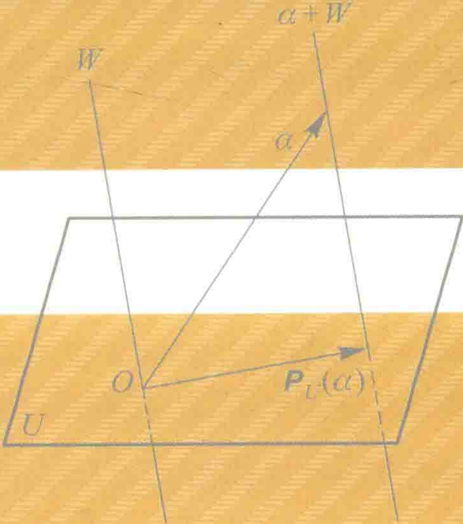


# 高等代数

（第三版）下 册

丘维声

ADVANCED ALGEBRA

高等教育出版社

# 高等代数

Gaodeng Daishu

（第三版）

下　册

丘维声

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是高等学校的主干基础课“高等代数”课程的教材，它是作者积四十多年的教学经验，积极进行高等代数课程的教学目标、教学内容体系和教学方法改革的结果．全书既使学生扎实地掌握高等代数的基础知识和基本方法，又注重培养学生具有数学的思维方式；渗透现代数学研究结构和态射（即保持运算的映射）的观点，体现信息时代的要求，精选和更新教学内容，理论深刻，从具体到抽象，深入浅出，让学生在观察、探索、猜测和论证中生动活泼地学习．

全书分上、下两册．上册讲述线性代数的具体研究对象：线性方程组，行列式，数域 $K$ 上的 $n$ 维向量空间 $K^n$，矩阵的运算，欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$，矩阵的相抵与相似，二次型与矩阵的合同．下册讲述多项式环，线性空间，线性映射（包括线性变换和线性函数），具有度量的线性空间（包含欧几里得空间，酉空间，正交空间，辛空间）．本书按节配置适量习题，书末附有习题答案与提示．

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的高等代数课程的教材．

**图书在版编目（CIP）数据**

高等代数．下册 / 丘维声编著．-- 3版．-- 北京：高等教育出版社，2015.4
ISBN 978-7-04-042235-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①丘… Ⅲ．①高等代数－高等学校－教材 Ⅳ．①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第039677号

策划编辑 田 玲　　责任编辑 田 玲　　封面设计 李小璐　　版式设计 杜微言
插图绘制 邓 超　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 三河市华骏印务包装有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 17
字 数 320千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 1996年12月第1版
2015年4月第3版
印 次 2015年4月第1次印刷
定 价 25.10元


物 料 号 42235-00

# 第三版前言

这次对《高等代数(第二版)》(上册、下册)进行修订,主要在以下几方面:

**1. 更加突出了高等代数课程的主线:研究线性空间的结构及其态射(即线性映射)**

几何空间是实数域上的3维线性空间.物理学科中的闵可夫斯基空间是实数域上的4维线性空间,并且定义了一个非退化对称双线性函数作为内积.那么为什么要研究维数大于4的线性空间?促使我们研究维数大于4的线性空间的动力之一是直接从线性方程组的系数和常数项判断原方程组有无解,以及研究解集的结构.因此我们在上册第1章讲述线性方程组的解法;第2章为了研究 $n$ 个方程的 $n$ 元线性方程组有唯一解的充分必要条件,讲述了 $n$ 阶行列式的概念和性质;第3章讲述数域 $K$ 上的 $n$ 维向量空间 $K^n$ 及其子空间的结构,从而得出了线性方程组有解的充分必要条件,以及解集的结构.在下册的第8章详细研究了域 $F$ 上线性空间的结构.在第10章研究了具有度量的线性空间(欧几里得空间,酉空间,正交空间和辛空间)的结构.

线性空间为研究数学学科和物理学科以及经济学科等的众多问题提供了广阔的天地.而线性映射好比是在线性空间这个广阔天地里驰骋的一匹匹骏马.我们在下册的第9章详细研究了线性映射(包括线性变换和线性函数)的运算、整体结构和矩阵表示;在第10章研究了在具有度量的线性空间上的与度量有关的线性变换的性质.为了给研究线性映射打下基础,也由于矩阵在许多领域中有广泛的应用,因此我们在上册第4章讲述了矩阵的运算;在第5章讲述了矩阵的相抵分类、相似分类;在第6章讲述了矩阵的合同分类和二次型.为了给研究线性变换的最简单形式的矩阵表示打下基础,也由于一元多项式和多元多项式在许多领域有重要应用,我们在下册第7章研究了数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$ 的结构及其通用性质(即态射),以及 $n$ 元多项式环的结构及其通用性质;并且在第7章从整数集 $\mathbf{Z}$,偶数集 $2\mathbf{Z}$,数域 $K$ 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$,以及数域 $K$ 上所有 $n$ 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 都有加法和乘法运算,以及它们满足的运算法则的共同点,抽象出环的概念;在第7章的最后一节从星期这一熟悉的现象引出模 $m$ 剩余类环的概念,从模7剩余类环 $\mathbf{Z}_7$ 和数域的共同点引出域的概念,从 $\mathbf{Z}_7$ 与数域的不同点引出域的特征的概念.于是我们在下册第8章和第9章讲的是任意域上的线性空间及其线性映射,这是信息时代的需要.

**2. 充分展示了数学的思维方式**

数学这门学科以抽象思维和逻辑思维著称，但是这些不是数学思维的全部．数学的思维方式是一个全过程：观察客观现象，提出要研究的问题，抓住主要特征，抽象出概念，或者建立模型；运用“解剖麻雀”、直觉、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索，猜测可能有的规律；采用公理化的方法，只使用公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理来严密论证，揭示出事物的内在规律，从而使纷繁复杂的现象变得井然有序．

按照“观察—抽象—探索—猜测—论证”这一数学的思维方式讲授数学知识，就可以使同学们比较容易地学好数学，而且从中受到数学思维方式的熏陶和训练，这对于同学们今后从事任何工作都有帮助，终身受益．

我们在讲高等代数的概念和定理时，往往是首先观察几何空间中的例子，由此引出高等代数的概念，猜测可能有的结论，寻找证明结论的思路．

由于数学的论证只能是从公理、定义和已经证明了的定理进行逻辑推理，因此我们在写本套教材时有一个严密的理论体系，一环扣一环．只要把前面学过的概念和定理（包括命题、推论、引理、公式、性质等）理解清楚了，记在脑子里了，那么在讲新的定理或做习题时，通过深入分析，就能从脑子里调出学过的概念和定理（包括已经做过的习题的结论），进行逻辑推理给予严密的证明．

**3. 写进了作者的一些独到的科学见解**

我们给出了行列式按 $k$ 行（或 $k$ 列）展开的拉普拉斯定理一个比较简洁的证明，详见上册第 2 章 §6．

我们给出了数域 $K$ 上 $n$ 元线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

有解的充分必要条件是 $\beta$ 属于由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 生成的子空间 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\rangle$．这促使我们去研究 $K^n$ 中由给定的向量组生成的子空间的结构．而为了研究由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间 $W$ 的结构，我们希望在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中找到一个部分组是线性无关的，并且 $W$ 中每个向量可由这个部分组线性表出，这时表出方式就唯一了．表法唯一有很多好处．由这个想法我们引出了向量组的极大线性无关组的概念．像这个例子那样，我们在讲一个重要概念时，总是要先讲一两个例子或目的，然后才引出这个概念．

我们在第 4 章 §3 证明了两个 $n$ 级矩阵的乘积的行列式等于它们的行列式的乘积之后，提出问题：若 $A,B$ 分别是 $s\times n,n\times s$ 矩阵，则 $|AB|$ 等于什么呢？我们先解剖一个“麻雀”：设

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\\ b_3 & d_3\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 & c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3 \end{pmatrix}.$$

这启发我们把$(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}},(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}},(c_1,c_2,c_3)^{\mathrm{T}},(d_1,d_2,d_3)^{\mathrm{T}}$分别看成是几何空间中向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$的右手直角坐标，然后运用解析几何中的拉格朗日恒等式得

$$\begin{aligned}|AB| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \left(-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)\left(-\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}\right) + \\ &\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1,2\\1,3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1,3\\1,2\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1,2\\2,3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2,3\\1,2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此受到启发，猜测当$s<n$时，有

$$|AB| = \sum_{1\leqslant\nu_1<\cdots<\nu_s\leqslant n} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ \nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s\\ 1,2,\cdots,s\end{pmatrix}.$$

上式就是 Binet-Cauchy 公式. 我们在第 4 章 §5 运用分块矩阵的初等行变换以及拉普拉斯定理给出了证明.

我们在下册第 7 章 §1 从数域$K$到$K[x]$中所有零次多项式添上零多项式组成的集合$S$的一个映射：$a\longmapsto a$（即非零数$a$对应到零次多项式$a$，数 0 对应到零多项式 0），以及从数域$K$到$M_n(K)$中所有数量矩阵组成的集合$W$的一个映射：$k\longmapsto kI$，都是双射，且都保持加法与乘法运算，抽象出环同构映射的概念. 然后观察在$K[x]$中，

$$(2x+3)(x+5)=2x^2+13x+15; \tag{1}$$

设$A\in M_n(K)$，在由$A$的所有多项式组成的集合$K[A]$中有

$$\begin{aligned}(2A+3I)(A+5I) &= 2A^2+10AI+3IA+(3I)(5I)\\ &= 2A^2+13A+15I.\end{aligned} \tag{2}$$

(2)式的计算过程与(1)式的计算过程类似，这促使我们想：能不能不必进行(2)式的计算过程，而从(1)式中，$x$用矩阵$A$代入，每一项的系数换成它在$K$到$W$的环同构映射$k\longmapsto kI$下的象，就直接得到(2)式呢？由此受到启发，我们猜测并且证明了下述结论：

**定理 1**（一元多项式环$K[x]$的通用性质） 设$K$是一个数域，$R$是一个有单位元$1'$的交换环，并且$K$到$R$的一个子环$R_1$（它含有$1'$）有一个环同构映射$\tau$.

任意给定 $t\in R$,令

$$\sigma_t:\qquad K[x]\to R$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mapsto\sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i\xlongequal{\text{def}}f(t),$$

则 $\sigma_t$ 是 $K[x]$ 到 $R$ 的一个映射,$\sigma_t(x)=t$,并且 $\sigma_t$ 保持加法与乘法运算,即如果

$$f(x)+g(x)=h(x),\quad f(x)g(x)=p(x),$$

那么有

$$f(t)+g(t)=h(t),\quad f(t)g(t)=p(t).$$

我们把映射 $\sigma_t$ 称为 **$x$ 用 $t$ 代入**.

$K[x]$,$K[A]$(其中 $A$ 是 $K$ 上任一 $n$ 级矩阵)都可以作为上述定理 1 中的环 $R$,因此不定元 $x$ 可以用 $K[x]$ 中的任一多项式代入,也可以用 $K[A]$ 中任一矩阵代入,从 $K[x]$ 中已知的有关加法和乘法的等式,得到 $K[x]$ 中新的等式,以及得到 $K[A]$ 中有关加法和乘法的等式.这对于研究一元多项式环 $K[x]$ 的结构,以及研究线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示($x$ 也可以用 $\boldsymbol{A}$ 代入)起了十分重要的作用.

我们在下册第 7 章 §2, §3, §5 分别指出并且证明了:整除性不随数域的扩大而改变,首项系数为 1 的最大公因式不随数域的扩大而改变,互素性不随数域的扩大而改变,有无重因式不随数域的扩大而改变.这些结论有重要作用.

我们在下册第 8 章阐述了研究线性空间的结构的 4 条途径:

第 1 条途径是基.只要知道了域 $F$ 上线性空间 $V$ 的一个基,那么 $V$ 中每一个向量 $\alpha$ 可以由这个基中的有限多个向量线性表出,且表法唯一.

第 2 条途径是子空间的直和.如果域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$,那么 $V_1$ 的一个基,$V_2$ 的一个基,$\cdots$,$V_s$ 的一个基合起来是 $V$ 的一个基;反之也成立.

第 3 条途径是线性空间的同构.域 $F$ 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.从而域 $F$ 上任一 $n$ 维线性空间 $V$ 都与 $F^n$ 同构,在 $V$ 中取一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,把 $V$ 中每个向量 $\alpha$ 对应到它在此基下的坐标的映射就是 $V$ 到 $F^n$ 的一个同构映射.

第 4 条途径是商空间.设 $W$ 是域 $F$ 上线性空间 $V$ 的一个子空间,如果商空间 $V/W$ 的一个基为

$$\beta_1+W,\beta_2+W,\cdots,\beta_t+W,$$

令 $U=\langle\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\rangle$,那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 $U$ 的一个基,并且 $V$ 有一个直和分解:$V=W\oplus U$.这是可以利用商空间研究线性空间的结构的道理之一.对于 $n$ 维线性空间 $V$ 的非零子空间 $W$,由于 $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$,因此 $\dim(V/W)<\dim V$.从而我们可以利用数学归纳法来证明线性空间中有关被商空间继承的性质的结论.这是可以利用商空间研究线性空间的结构的道理之二.

我们在下册第 9 章 §3 后面的阅读材料六中，从几何空间 $V$ 中，设 $U$ 是过定点 $O$ 的一个平面，$W$ 是过点 $O$ 的一条直线且不在 $U$ 内，平行于 $W$ 在 $U$ 上的投影 $\boldsymbol{P}_U$，平行于 $U$ 在 $W$ 上的投影 $\boldsymbol{P}_W$ 都是幂等变换且是正交的；而 $\boldsymbol{P}_U+\boldsymbol{P}_W=\boldsymbol{I}$ 也是幂等变换，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_U+\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_W=\operatorname{rank}\boldsymbol{I}$，受到启发，猜测有下述结论：

**定理 2** 设 $V$ 是数域 $K$ 上的 $n$ 维线性空间，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是 $V$ 上的线性变换，则 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 是两两正交的幂等变换当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s$ 是幂等变换，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_2+\cdots+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_s$.

我们先证相应的矩阵的结论. 必要性通过直接计算立即得出 $A$ 是幂等矩阵，然后利用数域 $K$ 上幂等矩阵的秩等于它的迹证出 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_s$. 关于充分性，我们先运用线性空间的同构求出了 $AM_n(K)$ 的维数；然后在 $A=A_1+\cdots+A_s$ 且 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_s$ 的条件下证明了 $AM_n(K)$ 有直和分解：$AM_n(K)=A_1M_n(K)\oplus\cdots\oplus A_sM_n(K)$；最后利用 $AM_n(K)$ 的直和分解式一举证出了 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两正交的幂等矩阵.

然后利用数域 $K$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 中取定一个基后，$V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 对应到它在这个基下的矩阵 $A$ 的映射 $\boldsymbol{\sigma}$ 是双射，且保持加法、数量乘法与乘法运算，立即证出了定理 2.

我们在研究域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的不可以对角化的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示时，途径是把 $V$ 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的非平凡不变子空间的直和，此时 $\boldsymbol{A}$ 在 $V$ 的适当基下的矩阵 $A$ 是分块对角矩阵. 如何得到 $\boldsymbol{A}$ 的一些非平凡不变子空间呢？由于对于 $F[x]$ 中任一多项式 $g(x)$，有 $\operatorname{Ker}g(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间，因此为了得到 $V$ 的这样的直和分解，引出了 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的概念，进而引出了 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的概念. 若 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

则

$$V=\operatorname{Ker}m(\boldsymbol{A})=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})^{l_1}\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I})^{l_s}.$$

记 $W_j=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j}$，$j=1,2,\cdots,s$，则 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$. 在 $W_j$ 中取一个基，$j=1,2,\cdots,s$，它们合起来是 $V$ 的一个基，$\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$，其中 $A_j$ 是 $\boldsymbol{A}|W_j$ 在 $W_j$ 的上述基下的矩阵，$j=1,2,\cdots,s$. 为了使 $A$ 最简单，就应当使每个 $A_j$ 最简单. 利用唯一因式分解定理可证出 $\boldsymbol{A}\mid W_j$ 的最小多项式是 $(\lambda-\lambda_j)^{l_j}$，从而

$$\boldsymbol{A}\mid W_j=\lambda_j\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_j,$$

其中 $\boldsymbol{B}_j$ 是 $W_j$ 上的幂零指数为 $l_j$ 的幂零变换. $\boldsymbol{B}_j$ 在 $W_j$ 的上述基下的矩阵 $B_j=A_j-\lambda_jI$. 于是为了使 $A_j$ 最简单，就应使 $B_j$ 最简单. 这样问题归结为幂零变换的最简单形式的矩阵表示.

设 $\boldsymbol{B}$ 是域 $F$ 上 $r$ 维线性空间 $W$ 上的幂零变换，且幂零指数为 $l$. 对于任意

$\alpha\in W$且$\alpha\neq 0$，由于$\boldsymbol{B}^l=\boldsymbol{0}$，因此存在正整数$t$使得$\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha\neq 0$，而$\boldsymbol{B}^t\alpha=0$. 于是$\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha,\alpha$线性无关. 从而它是子空间$\langle \boldsymbol{B}^{t-1}\alpha,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha,\alpha\rangle$的一个基，这个子空间是$\boldsymbol{B}$不变子空间，称它为一个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间. 由于$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha)=\boldsymbol{B}^t\alpha=0$，因此$\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha$是$\boldsymbol{B}$的属于特征值0的一个特征向量. 我们把$\boldsymbol{B}$的属于特征值0的特征子空间记作$W_0$. 对于任意$\boldsymbol{\eta}\in W_0$，有$\boldsymbol{B\eta}=0$. 于是$\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$是一个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间. 有可能$\boldsymbol{\eta}$是某一个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间的第一个基向量$\boldsymbol{B}^{t-1}\alpha$. 当$t=1$时，这个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间就是$\langle\boldsymbol{\eta}\rangle$. 假如$W$能分解成若干个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间的直和：

$$W=\langle \boldsymbol{B}^{t_1-1}\alpha_1,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_1,\alpha_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle \boldsymbol{B}^{t_s-1}\alpha_s,\cdots,\alpha_s\rangle\oplus\langle\boldsymbol{\eta}_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\boldsymbol{\eta}_q\rangle,$$

则向量组$\boldsymbol{B}^{t_1-1}\alpha_1,\boldsymbol{B}^{t_2-1}\alpha_2,\cdots,\boldsymbol{B}^{t_s-1}\alpha_s,\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_q$线性无关，它们都属于$W_0$. 又由于对于任意$\boldsymbol{\eta}\in W_0$，$\boldsymbol{\eta}$都属于某一个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间. 因此我们猜测上述向量组是$W_0$的一个基，从而猜测有下述结论：

**定理3** 设$\boldsymbol{B}$是域$F$上$r$维线性空间$W$上的幂零变换，其幂零指数为$l$，$\boldsymbol{B}$的属于特征值0的特征子空间记作$W_0$，则$W$能分解成$\dim W_0$个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间的直和.

我们对线性空间的维数$r$作第二数学归纳法，运用上面所讲的利用商空间研究线性空间的结构的两个道理，证明了定理3. $\boldsymbol{B}$在每个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间$\langle \boldsymbol{B}^{t_j-1}\alpha_j,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_j,\alpha_j\rangle$上的限制在基$\boldsymbol{B}^{t_j-1}\alpha_j,\cdots,\boldsymbol{B}\alpha_j,\alpha_j$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

称它为一个主对角元为0的$t_j$级Jordan块，记作$J_{t_j}(0)$. 在$W$的上述直和分解式中，每个$\boldsymbol{B}$-强循环子空间取上述基，它们合起来是$W$的一个基，$\boldsymbol{B}$在此基下的矩阵$B$是由这些Jordan块组成的分块对角矩阵，称它为一个Jordan形矩阵，把$B$称为$\boldsymbol{B}$的一个Jordan标准形. 我们给出了$B$中Jordan块的总数的公式，以及$t$级Jordan块的个数$N(t)$的计算公式. 由于它们都由$\boldsymbol{B}$的方幂的秩决定，因此$\boldsymbol{B}$的Jordan标准形除去Jordan块的排列次序外是唯一的.

从前面所讲的研究$V$上线性变换$\boldsymbol{A}$的最简单形式的矩阵表示的途径，以及上述幂零变换的Jordan标准形的结论，我们立即得到：若$\boldsymbol{A}$的最小多项式$m(\boldsymbol{\lambda})$在$F[\boldsymbol{\lambda}]$中能分解成一次因式的乘积，则$V$中存在一个基，使得$\boldsymbol{A}$在此基下的矩阵$A$为Jordan形矩阵，其主对角元为$\boldsymbol{A}$的全部特征值. 我们给出了主对角元为$\boldsymbol{\lambda}_j$的Jordan块的总数$N_j$的公式，以及其中$t$级Jordan块的个数$N_j(t)$的计算公

式. 由于它们都是由 $\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}$ 的方幂的秩决定,因此除去 Jordan 块的排列次序外, $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的. 我们进一步证明了:

**定理 4** 域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形的充分必要条件是, $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在域 $F$ 中有相同的根(重数可以不同),而且在域 $E(\supseteq F)$ 中也有相同的根(重数可以不同),因此也有下述结论:

域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积.

我们在下册的第 10 章讲述了研究实内积空间的结构的 3 条途径:

第 1 条途径是对于 $n$ 维欧几里得空间 $V$,证明它存在标准正交基. 标准正交基的优越性之一是计算 $V$ 中任意两个向量的内积非常容易,优越性之二是向量 $\alpha$ 的坐标的分量可以由内积给出(即 $\alpha$ 的 Fourier 展开).

第 2 条途径是利用实内积空间的子空间. 我们证明了:若 $U$ 是实内积空间 $V$ 的有限维子空间,则 $V$ 有这样的直和分解: $V=U\oplus U^{\perp}$. 于是当 $V$ 是有限维实内积空间(即欧几里得空间)时, $U$ 的一个标准正交基与 $U^{\perp}$ 的一个标准正交基合起来是 $V$ 的一个标准正交基. 当 $V=U\oplus U^{\perp}$ 时,有平行于 $U^{\perp}$ 在 $U$ 上的投影 $\boldsymbol{P}_U$,称它为 $V$ 在 $U$ 上的正交投影, $\alpha$ 在 $\boldsymbol{P}_U$ 下的象 $\alpha_1$ 称为 $\alpha$ 在 $U$ 上的正交投影. $\alpha_1\in U$ 是 $\alpha$ 在 $U$ 上的正交投影当且仅当 $d(\alpha,\alpha_1)\leqslant d(\alpha,\gamma)$, $\forall\gamma\in U$. 由此引出 $\alpha$ 在 $U$ 上的最佳逼近元的概念. 当 $U$ 是有限维时, $\alpha$ 在 $U$ 上的最佳逼近元存在且唯一,它就是 $\alpha$ 在 $U$ 上的正交投影.

第 3 条途径是实内积空间的同构. 两个有限维实内积空间(即欧几里得空间)同构的充分必要条件是它们的维数相同. 从而任一 $n$ 维欧几里得空间都与装备了标准内积的 $\mathbf{R}^n$ 同构,其中一个同构映射是把 $\alpha$ 对应到 $\alpha$ 在 $V$ 的一个标准正交基下的坐标. 我们指出,实内积空间 $V$ 到 $V'$ 的同构映射 $\sigma$ 的定义可以改成:"如果实内积空间 $V$ 到 $V'$ 有一个满射 $\sigma$ 使得 $\sigma$ 保持内积不变,那么 $\sigma$ 称为实内积空间 $V$ 到 $V'$ 的一个同构映射."这是因为从 $\sigma$ 保持内积不变可以推出 $\sigma$ 保持长度不变,从而可以证明 $\sigma$ 是 $V$ 到 $V'$ 的线性映射,并且 $\sigma$ 是单射,这样结合定义中 $\sigma$ 是满射,便得出 $\sigma$ 是双射.

我们在第 10 章 §4 讲述了实内积空间 $V$ 中与度量有关的变换:正交变换和对称变换. 从平面上的平移、旋转、轴反射的共同点引出了正交变换的概念:实内积空间 $V$ 到自身的满射 $\boldsymbol{A}$ 如果保持内积不变,那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 上的一个正交变换. 由于正交变换 $\boldsymbol{A}$ 保持内积不变,因此 $\boldsymbol{A}$ 保持向量的长度不变. 从而可以证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 上的线性变换,且 $\boldsymbol{A}$ 是单射,结合定义中 $\boldsymbol{A}$ 是满射得出 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. 于是实内积空间 $V$ 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 是正交变换当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 到自身的一个同构

映射.

我们从实内积空间 $V$ 在它的有限维子空间 $U$ 上的正交投影的性质引出了对称变换的概念:实内积空间 $V$ 上的一个变换 $\boldsymbol{A}$ 如果满足 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})$, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,那么称 $\boldsymbol{A}$ 是 $V$ 上的对称变换.我们证明了 $V$ 上的对称变换一定是线性变换.

我们从几何空间中的度量问题引出了实数域上的线性空间的内积的概念,研究了实内积空间.从数学的角度讲,自然要在复数域上的线性空间 $V$ 中引进内积的概念,研究复内积空间.但是我们不能满足于这点,我们还应该问:在什么背景下需要研究复数域上的线性空间及其上的内积?我们讲了一个例子:交流电路中复阻抗 $\boldsymbol{Z}$,它的模给出了这段交流电路的阻抗,它的一个辐角给出了这段电路的电压与电流的相位差.这表明物理学科中的不少问题用复数来刻画有优越性.因此我们需要研究复数域上的线性空间,引进内积的概念,研究复内积空间(即酉空间).我们讲述了复数域上的线性空间如何引进内积的概念,为什么不能是 $V$ 上的双线性函数,只能是对第一个变量是线性的;为了使 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 为实数,要求内积具有 Hermite(埃尔米特)性:$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\overline{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}$, $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$;还要求内积具有正定性.于是给出了复数域上的线性空间 $V$ 上的内积的定义.

我们在下册第 10 章 §4 的后面写了阅读材料七,探索 $n$ 维欧几里得空间 $V$ 上的正交变换 $\boldsymbol{A}$ 的最简单形式的矩阵表示是什么样子.基本思路仍是把 $V$ 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和.

我们在下册第 10 章 §6 的后面写了阅读材料八,探索并且证明了特征为 2 的域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 上的对称双线性函数的度量矩阵的最简单形式.

在这次修订中,我们增加了一些重要的习题,在书末给出了这些题的解答的详细提示.

本套教材从理论上,从数学系的后续课程以及物理等学科的需要上,精选了教学内容和习题.教学内容都是基础的、主要的内容,理论深刻,深入浅出;习题都是重要的题.这些教学内容的深度和广度以及习题的题量对于大学一年级的高等代数课程的教学是合适的.需要了解高等代数的更多内容和做更多习题的读者,可以看作者写的为本套教材配套的内容全面、例题和习题丰富的《高等代数学习指导书》(上册、下册)(丘维声编著,清华大学出版社,2005 年,2009 年).

本套书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校的高等代数课程的教材.

感谢高等教育出版社的李蕊编辑和田玲编辑,她们为本书的出版付出了辛勤的劳动.

真诚欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见.

丘维声
于北京大学数学科学学院
2014 年 6 月

# 第二版前言

高等代数课程是大学数学科学学院(或数学系、应用数学系)的主干基础课之一,在一年级上、下两个学期讲授.学生从中学进入大学,有一个学习方法的适应过程.中学阶段学习的数学都是比较具体的对象.我们因势利导,在本套教材中把高等代数研究的具体对象放在前半部分,而把抽象对象放在后半部分.在上册讲述线性代数研究的具体对象:线性方程组,数域 $K$ 上 $n$ 元有序数组的向量空间 $K^n$,矩阵的运算,$K^n$ 到 $K^s$ 的线性映射,欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$,矩阵的相抵关系、相似关系,矩阵的特征值和特征向量,二次型与矩阵的合同关系.在下册讲述多项式环,任意域上的线性空间,线性映射(包括线性变换和线性函数),具有度量的线性空间(包含欧几里得空间,酉空间,以及正交空间和辛空间).我们在近十年的教学实践中,采取上述教学内容体系,使广大学生比较顺利地学到了高等代数的理论和方法,提高了高等代数课的教学质量.

下册一开始(即第 7 章)讲多项式环.我们由浅入深把中学讲的多项式提高到数域 $K$ 上一元多项式的概念上.在讲了一元多项式的加法和乘法的定义以及它们满足的运算法则后,通过比较整数集 $\mathbf{Z}$、偶数集 $2\mathbf{Z}$、数域 $K$ 上所有一元多项式组成的集合 $K[x]$、数域 $K$ 上所有 $n$ 级矩阵组成的集合 $M_n(K)$ 之间的共同点,抽象出环的概念.接着讲述了数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$ 的通用性质:若 $R$ 是一个有单位元 $1'$ 的交换环,$R_1$ 是 $R$ 的一个子环,且 $1'\in R_1$,$K$ 到 $R_1$ 有一个双射 $\tau$ 保持加法与乘法运算,对于任意给定的 $t\in R$,令 $\sigma_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau(a_i)t^i$,则 $\sigma_t$ 是 $K[x]$ 到 $R$ 的映射,且 $\sigma_t$ 保持加法与乘法运算,称 $\sigma_t$ 是 $x$ 用 $t$ 代入.$K[x]$ 的这一通用性质表明,我们只要把一元多项式环 $K[x]$ 中有关加法与乘法的等式研究清楚了,通过不定元 $x$ 用环 $R$ 中任一元素 $t$ 代入,就可以得到环 $R$ 中有关加法与乘法的等式.于是我们在本章以研究一元多项式环 $K[x]$ 的有关加法与乘法的等式(即研究 $K[x]$ 的结构)为主线.首先讲了整除的概念和性质,讲了带余除法,讲了最大公因式与互素的概念和性质;然后讲了不可约多项式的概念和性质,唯一因式分解定理,重因式的概念和判别,接着分别决定了复数域、实数域上的所有不可约多项式,讲了有理数域上不可约多项式的判别.在讲完一元多项式环 $K[x]$ 后,我们又讲了多元多项式环,着重讲了对称多项式.本章的最后一节以模 4 剩余类环为例讲了模 $m$ 剩余类环,讲了域的概念,模 $p$ 剩余类域($p$ 是素

数),介绍了域的特征的概念.最后指出,类似于数域 $K$ 上的一元(多元)多项式,可以定义任一域 $F$ 上的一元(多元)多项式,并且有关数域 $K$ 上一元多项式环 $K[x]$ 的结论,只要在它的证明中没有用到这个域含有无穷多个元素,那么它对于任一域 $F$ 上的一元多项式环 $F[x]$ 也成立.此外,还需要注意,如果域 $F$ 的特征为素数 $p$,则 $F$ 的任一元素的 $p$ 倍都等于零.由上述看出,我们在处理多项式理论这一模块上,渗透了现代数学的观点:研究结构和态射(即保持运算的映射).由于我们在本章最后一节引进了域的概念,介绍了模 $p$ 剩余类域,因此,我们在后面各章中就可以讲任意域上的线性空间及其线性映射的理论,就可以讲任意域上的线性空间中如何引进度量概念.这种讲法是信息时代的要求,因为在信息的可靠与安全问题(例如,纠错编码与密码)中,需要用到有限域的知识,以及有限域上的线性空间的理论.

线性代数是研究线性空间和线性映射的理论.我们在上册讲了具体的线性空间:数域 $K$ 上 $n$ 元有序数组的向量空间 $K^n$;讲了具体的线性映射:$K^n$ 到 $K^s$ 的线性映射 $\boldsymbol{A}(\alpha)=A\alpha$,其中 $A$ 是数域 $K$ 上 $s\times n$ 矩阵.在下册我们讲抽象的线性空间:任意域 $F$ 上的线性空间;讲抽象的线性映射:域 $F$ 上线性空间 $V$ 到 $V'$ 的线性映射,其中包括域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的线性变换和线性函数.学生在大学学习了一个学期后,学习能力有了提高,这样我们就可以在下册讲线性空间时,不停留在线性空间的定义,以及线性相关和线性无关的定义上,而是以研究线性空间的结构为主线.在第 8 章的第 1 节,我们在讲了线性空间的定义和简单性质,以及线性相关和线性无关,极大线性无关组和向量组的秩的定义和性质之后,就着重研究线性空间的结构,指出任一线性空间的结构由它的一个基所决定,而维数对于研究有限维线性空间的结构起着重要作用.在 $n$ 维线性空间 $V$ 中取定一个基后,每一个向量都有它的坐标,且在不同基下的坐标之间有坐标变换公式.在第 2 节我们又利用子空间来刻画线性空间的结构,在讲了子空间的结构,子空间的交与和以及它们的维数公式之后,着重讲子空间的直和,如果 $V$ 的两个(或若干个)子空间的直和等于 $V$,那么这也刻画了 $V$ 的结构.在第 3 节我们从域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 与 $F^n$ 有相同的性质,引出线性空间同构的概念,推导出域 $F$ 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相同,于是域 $F$ 上有限维线性空间的同构类与非负整数之间有一个一一对应.由此看出,有限维线性空间的结构是如此简单!我们还讲了在域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 中,取定一个基后,向量到它的坐标的对应 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V$ 到 $F^n$ 的一个同构映射,并且 $V$ 的任一子空间 $U$ 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的象 $\boldsymbol{\sigma}(U)$ 与 $U$ 的维数相同.利用这个结论可以把对于域 $F$ 上任一 $n$ 维线性空间的性质的研究,归结为对于 $F^n$ 的性质的研究.我们通过例题与习题(包括以后几章的有关习题)让学生掌握这一方法.在第 4 节我们讲了商空间的概念及其维数公式.

在第9章我们讲线性映射(包括线性变换和线性函数)的理论. 首先从几何空间在 $xOy$ 平面上的正投影 $\boldsymbol{P}:(x,y,z)^{\mathrm{T}}\longmapsto(x,y,0)^{\mathrm{T}}$,以及连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 引出线性映射的概念;接着讲线性映射的运算,指出域 $F$ 上线性空间 $V$ 到 $V'$ 的所有线性映射组成的集合成为域 $F$ 上的一个线性空间,而域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的所有线性变换组成的集合既是域 $F$ 上的一个线性空间,又是一个有单位元的环,这是从总体上研究线性映射的结构. 其次我们又研究单个线性映射的结构. 一方面研究由 $V$ 到 $V'$ 的一个线性映射 $\boldsymbol{A}$ 决定的两个子空间:$\boldsymbol{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$(它是 $V$ 的一个子空间)和 $\boldsymbol{A}$ 的象 $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$(它是 $V'$ 的一个子空间),推导出线性映射的维数公式 $\dim V=\dim\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}+\dim\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$;另一方面研究域 $F$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵表示,以及 $V$ 到 $V'$ 的线性映射 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵表示,着重研究 $V$ 中是否存在一个基,使得线性交换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵具有简单的形式. 从线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的概念推导出,$\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $V$ 可以分解成 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间的直和. 而 $\boldsymbol{A}$ 的特征子空间 $V_{\lambda_i}$ 中每个向量在 $\boldsymbol{A}$ 下的象仍在 $V_{\lambda_i}$ 中,由此引出 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的概念,并且指出研究不可对角化的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的结构,其思路是研究 $V$ 能不能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间的直和. 由于对于任意 $f(x)\in F[x]$,都有 $\mathrm{Ker}\,f(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间,并且如果$f(x)$能分解成两两互素的多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 的乘积,则有

$$\mathrm{Ker}\,f(\boldsymbol{A})=\mathrm{Ker}\,f_1(\boldsymbol{A})\oplus\mathrm{Ker}\,f_2(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,f_s(\boldsymbol{A}),$$

且 $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{0}=V$,因此如果能找到一个多项式 $f(x)$,使得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,且 $f(x)$ 有上述分解,则 $V=\mathrm{Ker}\,f_1(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\,f_s(\boldsymbol{A})$. 于是引出 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式的概念,进而引出 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的概念. 利用 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(x)$ 在 $F[x]$ 中的因式分解,研究了 $\boldsymbol{A}$ 在 $V$ 的适当基下的矩阵的简单形式:如果 $m(x)$ 在 $F[x]$ 中能分解成一次因式的乘积,则 $V$ 中存在一个基,使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为 Jordan 形矩阵,称它是 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形. 在证明这一结论时,我们把它归结为研究幂零变换的结构. 此外,我们把线性函数也放在第9章中,因为域 $F$ 上线性空间 $V$ 上的线性函数 $f$ 就是 $V$ 到 $F$ 的一个线性映射,这样我们可以把有关线性映射的结论直接用到线性函数的性质和线性函数空间($V$ 的对偶空间)的结构的研究上.

在第10章我们讨论如何分别在实数域、复数域、任意域上的线性空间中引进度量概念,研究具有度量的线性空间的结构,并且研究与度量有关的线性变换的性质. 在这一章的第1节讲双线性函数的概念和性质,以及对称双线性函数和斜对称双线性函数的结构. 第2节对于实数域上的线性空间 $V$,把 $V$ 上的一个正定对称双线性函数称为 $V$ 上的一个内积;$V$ 上如果给定了一个内积,则称 $V$ 是一个实内积空间,有限维的实内积空间称为欧几里得空间. 在实内积空间 $V$ 中,可以引进长度、角度、正交、距离等度量概念;在欧几里得空间 $V$ 中,存在标准正交

基，它比一般的基有许多优越之处：计算内积简单，向量的坐标的分量可以用内积表达. 第 3 节利用有限维子空间 $U$ 及其正交补 $U^{\perp}$ 来刻画实内积空间 $V$ 的结构：$V=U\oplus U^{\perp}$，由此引出正交投影的概念，并介绍其应用. 第 4 节研究实内积空间中的正交变换和对称变换. 第 5 节讨论在复数域上的线性空间中如何引进内积的概念，给定了一个内积的复线性空间称为酉空间. 有关实内积空间的许多结论可以平行搬到酉空间上. 第 6 节讨论如何在任意域上的线性空间中引进度量概念：域 $F$ 上线性空间 $V$ 如果指定了一个对称双线性函数 $f$，则称 $V$ 是一个正交空间；如果指定了一个斜对称双线性函数，则称 $V$ 是一个辛空间. 这一节加了 * 号，不必在课堂上讲，供有兴趣的学生自己阅读.

我们还写了五个阅读材料，前三个是关于整数环中的带余除法，最大公因数，唯一因子分解定理. 阅读材料四是利用有限维线性空间同构的充分必要条件证明有限域的元素个数是一个素数的方幂. 阅读材料五是利用线性空间的子空间及其陪集讨论线性码的编码和译码方法. 这些阅读材料不必在课堂上讲，供学生自己阅读.

下册的第二版比第一版在内容上作了精选，由原来共八章精选成四章，着重讲述最基本的和应用广泛的内容. 对于每一节配备的习题也作了精心挑选，在书末附有习题解答和提示.

我们认为高等代数课程的教学目标，既要让学生掌握这门课程的基础知识和基本方法，又要培养他们具有数学的思维方式. 只有按照数学的思维方式去学习数学，才能学好数学；而且学会数学的思维方式，有助于他们把今后肩负的工作做好，从而使他们终身受益. 本书按照数学的思维方式编写每一节的内容，使学生在学习高等代数知识的同时，受到数学思维方式的熏陶，日积月累地培养学生的数学思维方式.

本书（上册和下册）可作为综合大学、理工科大学和师范院校的数学科学学院（或数学系、应用数学系等）的高等代数课程的教材. 上册供第一学期使用，下册供第二学期使用. 每学期的周学时可为 4+2 或 4+1 或 4（4+2 是指每周讲课 4 学时，习题课 2 学时，4+1 的含意类似）.

作者衷心感谢本书的责任编辑李蕊和胡乃冏同志，他们为本书的编辑出版付出了辛勤劳动.

作者热诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

丘维声
于北京大学数学科学学院
2003 年 4 月

# 第一版序言

为了把学生培养成为面向21世纪的高水平人才，作者积多年讲授高等代数、抽象代数和群表示论等课程的经验以及从事科研工作的体会，写了一套高等代数讲义，用这套讲义给北京大学数学系和概率统计系94级学生讲授高等代数课，取得了很好的教学效果. 接着又给这两个系的95级学生讲授此课，进一步修改这套讲义，现分上、下两册出版.

这套教材从我国的实际情况出发，面向21世纪，尝试对高等代数的教学内容进行一些改革，主要有以下几方面：

努力使教材现代化. 21世纪的人才需要掌握现代数学的思想和方法. 为此，本书注意渗透现代数学的一些基本思想和观点. 例如，用等价关系把集合划分的思想，从代数结构着眼处理问题的思想，同构分类的思想，态射(保持运算的映射)的观点等. 用现代的观点组织和讲授传统的教学内容. 例如，通过讨论子空间的结构证明线性方程组有解判别定理；按照矩阵的相抵关系、相似关系、合同关系分别讨论矩阵的相抵分类、相似分类和合同分类，并且寻求每一种关系下的完全不变量；运用线性空间的同构分类思想证明域 $F$ 上任一 $n$ 维线性空间 $V$ 与它的对偶空间 $V^*$ 同构，以及 $V$ 与它的双重对偶空间 $V^{**}$ 同构；在讲一元多项式的概念时，用态射的观点阐述一元多项式环的通用性质；用环同构的观点讨论数域 $K$ 上的多项式与多项式函数之间的关系，等等. 本书还注意渗透现代数学的一些基本概念. 例如，线性流形、商集等概念；结合高等代数的具体对象水到渠成地先后引进了抽象代数的一些基本概念：在一元多项式的概念之后引进环的概念；在讲完多项式环之后引进任意域和有限域的概念，以及域的特征的概念；在讲了线性变换的运算后引进域上的代数的概念；在最后一章当学生已经熟悉了正交变换、酉变换和辛变换的性质后，引进群和子群的概念.

力图在教材中体现代数与几何、分析的联系. 21世纪的数学，分析、代数、几何将会更加相互渗透和有机结合. 因此要使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、分析联系起来的能力. 书中注意从几何直观或分析背景引出高等代数讨论的问题，在讲述高等代数的概念时列举几何或分析的例子，把高等代数的结论应用于解决几何或分析的问题. 例如，介绍了行列式的几何意义；从几何空间的结构引出向量空间的基的概念；运用线性方程组的理论解决一些几何问题；从平面旋转的合成引出矩阵乘法的定义；从二次曲面方程的化简引出实对称矩阵的对角化以及实二次型通过正交替换化成标准形的问题，并且运用所得到