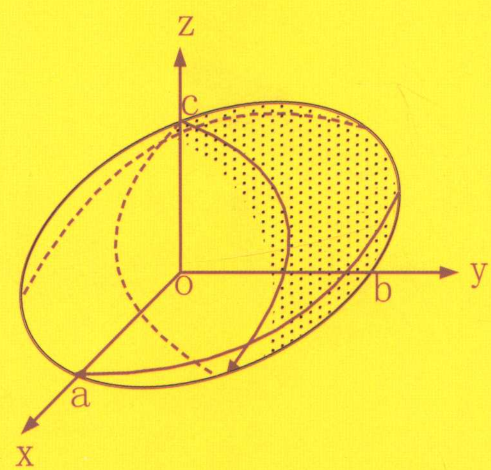
椭球函数札记

梁昌洪 著



科学出版社

椭球函数札记

梁昌洪 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

椭球函数是现有圆函数(三角函数)和椭圆函数的发展和拓广。椭球函数的实用背景有椭球导体的电容和椭球表面积,它们分别对应第1类和第2类椭球积分。本书深入讨论了椭球函数(代数)理论和椭球函数保角映射(几何)理论。具体设计出性能优越的椭球函数响应滤波器。书中附录也可以给广大工程技术人员带来极大方便。

本书适合理工类本科生和硕士、博士研究生学习使用,也可以作为相关专业的广大科技和工程人员的入门读物和工具书。

图书在版编目(CIP)数据

椭球函数札记/梁昌洪著.—北京:科学出版社,2014.10

ISBN 978-7-03-042160-9

Ⅰ.①椭…　Ⅱ.①梁…　Ⅲ.①椭球—积分　Ⅳ.①O172.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第238933号

责任编辑:余丁 / 责任校对:陈玉凤

责任印制:肖兴 / 封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年10月第　一　版　开本:720×1000 1/16

2014年10月第一次印刷　印张:4 3/4

字数:83 000

定价:30.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序　言

圆、椭圆、球、椭球是我们常常遇到的几何形体，在科学研究或工程技术中，往往要求处理与这些形体相关的许多问题。例如，地球的形状颇为复杂，在大地测量学中常用比较简单的“参考椭球”替代，在其表面上进行种种计算，划定经纬度坐标、定出海拔。在电磁学中，一个著名的经典问题是，以恒定速度运动的点电荷所产生的电场和磁场的计算。早在 1888 年亥维赛德(Heaviside)就导出了有关公式，此后不断有人在不同的假设下或从不同的途径进行了类似的计算。尽管方法有所不同，但共同的结论是，沿着运动的方向电场有所压缩，或场产生了一定的形变而成为椭球，并被称为亥维赛德椭球。在讨论电磁波传播或光学问题时，我们常遇到介电特性是各向异性的材料。如果取一小方块这种材料放在直角坐标系中，并使其各边分别沿着 X、Y、和 Z 轴。在这些方向上测得的介电常数的平方根，即代表电位移矢量沿相应轴线的电磁波的折射指数。把这些沿着轴向的折射指数作为轴长画出的椭球即为著名的费涅尔(Fresnel)椭球，或即折射指数椭球，可方便地描述电磁波在该材料里沿各个方向传播时的特性。至于椭圆或椭圆柱式的结构，例子就更多了。研究电磁场问题的读者首先想到的，恐怕是朱兰成(Lan Jen Chu)早在 1938 年完成的关于椭圆截面波导的奠基性的工作，以及此后数十年中不断涌现的种种椭圆波导元部件产品。在数学物理方法的许多方面，椭圆函数所起的作用更是无需多说的。

如果说，圆、球及相关的函数、理论方法比较简单、比较成熟的话，椭圆、椭球的研究要复杂得多，新手上路需要更多的引导和帮助。正是由于这个原因，我看到梁昌洪教授的新作《椭球函数札记》时，感到十分高兴。针对研究电磁场问题的读者，该书在内容的安排上独具匠心。首先从最简单的圆和三角函数说起，逐步过渡到椭圆积分，进而带领读者初识椭球积分。在完成了这第一步的过渡后，数学上的深入稍稍放缓，话锋转向讨论椭圆和椭球形体里的几个具体的电磁学实例，并以矩量法的计算与之对比、相互印证，使读者始终是“接地气”的，始终站在自己的专业里学数学。在读者舒过一口气之后，作者又带领他们掀起了学习数学的第二个高潮，详细论述了椭球函数理论及其保角映射，最后又落实到椭球函数网络和滤波器等具体的电磁场问题上来。这样的安排，完全符合有关专业领域内高年级大学生和低年级研究生的思维方式和已有的知识结构。全书文字精炼、叙述清楚，是一本理想的工程数学读物。

利用椭球函数等处理具体问题时，既需要理论上的严格、完备，也需要大量的

数值计算、图表、曲线。本书所展现的理论风范，加上目前广泛采用的 MATLAB 等实用工具，将成为读者的双翼，帮助你们飞抵成功的彼岸。

该书是梁昌洪教授在工程数学领域里继《矢算场论札记》和《复变函数札记》等书之后推出的又一本著作。他数十年如一日，精心治学、笔耕不辍、成果丰硕，令人钦佩。我深信，本书的出版必将又一次推动我国电磁场问题的研究。同时，我也祝贺梁昌洪教授学术之树常青。

吴培亨
中国科学院院士、南京大学教授

前　言

本书是作者的第五本工程数学札记，前四本分别是《矢算场论札记》(科学出版社，2007)、《复变函数札记》(科学出版社，2011)、《矩阵论札记》(科学出版社，2014)和《概率论札记》(科学出版社，2014)。至此，这一系列初步告一段落。很容易看出，尽管每本札记涉及的领域完全不同，但是它们有着统一的追求目标——希望在数学和工程之间架设起一座可以自由跨越的桥梁，使读者在今后的学习和工作中得到真正的裨益。

本书的核心主题是椭球函数。它是现有的圆函数(三角函数)、椭圆函数的大幅度拓广。如果把圆函数、椭圆函数和椭球函数比喻成三座高峰，那可以看出它们一座比一座高，一座比一座雄伟。

椭球函数属于特殊函数领域。一提及特殊函数，很多读者都会因为它的抽象复杂而“退避三舍”。本书的第一特点，也可以说是最大特点是从最实际、最具体的应用例子，引出最复杂的椭球函数，而且最初是由讨论椭圆积分着手。

椭球积分有两大类。首先，我们以第 1 类椭球积分作为例子。圆积分对应圆盘导体的电容；第 1 类椭圆积分对应椭圆盘导体的电容；而第 1 类椭球积分则对应椭球导体的电容。这样的方式讨论不仅通俗具体，而且它们一个包含另一个，也即

$$第1类椭球积分\supset第1类椭圆积分\supset圆积分$$

我们再来看第 2 类椭球积分。圆积分对应圆盘的表面积；第 2 类椭圆积分对应椭圆盘的表面积；而第 2 类椭球积分则对应椭球的表面积。十分明显，它们也是一个包含另一个，即

$$第2类椭球积分\supset第2类椭圆积分\supset圆积分$$

本书的第二个特点是非常注意代数和几何的紧密结合，书中深入详尽地讨论了椭球函数(代数)理论和椭球函数的保角映射(几何)理论。后者还不是一般的几何理论，而是椭球函数的复几何理论，为其深入应用创造了最直观的背景。

最后，本书的第三个特点也是工程数学的最主要目标——落实到具体的工程问题上。在本书中，我们建立了椭球函数网络和三带滤波器(通带、过渡带和阻带)模型。最后，以具体实例设计出性能优越的椭球函数滤波器。换句话说，我们以椭球函数作为例子，跨越了工程数学该走的一条道路。

至此，作者想冒昧地进一步讨论本套书的一个核心思想。创业、创新、创造已成为当前十分时髦的词汇。但是，我们必须指出，它不是一种形式、一句套话和一

个装饰。它是我们做每一件事应有的态度、追求的目标和坚持不懈的努力，我们应把它时时记在心上。创新不计大小，这套书的撰写过程正是遵循这一思想的过程。作为例子，矢量除法、复算子和极化网络等都是如此。思想开放、内容多彩和文字通俗是这套书的不懈追求。

虽然作者尽了很多努力，但是书中缺点和不足在所难免，热诚期待专家和读者批评指正，以使这套书质量进一步的提高。

最后，作者在此由衷地感谢吴培亨院士的帮助并赐序。

目录

第 1 章　从圆积分到椭球积分

1.1　从圆到椭球

圆、椭圆和椭球是我们在工程中经常遇到的三种几何图形。具体如图 1-1 所示。

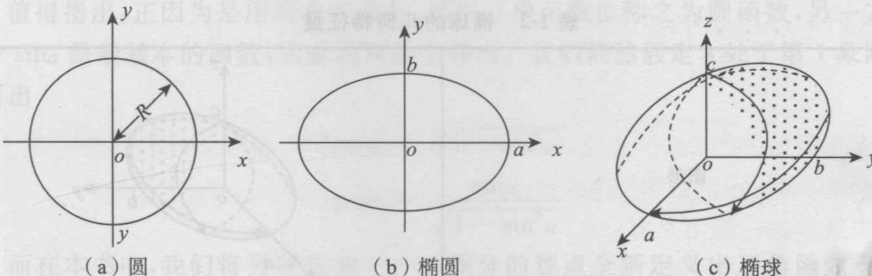


图 1-1　圆、椭圆和椭球

首先，我们观察到上面三者在几何上维数不尽相同：十分明显，圆和椭圆是 2 维图形，而椭球则是 3 维结构。

其次，从对称性角度加以考察：圆是对称的 2 维图形，椭圆是不对称的 2 维图形；而椭球则是不对称的 3 维结构（在 3 维空间中，对称结构是球）。

在图 1-1 中所画出的三种几何图形，所对应的代数方程分别是

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{（圆）} \tag{1-1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{（椭圆）} \tag{1-2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{（椭球）} \tag{1-3}$$

我们在表 1-1 和表 1-2 中列出了这三种结构的几何特征量。从表中清楚看出：正是在研究椭圆和椭球的几何特征量过程中，产生出某类新积分的前沿思想，这也是本书的一个重点。作为题外话：一直是中华民族骄傲的古代 π 研究也是在圆的几何特征量中产生的。

表 1-1 圆和椭圆的几何特征量

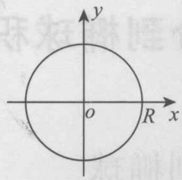
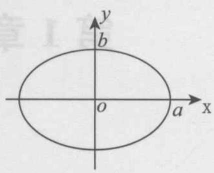
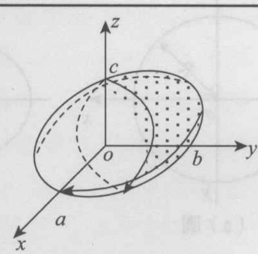
	圆	椭圆
图形		
周长	$2\pi R$	第 2 类椭圆积分表示
面积	πR^2	πab

表 1-2 椭球的几何特征量

图形	
表面积	第 2 类椭球积分*
体积	$\frac{4}{3}\pi abc$

*这正是本书后面要讨论的问题之一。

1.2 从圆积分和椭圆积分到椭球积分

三角函数是人们广为熟悉的一类函数,有着极为广泛的实际应用。最初它们是由单位圆给出定义的,见图 1-2 所示。

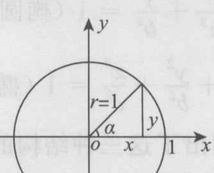


图 1-2 由单位圆定义三角函数

这里,直接写出第 1 象限(即 $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$)的三角函数定义

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{y}{r} & (1\text{-}4) \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} & (1\text{-}5) \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x} & (1\text{-}6) \end{cases}$$

在该定义中，第 1 象限并不失一般性；同时，r 是否为 1，即是否是单位圆也是无所谓的。显见有

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & (1\text{-}7) \\ 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} & (1\text{-}8) \end{cases}$$

值得指出：正因为是用圆来定义的，所以三角函数也称之为圆函数，另一方面，其中 $\sin\alpha$ 是最基本的函数，其余均可由它导出。我们依然假定 α 处于第 1 象限，容易写出

$$\begin{cases} \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} & (1\text{-}9) \\ \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} & (1\text{-}10) \end{cases}$$

而在本书中，我们将另辟思路——从积分的观点全新定义出三角函数——也即圆函数。大家知道

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x \tag{1-11}$$

我们正由此着手给出圆函数的新定义。

【定义】　正弦圆函数 $\sin\alpha$ 定义为

$$\alpha = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x \tag{1-12}$$

则有

$$\begin{cases} x = \sin\alpha & (1\text{-}13) \\ \cos\alpha = \sqrt{1-x^2} & (1\text{-}14) \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & (1\text{-}15) \end{cases}$$

这种定义称之为圆函数。由此很容易推广到椭圆积分。

【定义】　椭圆正弦表示为 $S_n(u,k)$。

已知一般椭圆积分

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}, \tag{1-16}$$

式中，椭圆参量为

$$0 \leqslant k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \leqslant 1 \tag{1-17}$$

已按习惯令 $a \geqslant b$，定义

$$\begin{cases} x = S_n(u,k) & (1\text{-}18)\\ C_n(u,k) = \sqrt{1-x^2} & (1\text{-}19)\end{cases}$$

满足

$$S_n{}^2(u,k) + C_n{}^2(u,k) \equiv 1 \tag{1-20}$$

也引出椭圆 Δ 函数 $d_n(u,k)$ 有

$$d_n(u,k) = \sqrt{1-k^2x^2} \tag{1-21}$$

满足

$$k^2 S_n{}^2(u,k) + d_n{}^2(u,k) \equiv 1 \tag{1-22}$$

特别需要说明：上面定义是现有理论早已存在的 Jacobi 椭圆积分。对比当 $k = 0$（也即 $a = b$）时，椭圆积分自然退化成圆积分，为

$$u(k=0) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1-23}$$

上面引出的 $S_n(u,k)$、$C_n(u,k)$ 和 $d_n(u,k)$ 分别称之为 Jacobi 椭圆正弦、Jacobi 椭圆余弦和 Jacobi 椭圆 Δ 函数。

更精确的一般定义有：

第 1 类完全椭圆积分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \tag{1-24}$$

第 1 类一般椭圆积分

$$u(x,k) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \tag{1-25}$$

第 2 类完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \tag{1-26}$$

第 2 类一般椭圆积分

$$v(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{1-27}$$

根据实际需要，再引入**互补椭圆积分** $F(k)$，它定义为

$$F(k) = \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \tag{1-28}$$

结合式(1-26)，又写出

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^1 \frac{1-k^2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} - k^2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1-29}$$

于是又给出

$$E(k)=K(k)-k^2F(k) \tag{1-30}$$

正是引入了 $F(k)$ 才把两类不同的完全椭圆积分紧密联系起来。

下面，我们初步探讨椭圆积分的几何意义。图 1-3 给出了圆积分（实际上即三角函数）的几何表述。

从图 1-3 可清楚看出定义式(1-13)、式(1-14)和式(1-15)。作为对比，我们再在图 1-4 给出椭圆积分的几何表述。

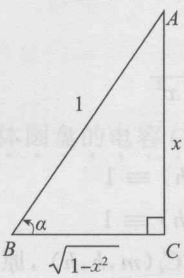


图 1-3　圆积分的几何表述

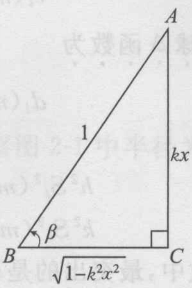


图 1-4　椭圆积分的几何表述

又可写出

$$\begin{cases} kx=\sin\beta & (1\text{-}31)\\ \sqrt{1-k^2x^2}=\cos\beta & (1\text{-}32)\\ \dfrac{kx}{\sqrt{1-k^2x^2}}=\tan\beta & (1\text{-}33)\end{cases}$$

于是又得第 1 类完全椭圆积分 $K(k)$ 可写成

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \tag{1-34}$$

也可表示为

$$K(k)=\int_0^{\arcsin k}\frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{k^2-\sin^2\beta}} \tag{1-35}$$

有了上面的铺垫，我们完全可推广为椭球积分。

【定义】　我们把椭球正弦函数 $S_l(m,k,h)$ 定义为

$$m=\int_0^x\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-h^2x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \tag{1-36}$$

式中

$$\begin{cases} 0\leqslant k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\leqslant 1 & (1\text{-}37)\\[2ex] 0\leqslant h=\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\leqslant 1 & (1\text{-}38)\end{cases}$$

它们表示的是椭球的几何参数,按习惯

$$c \leqslant b \leqslant a \tag{1-39}$$

于是有

$$h \geqslant k \tag{1-40}$$

$$x = S_l(m,k,h) \tag{1-41}$$

我们称之为**椭球正弦函数**。对应的**椭球 h 余弦**为

$$e_l(m,k,h) = \sqrt{1-h^2x^2} \tag{1-42}$$

类似,再定义**椭球 Δ 函数**为

$$d_l(m,k,h) = \sqrt{1-k^2x^2} \tag{1-43}$$

于是有恒等式

$$h^2 S_l^{\,2}(m,k,h) + e_l^{\,2}(m,k,h) \equiv 1 \tag{1-44}$$

$$k^2 S_l^{\,2}(m,k,h) + d_l^{\,2}(m,k,h) \equiv 1 \tag{1-45}$$

在椭球函数中,最突出的是不再定义椭球余弦 $C_l(m,k,h)$,原因有两条:

①有了 $e_l(m,k,h)$ 椭球 h 余弦只要令 $h=1$,即为

$$e_l(m,k,1) = C_l(m,k,1) \tag{1-46}$$

②只要 S_l 、e_l 和 d_l 三个函数业已完备,只要注意到在椭球积分中定义式(1-36)的分母中只有 $\sqrt{1-h^2x^2}$ 和 $\sqrt{1-k^2x^2}$ 两个因子。这里,还有一句题外话:若定义 $C_l(m,k,1)$ 反而会增加不必要的困难。

表 1-3 给出了从圆积分到椭球积分的演变。

表 1-3 从圆积分到椭球积分

圆积分	椭圆积分	椭球积分
$d = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$	$m = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-h^2x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$

第 2 章　圆积分的应用背景

我们在不同场合反复强调，在工程数学中应用和数学本身同等重要。这里，我们从圆积分着手，也即研究

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2-1}$$

形式的积分。

圆积分与导体圆盘的电容 C 密切相关。先观察图 2-1 中半径为 a 的无限薄理想导体圆盘。

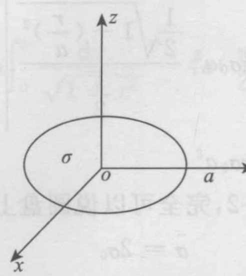


图 2-1　半径为 a 的无限薄导体圆盘

设 $\sigma(r)$ 表示导体圆盘上的电荷密度，圆盘上对称性使 σ 与转角 φ 无关。已经知道无限薄导体圆盘的电荷密度在盘的边缘呈平方根倒数分布，即

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{a}\right)^2}} \tag{2-2}$$

式中，σ_0 是电荷密度常数，如图 2-2 所示。在导体圆盘边缘呈平方根倒数分布。

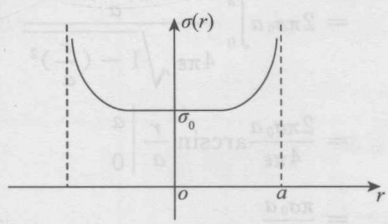


图 2-2　电荷密度 $\sigma(r)$ 分布

圆盘电容 C 定义为

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2-3}$$

式中，Q 表示圆盘上总电荷；V 为圆盘上的电位。于是又可写出

$$Q=\iint_s \sigma(r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2-4}$$

$$V=\iint_s \frac{\sigma(r)}{4\pi\varepsilon r}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{2-5}$$

具体代入式(2-2)条件有

$$\begin{aligned} Q &= \iint_s \frac{\sigma_0}{\sqrt{1-(\frac{r}{a})^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\sigma_0 a^2\int_0^a \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}[1-(\frac{r}{a})^2]}{\sqrt{1-(\frac{r}{a})^2}} \\ &= 2\pi\sigma_0 a^2 \frac{\frac{1}{2}\sqrt{1-(\frac{r}{a})^2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_a^0 \\ &= 2\pi\sigma_0 a^2 \end{aligned} \tag{2-6}$$

我们注意式(2-6)，结合图 2-2，完全可以说圆盘上的平均电荷密度 $\bar{\sigma}$ 为

$$\bar{\sigma}=2\sigma_0 \tag{2-7}$$

把式(2-6)重新写出有

$$Q=\bar{\sigma}S=\bar{\sigma}\pi a^2=2\sigma_0\pi a^2 \tag{2-8}$$

另一方面，电位 V 可写为

$$\begin{aligned} V &= \iint_s \frac{\sigma_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon r\sqrt{1-(\frac{r}{a})^2}} \\ &= 2\pi\sigma_0 a\int_0^a \frac{\mathrm{d}(\frac{r}{a})}{4\pi\varepsilon\sqrt{1-(\frac{r}{a})^2}} \\ &= \frac{2\pi\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon}\arcsin\frac{r}{a}\Bigg|_0^a \\ &= \frac{\pi\sigma_0 a}{4\varepsilon} \end{aligned} \tag{2-9}$$

现在再计及圆盘电容 C 的定义式(2-3)，可得

$$C=\frac{Q}{V}=8\varepsilon a \tag{2-10}$$

该式即为圆盘电容 C 的计算结果。

进一步，我们不把式(2-9)积分出来，而写成

$$\begin{cases} Q = 2\pi\sigma_0 a^2 & (2\text{-}11) \\ V = \dfrac{2\pi\sigma_0 a}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & (2\text{-}12) \end{cases}$$

再一次写出

$$C = \frac{4\pi\varepsilon a}{\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}} \tag{2-13}$$

清楚看出：导体圆盘的电容 C 与圆积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 确实密切相关。

另外，由以上讨论可知圆积分不存在第 1 类和第 2 类。这是因为在我们所研究的问题中，$\sqrt{1-x^2}$ 因子一直处于分母的位置。圆积分的第 2 个重要应用是给出圆的周长，即

$$L = 4a\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 4a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi a \tag{2-14}$$