“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

新编基础物理学（第二版）

学习指导与能力训练

王祖源　滕　琴　刘钟毅　主编

科 学 出 版 社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

新编基础物理学(第二版)学习指导与能力训练

主　编　王祖源　滕　琴　刘钟毅
参　编　石　华　张明霞　贯树恒
徐志华　王玉生

科学出版社

内 容 简 介

本书是与"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材、普通高等教育精品教材、上海市高校优秀教材《新编基础物理学(上、下册)(第二版)》配套出版的学习指导与能力训练,主要面向使用该教材的师生.

全书与主教材对应,共分为六篇:第1篇力学;第2篇机械振动、机械波;第3篇热学;第4篇电磁学;第5篇光学;第6篇量子物理基础.全书涵盖了大学物理的基础知识和解题过程.各章设置"基本要求"、"基本内容"、"解题方法"、"解题指导"、"能力训练"、"参考答案"六个部分,其中"基本内容"又包括"本章重点和难点"、"知识网络结构图"、"基本概念和规律"、"容易混淆的概念"、"思考问答"五个子部分,以循序渐进的方式,通过知识点的梳理和归纳,配以典型例题讲解和精选习题训练,注重培养学生(读者)理性思维方法以及分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等学校工科各专业学生学习大学物理课程的参考书,也可供读者自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

新编基础物理学(第二版)学习指导与能力训练/王祖源,滕琴,刘钟毅主编.—北京:科学出版社,2015.1

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-042844-8

Ⅰ.①新… Ⅱ.①王…②滕…③刘… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第300913号

责任编辑:窦京涛 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:霍兵 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京华正印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年1月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2015年1月第一次印刷 印张:13 1/4
字数:330 000

定价:29.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

本书是与《新编基础物理学(上、下册)(第二版)》配套的学习指导书.全书以让学生(读者)掌握大学物理的基本原理和学习方法为目的,明确指出了各章的基本要求、重点和难点,并配有例题和习题.它对于指导学生(读者)正确、深入地理解物理概念和物理定律,掌握物理基本原理和学习方法,培养分析和解决问题的能力都具有启迪作用.

本书共分为六篇:第1篇力学;第2篇机械振动、机械波;第3篇热学;第4篇电磁学;第5篇光学;第6篇量子物理基础.本书内容涵盖了大学物理的基础知识.

本书各章设置"基本要求"、"基本内容"、"解题方法"、"解题指导"、"能力训练"、"参考答案"六个部分.在"基本要求"中,明确指出本章应掌握、理解或了解的内容,便于学生(读者)分清主次,抓住要求.基本内容总结归纳一章的主要内容,并配有该章知识框架,同时列出重点和难点,便于学生(读者)总结提高."解题方法"是本书精华,在总结归纳一章问题的解答基础上,简明地给出该章主要基本运算的解题方法、路径.在"解题指导"中选择本章各类型代表性习题举例,结合分析要点、解题路径和解题方法的应用和介绍,希望使学生(读者)能触类旁通,达到举一反三的效果.最后"能力训练"提供自我检查的习题,让学生(读者)对照"参考答案"了解自己对本章知识掌握的情况.希望本书对学生(读者)的学习能力提升有所帮助.

本书第1章由王玉编写;第2章由吕福和编写;第3章由高勇编写;第4章由石华编写,第5章由占美琼编写;第6章由王祖源编写;第7章由张明霞编写;第8章由贾树恒编写;第9、10章由徐志华编写;第11章由滕琴编写;第12章由王玉生编写;第13章由贾佑华编写;第14章由徐成年、于彬编写;第15、16章由刘钟毅编写.本书由王祖源、滕琴、刘钟毅审稿,王祖源统稿和定稿.

本书在编写过程中,得到王少杰教授和顾牡教授的关心和指导,也得到科学出版社昌盛、窦京涛编辑的支持.谨此向他们表示衷心感谢.

由于编者水平与学识有限,加之编写时间紧迫,书中难免有疏漏与不妥之处,恳切希望同行专家、读者提出宝贵意见,以便今后纠正.

编　者

2014年10月于上海

目　　录

第3篇　热　学

第4篇　电　磁　学

第1篇　力　　学

第1章　质点运动学

一、基本要求

（1）理解描述质点运动的位矢、位移、速度、加速度等物理量的意义.

（2）熟练掌握质点运动学的两类问题：用求导法由已知的运动学方程求速度和加速度，并会由已知的质点运动学方程求位矢、位移、平均速度、平均加速度、轨迹方程. 用积分法由已知质点的速度或加速度求质点的运动学方程.

（3）理解自然坐标系，理解圆周运动中角量和线量的关系，会计算质点做曲线运动的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度和总加速度.

（4）了解质点的相对运动问题.

二、基本内容

（一）本章重点和难点

重点：掌握质点运动学方程的物理意义，利用数学运算求解位矢、位移、速度、加速度、轨迹方程等.

难点：将矢量运算方法及微积分运算法应用于运动学解题.（提示：矢量可以有黑体或箭头两种表示形式，教材中一般用黑体形式表示，学生平时作业及考试必须用箭头形式表示.）

（二）知识网络结构图

- 质点运动
  - 基本物理量
    - 位矢
    - 位移
    - 速度，平均速度
    - 加速度，平均加速度
  - 运动方程形式
    - 质点运动方程（位矢方程）
    - 参数方程
    - 轨迹方程
  - 曲线运动：角速度，角加速度，切向加速度，法向加速度，总加速度
  - 相对运动

(三)基本概念和规律

1. 质点的位矢、位移、运动方程

在直角坐标系中:

(1) 质点运动方程 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$(描述质点运动的空间位置与时间的关系式).

(2) 位矢 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

(3) 位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$,注意位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和路程 Δs 的区别,一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$, $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$ 或 $\Delta|\boldsymbol{r}|$.

位移大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

径向增量 $\Delta r=\Delta|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_B|-|\boldsymbol{r}_A|=\sqrt{(x_B)^2+(y_B)^2}-\sqrt{(x_A)^2+(y_A)^2}$.

(4) 参数方程:$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$.

(5) 轨迹方程:从参数方程中消去 t,得 $F(x,y,z)=0$.

2. 速度和加速度

直角坐标系中:

(1) 速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$.

(2) 平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

(3) 加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$.

(4) 平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$.

$\left(\text{注意速度和速率的区别}\ |\boldsymbol{v}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|,\text{但一般情况下}\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.\right)$

3. 曲线运动

描述质点的曲线运动,常采用自然坐标系(由切向和法向组成).在自然坐标系中,质点的(线)速度和加速度为:

(1) 速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$.

(2) 加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=a_t\boldsymbol{e}_t+a_n\boldsymbol{e}_n$.其中,切向加速度 $\boldsymbol{a}_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$ 量度速度量值的变化;法向加速度 $\boldsymbol{a}_n=\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$ 量度速度方向的变化,ρ 为曲率半径.

4. 圆周运动

(1) 角速度 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

(2) 线速度 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

(3) 角加速度 $\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

(4) 总加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=R\beta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}+R\omega^2\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$.

(大小取模：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|=\sqrt{(R\beta)^2+(R\omega^2)^2}$)

且有角量与线量关系式

$$s=R\theta$$

$$v=R\omega$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\beta$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

5. 相对运动

一个运动质点在两个做相对平动的参考系中的速度关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 为绝对速度；是质点相对于S系的速度；$\boldsymbol{v}'$为相对速度，是质点相对于S′系的速度；$\boldsymbol{u}$ 为牵连速度，是S′系相对于S系的速度.

(四) 容易混淆的概念

(1) 瞬时速度和平均速度.

瞬时速度(简称速度)，对应于某时刻的速度，是质点位置矢量随时间的变化率，用求导法；平均速度是质点的位移除以产生这段位移所用的时间，对应的是某个时间段内的速度平均值，不用求导法.

(2) 瞬时加速度和平均加速度.

瞬时加速度(简称加速度)，对应于某时刻的加速度，是质点速度矢量随时间的变化率，用求导法；平均加速度是质点的速度增量除以时间，对应的是某个时间段内加速度的平均值，不用求导法.

(3) 质点运动方程、参数方程和轨迹方程.

质点运动方程(即位矢方程)，是质点位置矢量对时间的函数；参数方程是以时间 t 为参量的质点运动方程的分量式；而轨迹方程则是从参数方程中消去 t 得到的，反映质点运动的轨迹特点.

(4) 绝对速度、相对速度和牵连速度.

绝对速度是质点相对于静止参考系的速度；相对速度是质点相对于运动参考系的速度；牵连速度是运动参考系相对于静止参考系的速度.

(五) 思考问答

问题 1 位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 有何区别？$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 和 $\Delta|\boldsymbol{r}|$ 意义相同吗？

答 位置矢量 $\boldsymbol{r}$(简称位矢)是从坐标原点指向质点所在位置的一个有向线段，描述了某时刻质点的位置；而位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是初位置指向末位置的有向线段，反映了质点位置的变化，二者意义不同.

末位置的位矢和初位置的位矢之差即为该段时间内的质点的位移，若取初位置为坐标原点，则末位置的位矢和位移一致. 质点的瞬时速度为该时刻位矢对时间的一阶导数，而不是位移对时间的导数.

$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 是矢量增量的模，即位移的大小；$\Delta|\boldsymbol{r}|$ 为矢量模的增量，即位矢的径向增量，二者意义不同.

问题 2 如果一质点的加速度与时间的关系是线性的，那么它的速度与时间、位矢与时间的关系是否也是线性的呢？

答 设 $a=kt$(其中 k 是常数)，则用积分法可求得 $v=v_0+\dfrac{1}{2}kt^2$，可见速度与时间的关系不是线性的. 以此类推，可知位矢与时间的关系也不是线性的.

问题 3 物体某一时刻开始运动，在 Δt 时间后，经任一路径回到出发点，此时速度的大小和开始时相同，但方向一般不同，试问在 Δt 时间内平均速度是否为零？平均加速度是否为零？

答 平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 是物体的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间 Δt 的比值，而这段时间内位移为零，所以平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 为零.

平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 是物体速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与时间 Δt 的比值，由于初、末速度的方向不同，所以 $\Delta\boldsymbol{v}$ 不为零，平均加速度 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 也不为零.

问题 4 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直？任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直？

答 不管是圆周运动还是任意曲线运动，质点的总加速度均为切向加速度和法向加速度的矢量和.

在匀速率圆周运动中，速度的大小不变，切向加速度为 0，质点的加速度为法向加速度，且其方向与线速度方向垂直，指向圆心. 而在变速率圆周运动中，速度的大小也随时间的变化而变化，质点的加速度不但有法向分量还有切向分量，因此，加速度的方向一般不垂直于沿切向的速度方向，也不一定指向圆心(法向).

在匀速率曲线运动中，只要速度方向有变化，加速度只能有法向分量，而且一定与沿曲线切向的速度方向垂直，并指向质点所在处曲线的曲率中心.

在变速曲线运动中，切向加速度不为零，故加速度一定不与速度方向垂直，但一定指向轨迹的凹侧.

问题 5 关于质点的运动，下列说法是否正确？

(1) 质点做圆周运动时加速度指向圆心；

(2) 匀速圆周运动的加速度为恒量；

(3) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动；

(4) 只有切向加速度的运动一定是直线运动.

答　(1) 错.质点做非匀速率圆周运动时,加速度不一定指向圆心.

(2) 错.质点做匀速圆周运动时,只有法向加速度,加速度的大小不变但方向不断变化且始终指向圆心.

(3) 错.只有法向加速度的运动,切向加速度为0,则速率不变.圆周运动中,半径 R 一定,由 $a_n=\frac{v^2}{R}$ 知,法向加速度的大小也一定.应该说只有法向加速度且其大小不变的运动一定是圆周运动.

(4) 正确.只有切向加速度的运动,其法向加速度为0.而 $a_n=\frac{v^2}{R}=0$,$R\to\infty$ 一定是直线运动.

三、解题方法

运动学主要分为两类问题:

第一类问题,已知运动方程求速度和加速度,用求导法.

第二类问题,已知质点加速度以及在起始状态时的初位矢和初速度,求速度、位矢或质点运动方程,用积分法.

其中,第一类问题的解题方法是求导,求导不需附加条件;求解第二类问题需要积分,而积分则需要相应的初始条件,积一次分,需一个初始条件.有些情况下,不能直接积分,需作变量代换.另外,在不同坐标系下(如直角坐标系与自然坐标系),物理量的表达式不同,故学习中要准确掌握.

四、解题指导

1. 已知质点运动参数方程为 $\begin{cases}x=-R\sin\omega t\\ y=R(1-\cos\omega t)\end{cases}$,式中,$R$ 和 ω 为常量,试求:

(1) 质点轨迹方程是什么?做何运动?

(2) 1s 末的位矢.

(3) 速度和加速度大小.

【分析】　这是已知运动方程求速度、加速度的典型问题,即运动学第一类问题,通过求导法进行计算.

解　(1) 由参数方程消去 t,可得轨迹方程

$$x^2+(y-R)^2=R^2$$

这是以 R 为半径、圆心位于$(0,R)$点的圆方程,即质点做圆周运动.

(2) 运动方程矢量形式为

$$\boldsymbol{r}=-R\sin\omega t\boldsymbol{i}+R(1-\cos\omega t)\boldsymbol{j}$$

将 $t=1\text{s}$ 代入上式得

$$\boldsymbol{r}_1=-R\sin\omega\boldsymbol{i}+R(1-\cos\omega)\boldsymbol{j}$$

(3) 由速度定义

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\omega\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

其中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-R\omega\cos\omega t,\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\omega\sin\omega t$$

速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=R\omega$$

可见 v 的值为一常量,表明质点做匀速率圆周运动,角速度为 ω.

再由加速度定义

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{i}+R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

其中

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=R\omega^2\sin\omega t,\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=R\omega^2\cos\omega t$$

加速度大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=R\omega^2$$

2. 一质点在 xOy 平面上运动,运动方程为 $x=3t+5$,$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$(式中,t 以 s 计,x 和 y 以 m 计). 求:

(1) 以时间 t 为变量,写出质点位置矢量的表示式;

(2) 求出 $t=1$s 时刻和 $t=2$s 时刻的位置矢量,计算这 1s 内质点的位移;

(3) 计算 $t=0\sim4$s 内的平均速度;

(4) 求出质点速度矢量表示式,计算 $t=4$s 时质点的速度;

(5) 计算 $t=0\sim4$s 内质点的平均加速度;

(6) 求出质点加速度矢量的表示式,计算 $t=4$s 时质点的加速度.

(请把位置矢量、位移、平均速度、瞬时速度、平均加速度、瞬时加速度都表示成直角坐标系中的矢量式).

【分析】 本题是最基本的直角坐标系下运动学第一类问题,意在强化直角坐标系下的运动学基本概念. 题目中给出的是参数方程形式,可用矢量式直接写出质点运动方程形式,再用求导法求出速度和加速度.

解 (1) 位矢方程(质点运动方程)为

$$\boldsymbol{r}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$$

(2) 将 $t=1$,$t=2$ 代入上式即有

$$\boldsymbol{r}_1=8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m}),\quad \boldsymbol{r}_2=11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+4.5\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m})$$

(3) 因为

$$\boldsymbol{r}_0=5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_4=17\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$$

所以

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_0}{4-0}=\frac{12\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}}{4}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

(4) $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$,则

$$\boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

（5）因为

$$\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_0}{4}=\frac{4\boldsymbol{j}}{4}=1\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

（6）
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=1\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$

这说明该质点运动只有 y 方向的加速度，且为恒量.

3. 质点沿半径为 R 的圆周按 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中，s 为质点离圆周上某点的弧长，v_0 和 b 都是正常数，求：

（1）t 时刻质点的加速度；

（2）质点从开始运动到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间；

（3）t 为何值时，加速度在数值上等于 b.

【分析】 本题是自然坐标表示下的运动学第一类问题.

解　（1）

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

则

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

加速度与半径的夹角为

$$\varphi=\arctan\frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}}=\frac{-Rb}{(v_0-bt)^2}$$

（2）当 $|a_{\mathrm{t}}|=|a_{\mathrm{n}}|$ 时

$$b=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

解得

$$t=\frac{v_0}{b}\mp\sqrt{\frac{R}{b}}$$

（3）由题意应有

$$a=b=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

即

$$b^2=b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}\Rightarrow(v_0-bt)^4=0$$

所以当 $t=\frac{v_0}{b}$ 时，$a=b$.

注释:须特别注意的是 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$**,也可写成** $a_t=\dfrac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}$**,而不是** $a_t=\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$.

4. 一质点沿半径为 1m 的圆周运动,运动方程为 $\theta=2+3t^3$,式中,θ 以 rad 计,t 以 s 计.求:

(1) $t=2$s 时,质点的切向和法向加速度;

(2) 当加速度的方向和半径成45°角时,其角位置是多少?

【分析】 本题为物体做圆周运动的角坐标表示下的运动学第一类问题,其运动学方程为角位置随时间变化关系式,由角量与线量之间的关系可求解出 a_t 和 a_n;并由二者的关系求出时间,进而求出 θ.

解 由

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=9t^2,\quad \beta=\frac{d\omega}{dt}=18t$$

(1) $t=2$s 时

$$a_t=R\beta=1\times18\times2=36(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$
$$a_n=R\omega^2=1\times(9\times2^2)^2=1296(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

(2) 当加速度方向与半径成 45°角时,有

$$\tan45°=\frac{a_t}{a_n}=1$$

即

$$R\omega^2=R\beta$$

亦即

$$(9t^2)^2=18t$$

则解得

$$t^3=\frac{2}{9}$$

于是角位置为

$$\theta=2+3t^3=2+3\times\frac{2}{9}=2.67(\mathrm{rad})$$

5. 半径为 R 的轮子,其轮子中心以匀速率 v_0 沿水平方向向前运动(规定为 x 轴正方向),同时轮子上各点以 $\omega=v_0/R$ 的角速度绕其中心转动.当轮缘上任意点 B 与水平线接触的瞬间开始计时:

(1) 证明 B 点的运动方程为 $x=R(\omega t-\sin\omega t)$,$y=R(1-\cos\omega t)$;

(2) 求 B 点速度和加速度的分量表示式.

【分析】 本题亦为运动学第一类问题,解题关键是依据条件推导出运动学方程.

解 (1) 依题意作出轮子 t 时刻位置示意图 1-1,由图可知,t 时刻 B 点的位置为

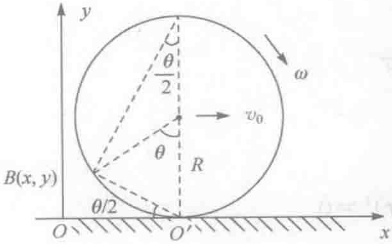

图 1-1　t 时刻轮子的位置

$$x=v_0t-R\sin\theta=R(\omega t-\sin\omega t)$$

$$y=R(1-\cos\theta)=R(1-\cos\omega t)$$

即得到质点运动的参数方程.

(2) 对上述运动方程各分量求导可得

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=R\omega(1-\cos\omega t) \\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=R\omega^2\sin\omega t \\ a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=R\omega^2\cos\omega t \end{cases}$$

6. 已知一质点由静止出发,它的加速度在 x 轴和 y 轴上的分量分别为 $a_x=10t$,$a_y=15t^2$(SI 制). 试求 $t=5\text{s}$ 时质点的速度和位置.

【分析】 这是一个典型的运动学第二类问题,首先要根据题意确定出初始条件,然后由加速度、速度定义式及初始条件求出速度、位矢的表达式,最后代入具体数值得出结果.

解 取质点的出发点为坐标原点. 由题意知质点的加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=10t,\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=15t^2$$

由初始条件 $t=0$ 时,$v_{0x}=v_{0y}=0$,对上式进行积分,有

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t 10t\,\mathrm{d}t,\quad v_x=5t^2$$

$$\int_0^{v_y}\mathrm{d}v_y=\int_0^t 15t^2\,\mathrm{d}t,\qquad v_y=5t^3$$

即

$$\boldsymbol{v}=5t^2\boldsymbol{i}+5t^3\boldsymbol{j}$$

$t=5\text{s}$ 时

$$\boldsymbol{v}=125\boldsymbol{i}+625\boldsymbol{j}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

又

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5t^2,\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5t^3$$

由初始条件 $t=0$ 时,$x_0=y_0=0$,对上式分离变量并积分,有

$$x=\int_0^t 5t^2\,\mathrm{d}t=\frac{5}{3}t^3,\quad y=\int_0^t 5t^3\,\mathrm{d}t=\frac{5}{4}t^4$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{5}{3}t^3\boldsymbol{i}+\frac{5}{4}t^4\boldsymbol{j}$$

$t=5\text{s}$ 时

$$\boldsymbol{r}=\frac{625}{3}\boldsymbol{i}+\frac{3125}{4}\boldsymbol{j}(\mathrm{m})$$

7. 一质点做直线运动,其加速度为 $a=4+3t(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$,开始运动时,$x_0=5\mathrm{m}$,$v_0=0$. 求该质点在 $t=10\text{s}$ 时的速度和位置.