人类探索世界的两个基本方法，它们相互补充，相依而存，使人们更深刻地认识事物的本质。

5. 数学文化与数学教育

谈数学文化离不开数学教育。我们不应该仅仅把数学教育视为知识和技能的传播。从根本上讲，应该把数学教育视为文化素质教育，即更要重视数学教育的人文功能。

古今中外一切教育中，数学教育一直备受关注。从中国古代的“六艺”教育、古希腊的“七艺”教育，直到当今的学校，数学都是教育的核心内容之一（一些专门学校例外）。柏拉图曾在他的哲学学校门口张贴声明：不懂几何学者莫入。这并不是因为他的学校里的课程（社会学、政治学和伦理学等）与几何学有多大关系或者非要用到几何知识不可。柏拉图所以要求学生懂得几何学，只是立足于数学教育的文化素质原则，也就是说，不经过严格的数学训练的人是难以深入学习、讨论和理解他所设置的课程内容以及相关的社会、政治、道德问题的。据说英国律师至今在大学里学习许多数学知识，这也不是因为他们所学课程用到多少数学知识，而是为了通过严格的数学训练，培养一种坚定不移而又客观公正的品格，形成一种严格的思维习惯和准确的判断能力，从而有助于他们日后事业的成功。更值得人们深思的是，以培养将帅为目标的美国西点军校，竟然设置许多高深的数学课程。这样做的目的当然不是未来实际指挥中用到多少数学知识（指挥现代化战争必须懂得较多的科技知识），而主要是出于这样的考虑：只有经过严格的数学训练，才能使学员成为头脑清楚、思维严格、判断准确、统揽全局的指挥家。总之，从柏拉图哲学学校到美国西点军校，之所以如此重视数学训练，无不源于提高文化素质的原则。他们当年所受到数学训练，一直影响着他们的事业和生存方式。

对于受教育者个人而言，数学不仅是安身立命的工具或手段，它还对人的自身发展和人格完善具有重大影响。这一看法，已成为当今人们的共识。我们可以从以下三方面看数学对于受教育者的影响。

第一，数学思维的影响。数学思维是一种最科学、更完美的人类思维活动，其中的逻辑思维尤为重要和宝贵。借鉴数学思维，可以帮助人们学习各类科学知识，指导人们所从事的工作。这在前面已经详细讨论过了。

第二，数学哲理的影响。数学是人类观察世界的武器。人类坚信，世界是有秩序的，而数学家更坚信，这个秩序是可以用数学表达的。数学影响着人们对世界的认识，影响了人们的世界观。另一方面，数学中提供了大量的辩证的方法，因而学习数学具有深刻的方法论意义。这方面的内容前面谈得比较多了。

第三，数学精神的影响。什么是数学精神？数学精神是一种科学精神，其最根本的特征是探索精神。

数学精神的表现之一是崇尚真理。为了追求真理，为了自己的信念，不怕挫折、不怕失败、不怕冷落、不怕讥讽。历史上许多作出划时代贡献的数学家（如康托尔、罗巴切夫斯基）无不如此。数学精神的表现之二是勤于探索。许多卓有成就的科学家都不愿意承认他们有多高的天赋，而特别愿意说主要靠勤奋。华罗庚有一句名言："聪明在于积累，天才在于勤奋。"人们都承认，牛顿是有史以来最伟大的数学家之一。可是牛顿在 21 岁之前尚未涉猎较高深的数学知识。一位科学史家写道："除了顽强的毅力和失眠的习惯，牛顿不承认自己与常人有什么区别。"牛顿在谈到他的成就时曾说过这样的名言："如果说我看得更远些，那是因为我站在巨人的肩膀上。"

当人类文明高速发展的时候，人们会因为科技与经济的需要而更加重视数学教育，这是应该的；如果还因为人自身发展的原因，因为文化的原因而更加重视数学教育，那也许是把握了更根本的东西。

第二讲　数学是什么

数学是什么？什么是数学？

小学生说：数学是加、减、乘、除。

中学生说：数学是几何、代数、三角。

大学生说：数学是微积分。

由于人们对数学的掌握和理解不同必然有不同的回答。要客观、准确地说清楚什么是数学并不是一件容易的事。这里有两方面的原因：一是随着人类社会的发展和科技的进步，客观世界对数学的需求越来越多，从而数学的应用越来越广泛和深入；二是随着时间的推移，数学本身也在不断变化，数学的内涵和形式在不断拓展，数学的分支以及与其他学科的交叉越来越多。因此数学本身是一个历史的概念，是随时代变化而变化的，给数学下一个一劳永逸的定义也是不可能的。

1. 关于数学的定义和表述

数学的起源最早可以追溯到公元前 6 世纪以前。那时数学主要是关于“数”的研究。这一时期在四个文明古国(埃及、巴比伦、印度和中国)逐渐发展起来的数学，主要是计数、初等算术与算法。公元前 6 世纪以后，希腊数学兴起，才突出了对各种图形的研究。从那时起直到 17 世纪，数学的对象没有本质的变化。这在数学史上称为初等数学或常量数学时期。

然而在现实世界中，数与形，如影之随形，难以分割，数与形从来都是相辅相成、并行发展的。勾股定理就是数与形完美结合的例子。到了 17 世纪，法国数学家笛卡儿提出了系统地把几何物体用代数表示的方法，在其启迪下，经牛顿和莱布尼茨等人的工作发展成了现代形式的坐标解析几何学，使数与形的结合和统一更臻完美。

17 世纪和 18 世纪资本主义的兴起和发展，伴随而来的是数学家对自然界中运动与变化的极大关注。而牛顿和莱布尼茨建立的微积分正是研究行星运动、机械运动、流体运动、动植物生长等最有力的工具和手法。从此，数学成为研究数、形以及运动和变化的学问。从此，数学进入高等数学时期。由于运动与变化的数学描述仍然离不开数与形，所以 19 世纪时，恩格斯还是这样来论述数学的本质：

数学是研究现实世界中数量关系与空间形式的一门科学。

19 世纪以后，由于数学的飞速发展，数学家除了关注现实世界的数学应用和数学问题外，他们更关注数学学科内部的需要和自身发展，从而产生了如抽象代数、非欧几何等一些由公理化出发经过逻辑推理产生的纯粹数学的分支。自此，数学不仅是研究现实世界的数与形、运动与变化，而是在很大程度上研究数学自身。正是这种以数学自身为目的的研究倾向，极大地推动了现代数学的发展，并成为现代数学的重要特征。也正是这个原