

好玩的

数学

修订版

张景中 主编

国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书

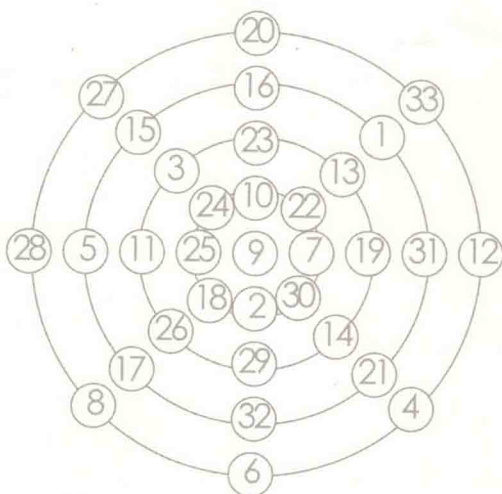
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”

科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

中国古算解趣

郁祖权 著 黄澍 插图

展示“寓理于算，不证自明”的技艺
锤炼“小中见大，鸡刀宰牛”的功夫



科学出版社



国家科学技术进步奖二等奖获奖丛书
总署“向全国青少年推荐的百种优秀图书”
科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”

张景中 主编

中国古算解趣



郁祖权_二著 黄澍_二著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法，如更相减损法、出入相补法、大衍求一术等；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍。诗书画文结合，趣味浓厚，对中学、大学师生和数学爱好者有启迪和参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

中国古算解趣 / 郁祖权著. —修订本. —北京: 科学出版社, 2015. 3

(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 978-7-03-043580-4

I. ①中… II. ①郁… III. ①古典数学—中国—普及读物
IV. ①0112-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 044261 号

责任编辑: 霍羽升 胡升华 / 责任校对: 刘亚靖

责任印制: 张 倩 / 整体设计: 黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年4月第 三 版 开本: 720×1000 1/16

2015年4月第一次印刷 印张: 17 1/4

字数: 274 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛书修订版前言

“好玩的数学”丛书自2004年10月出版以来，受到广大读者欢迎和社会各界的广泛好评，各分册先后重印10余次，平均发行量近45 000套，被认为是一套叫好又叫座的科普图书。丛书致力于多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有深刻哲理的内容最大限度地通俗化，努力使读者“知其然”并“知其所以然”；尽可能地把数学的好玩提升到了更为高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。

丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一，2009年荣获“国家科学技术进步奖二等奖”。但对于作者和编者来说，最高的奖励莫过于广大读者的喜爱关心。十年来，收到不少热心读者提出的意见和修改建议，数学研究领域和科普领域也都有了新的发展，大家感到有必要对书中的内容进行更新和补充。要感谢各位在耄耋之年仍俯首案牍、献身科普事业的作者，他们热心负责地对自己的作品进一步加工，在“好玩的数学（普及版）”的基础上进行了修订和完善。出版社借此机会将丛书改为B5开本，以方便读者阅读。

感谢多年来关心本套丛书的广大读者和各界人士，欢迎大家提出批评建议，共同促进科普事业繁荣发展。

编 者
2015年3月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前,人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说:“道生一,一生二,二生三,三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力:“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在,

它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》（此二书尚无学生版——编者注），分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清

楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》（此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注），把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高

阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4)/5$$

$$b = 4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $x+4$ 应是 3125 的倍数，所以

$$x+4=3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射 - 反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 355/113。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 355/113，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897 \dots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 355/113 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 355/113，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。

但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

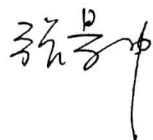
数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目

都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦了不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

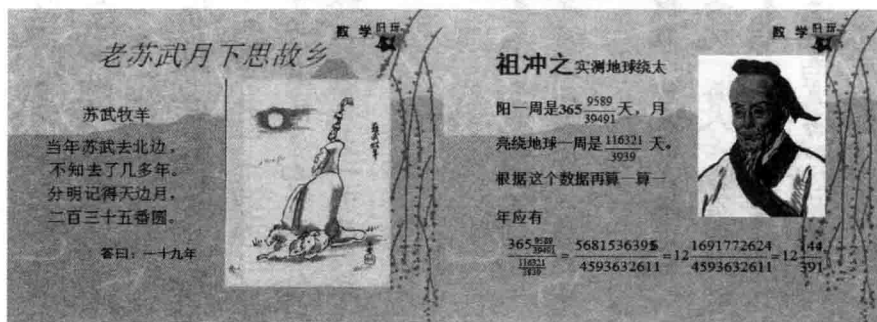
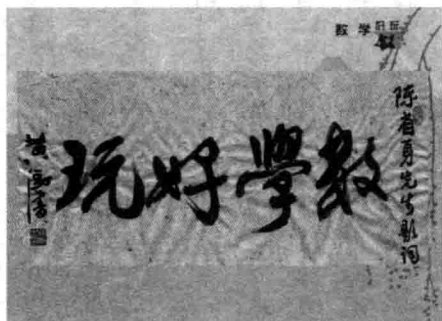
A handwritten signature in black ink, appearing to be '张华' (Zhang Hua) with a stylized flourish extending downwards.

2004年9月9日

第三版前言

甲午岁末，接到科学出版社电话，告知本书出第三版，我十分高兴。

甲申深秋，第一版发行，至今已整整十年。十年前，出版社安排丛书作者分别与各地读者见面，为了突出陈省身先生的题词，我请本书的作者之一、近九十高龄的书法家黄澍教授书写“数学好玩”并制成幻灯片，先后在南京、杭州、合肥公开讲课。我讲课的题目是《数学好玩》，分四个故事：“老苏武月下思故乡，李太白酒里有文章，小韩信神机人莫测，祖冲之妙算惊四方。”



在合肥，当我讲“韩信点兵”：“三三数之剩二，五五数

之剩三，七七数之剩二，问物几何？”刚把题目解释完，就有一个初中小男孩举手说：“我做出来了！”我问他：“你怎么做的？”他很高兴地说：“三三数之剩二，七七数之剩二，我把 $3 \times 7 = 21$ ，再加 2 得 23，拿 5 来除，正好余 3。得数就是 23”全场惊奇！大家都用羡慕的眼光看着这个稚嫩、憨厚的小孩，安徽电视台第一时间作了报道，家长们也纷纷议论“数学真是好玩”。

安徽黄山，古称徽州，文化底蕴深厚。明清时期，中国数学有下坡的趋势，但皖南独兴，出了程大位、戴震、汪莱、梅文鼎、江永等数学大师，特别是程大位的珠算，几乎人人都学。我从图书馆的老资料里找到清末民初一位老师的教学笔记，内容丰富，在那个时代，教到这样的程度还是不多的。

何朝齊至飲香膠 請問英賢面報 答曰一百零五天全
到相會以三朝五日相來得一十五日再以七日來之得一百
零五日 合問

鴉兒全籠不識數 三十六頭籠中露 看來脚有一百隻
幾個鴉兒幾個兒 答曰鴉二十二隻 兒一十四隻

置總頭俟以四足因之歸一百四十四隻內除原脚一百隻餘
四十四足折半得鴉二十二隻於總頭內減去二十二隻餘
者是兒一十四隻 合問

呂雅笑歌

蘇武當年臨北邊 不知去了幾多年 分明記得天邊月
二百二十八番圓 答曰一十九年月圓二百二十八番以年
十二月除之得一十九年 合問

一夥賊人不知數 偷了人家一担布 躲在深山僻處分
分得不勻相打五 每人六疋多六疋 每人七數欠七數
借問高明能算否 幾多賊人幾多布 答曰一十三人布八
十四疋置多六疋併七疋得一十三疋為寬另六疋相減餘一

本书出版以后，编委会的老友、同行和家长、学生屡有

沟通交流，“玩数学”收获颇丰。数学老玩家俞润汝先生介绍他60年前玩“韩信点兵”的心得，汪亚森老师传授祖传秘法“撞十数”，郭启庶教授积极进行“优因数学”的教学实验，主张选择中西数学的优秀基因、范式来构建简易、高效、现代化的数学课程结构，还有罗会煌家代代相传的移子游戏，……，这些玩数学的热闹场面在二版里均作了简要介绍。数学已经玩、学、教结合，推进了数学教育的现代化。

我已进入了耄耋之年，现在还可以做点关心下一代的工作，娃娃们的数学题库里，好玩的东西也很多。本书出版以后，有老朋友给我说，“写深了，要选点孩子们遇到的题，调动他们的兴趣。”这个意见很对，本版在这方面努力做些改进，把孩子们遇到的难题、趣事再做些补充。

我非常敬重的老师、挚友和讲坛伴侣黄澍教授，于2013年辞世，享年97岁。他仿丰子恺的笔法，为算题绘制了栩栩如生的插画，成为留给下一代的永久的纪念，在此深表哀悼。

作 者

2015年2月4日

第二版前言

本书自 2004 年 10 月出版以来已重印五次，印数超过两万册，实在是没有想到的事。在此期间，许多读者给我来信，有些数学的“老玩家”还把他们的玩数学的成果寄给我。他们改进古法，别有创新，我也从中受到教育，获益匪浅。科学出版社科学人文出版中心主任胡升华先生告诉我，本书要修订出第二版，还要压缩字数。不管怎样，友人的成果要介绍，坎坷的经历也要说说，“众人拾柴火焰高”，希望我们国家“玩数学”之风能够日益兴盛。

上海俞润汝先生是抗美援朝的老战士，1956 年中国医科大学的毕业生，数学玩得很高明。他改进了“韩信点兵”的古法，独创了“32 阶全息幻方”，在数论领域内还捕捉了一些“漏网之鱼”。他通过本丛书作者之一的吴鹤龄先生找到我，细谈了他的韩信点兵新法，还送我几本他自费编印、供青少年阅读的小册子《数学粒屑集》等，内容珍贵。征得他本人同意，乘再版之机，向读者作一介绍，也体现古法的与时俱进。

20 世纪 40 年代初，徽州名师罗会煌先生是“移子游戏”的大玩家，无人匹敌。在本丛书之一《乐在其中的数学》里，谈祥柏先生介绍了此游戏的历史背景，很有意思。此法出自中国，清朝顺治年间就有许多文人雅士玩此游戏，但都未求得普遍的结果。我年轻时曾将罗先生的玩法作过改进，直观易记，不要做什么数学分析，大人、小孩都能玩，这对训练小孩的观察力、记忆力、思维力和空间想象力都大有好处。受谈祥柏先生的启示，把我的方法也说一说，也算是

“一戏多玩”吧。

早在民国初年，歙县汪介梅先生花钱在浙江学会了无诀珠算除法“撞十数”，不用口诀，见子打子，快速如飞。20世纪50年代末“大跃进”时期，他的儿子汪亚森将此法公之于世，作为大学生的科研成果，曾经轰动一时，《光明日报》、《中国青年报》和《安徽日报》都作过报道。几十年来，我们一起从事此法的教学、推广工作，帮助成千上万的财会人员过珠算等级测试中的“除法”关。现在珠算不用了，但此法的思想适用于各种进位制，“利用补数，以加代除”就是计算机除法的思路，比现行计算机书籍中介绍的补除都简便，应该看作是我们民族的非物质文化遗产，介绍出来，可以古为今用。

限于篇幅，不作过多补充，对原书不太好玩的内容作了一些删减。感谢同行的帮助与鼓励，感谢读者的支持。对书中错误和不当之处，敬请批评指正。

作 者

2007年11月19日