第一章　不确定情况下的决策

§1—1　不进行试验的决策模型

§1—2　估计概率分布

§1—3　进行试验的决策模型

第二章　价值和效用：优先选择的数量化

§2—1　价值和效用的概念

§2—2　货币结局的效用

第三章　统计决策理论

§3—1　一般决策模型

§3—2　特殊类型模型中的最优行动

§3—3　柏努里过程

§3—4　特殊类型模型的最优抽样

第四章　多目标决策

§4—1　多属性结局和多目标

§4—2　非劣解结局的集合

§4—3　没有优先选择信息的多目标决策

§4—4　有先验优先选择信息的多目标决策

§4—5　事先给定顺序和基本混合信息多目标决策

§4—6　累积优先选择信息的多目标决策

第一章　不确定情况下的决策

我们在这一章讨论包括决策者在内的模型。我们将研究具有概率的模型，并且包含有一个目标的极大或极小问题。这样的模型通常称为决策模型。

本章讨论的方法是将一个复杂的“总体”决策变为几个更为容易处理的“局部”问题，以便于将各种信息定量化。这样一种变换，可以给决策者更清楚的表示出决策问题的结构。

§1—1　不进行试验的决策模型

首先我们研究一种特殊情况，在这一情况中，不确定性是问题的中心，决策者没有办法得到更多的信息来减小他的不确定性，但是必须根据他现在的判断作出决策。由于没有机会获得更多信息，所以这种情况的模型叫做“不进行试验的决策模型”。

一个库存的例子。

一个市的某付食公司能由某市在每个星期四上午购进一批鲜鱼。在星期四下午和星期五一整天可以出售。但是星期六开始变质，没有售出的鱼将被扔掉。如果公司事先知道在某一星期顾客将买多少鱼，并按此订立进货合同，决策问题是十分简单的。但实际上，他事先不知道顾客的需要量，就决定进货量。

假设公司为了简化计算将顾客的需要量按10公斤的倍数分类，他有一个过去几周的供应量的记录(包括鲜鱼全部卖完的记录)，发现过去需要量的模式如表1—1所示。

表1—1

需求（公斤数）	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100以上
发生这一需求量的周数(分数表示)	0.02	0.03	0.08	0.16	0.22	0.21	0.15	0.07	0.03	0.02	0.01

设 θ 表示未来某一周鲜鱼需求量的公斤数。公司相信，至少在最近几周，θ 值的概率近似于表1—1的相对频率，$\theta>100$斤的概率为零。

假设公司购入鲜鱼每公斤1元，售出每公斤1.5元。对于顾客需要鲜鱼，但缺货这一事件，应指定一个价值，这称为“好运损失”。假设公司指定一个近似的“好运损失”为0.25元/公斤。

设 a 为公司确定的进货量，这个量 a 应怎样确定呢？

1、一个方案是估计未来顾客需要量；然后选择进货量 a 等于需要量。需要量的一种估计值是需求期望值，由表1—1，这一值等于

$$\text{期望需要量}=0.02\times0+0.03\times10\cdots\cdots+0.01\times100=45.1\text{公斤}$$

根据这一步骤，公司将决定每周进货约45.1公斤。

这一方法的缺点是，决策者作决定时，没有明确的目标，决策和“好运损失”的大小无关。

2、第二个方案是，对于每一种进货量，首先确定最坏可能的净收益（极小值），然后选择进货量 a，使净收益尽可能大（极大值）。这称为极小—极大方法。

在目前情况下，以进货量 a 和需求量 θ 表示的净收益为

$$g(a,\theta)=\begin{cases}1.5\theta-1.00a & 0\leqslant\theta\leqslant a\\(1.5-1.00)a-0.25(\theta-a) & 0\leqslant a\leqslant\theta\end{cases}\qquad(1-1)$$

对于每一个值 a，由这一函数可以计算极小净收益。例如 $a=10$，可算得

$g(10,0)=-10$，　　　$g(10,10)=5$，

$g(10,20)=2.5$，　……　$g(10,100)=-17.5$

极小净收益为 $g(10,100)=-17.5$。

列成表如表1—2所示。

表1—2

进货量	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
极小净收益	−25	−17.5	−20	−30	−40	−50	−60	−70	−80	−90	−100

从表中可看出，最坏净收益中的最大值为−17.5，相应于进货量 $a=10$公斤。公司采用最小——最大方法时，将决定进货10公斤。

用这种方法，决策者仔细的考虑了他的目标，但是忽略了一些重要的因素，没有考虑实际发生的各种需求量的可能性。如果大的需求量的可能性增加，最缺乏经验的公司决策人也会增加进货量。

3、第三个方案是用期望净收益，决策人选择 a，使其期望净收益最大。

由于，$g(a,0)$，……，$g(a,100)$ 表示进货量为 a 时，可能的净收益值，于是有

$$期望净收益=0.02g(a,0)+\cdots\cdots+0.01g(a,100)$$

例如　$a=10$，期望净收益为

$$0.02\times(-10)+0.03\times(5)+0.08\times2.5+\cdots\cdots+0.01\times(-17.5)=-4.1$$

对于每一个 a，计算期望净收益列于表1—4。

表1—4

进货量 a	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
期望净收益	−11.3	−4.1	2.5	7.7	10.15	8.7	3.6	−4.1	−13.05	−22.5	−32.35

故最大可能期望净收益发生在 $a=40$，用这一方法的决策人将选择进货量 $a=40$公斤。

应该说明，一个合理的决策方法并不总是给出最好的结果。例如，公司决定进货40公斤，但实际情况，顾客只需要10公斤，将有怎样的后果？在不确定性条件下的决策问题中，必须区别：决策者并不知道决策的后果，但从其推测中是好的决策与实际产生好的后果的好的决策二者的区别。我们只能采用某种方法找出前一种意义下的最优决策，

但在不确定条件没有办法找到后一种意义下的最优决策。

§ 1—2 主观 (估计)概率分布

在上一节的决策模型中，根据过去的需求量记录，并假定未来需求量的模式不变，公司能够估计下一周的需求量的概率分布。在很多情况下，这种步骤是不能用的，因为①有时没有过去的记录；②不能认为未来的需求量与过去的需求量具有相同的模式；③未来需求量只是一类事件中的一个。

如果公司得到了某些信息，使他相信下一周的需求量比通常要大，则他的自信并不能用过去需求量的频率来代表。如果他对下周需求量的估计概率对于他的实际决策能作为有用的指导，则他就应该估计代表他的自信的概率，而不是估计过去需求量的频率，或者其它概率。但是公司怎样估计表示他的自信的概率呢？

1、估计概率的意义

假设你面临一种情况，一个事件E可能发生，也可能不发生，希望你估计一个概率P（E）以代表你相信E发生与否的程度。这一概率P（E）的意义是什么？在什么情况下能说P（E）存在？

P（E）的估计是一个测量问题，因为它与测量问题有某些共同的特点 。

为了定义概率，首先需要某些“标准”事件，它的概率是一致同意的。我们考虑图1—1所示装置，一个指针在一个固定轴上旋转，然后停在一个角度上，如果停在的角度用360°除，则可能的停止角度p为$0\leqslant p\leqslant 1$。

令E_p表示指针转起来停在角度p'（$0\leqslant p'<p$）这一事件，设指针随机停止，事件E_p的概率为$P(E_p)=p$，　　$0\leqslant p\leqslant 1$。

我们需要用某些符号来比较事件概率。对任意两个事件E和F，“E比F更为可能”表示为$E\succ F$，“E与F有相同的可能性”表示为$E\sim F$。假设两个标准事件E_p和E_g，只有在$g\succ P$时，才有$E_g\succ E_p$。

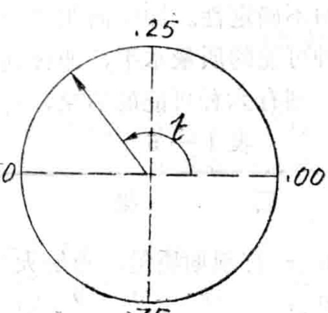
假设决策者对事件的比较满足如下一般条件：

（1）对任意事件E和F，只有下列之一成立：

$$E\succ F,\quad E\sim F,\quad F\succ E, \tag{1—2}$$

（2）对任意事件

$$E\succ F,\ F\succ G,\ 则\ E\succ G$$
$$E\succ F,\ F\sim G,\ 则\ E\succ G \tag{1—3}$$



下面讨论对给定事件定义一个决策者的概率的步骤。假设事件E与每一标准事件E_p（$0\leqslant p\leqslant 1$）比较，令

$$L_E=\left\{P:\ E\succ E_p\right\},\quad U_E=\left\{P:\ E_p\sim E 或 E_p\succ E\right\}$$

由假设1，$L_E\cap U_E=\phi$，$L_E\cup U_E=[0,1]$。由假设2，$P\in L_E$，$g\in U_E$表示$E_g\succ E_p$，并且这表示$p<g$。则我们有

根据实数的基本性质，在〔0，1〕中存在一个唯一的实数 p^*

$$P \leqslant p^* \leqslant g \qquad \forall P \leqslant L_E, \qquad g \in U_E$$

则定义对给定事件E，决策者的概率为 p^*

$$P(E) = p^*$$

（如果L E或U E之一为空，则 p^* 将为终点0或1之一），

2、估计概率的步骤

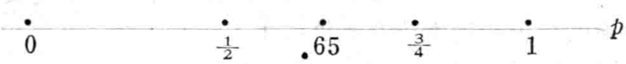
假设决策者不能获得更多信息来修改他的自信而必须根据他目前的所知来估计概率。决策者将运用过去对情况的了解和经验，加上与过去相似情况的数据，再加上任何专家意见，以便考虑各种可能后果。一旦有了这一些，就可以运用几种步骤来将决策者的判断转变为概率。

假设不确定性后果可以用由 θ 表示的量来描述。

（1） θ 有两个可能值 θ_1 和 θ_2

一种估计后果 $\theta = \theta_1$ 的概率的方法,可以将 $\theta = \theta_1$，作为一个事件，将 $\theta = \theta_1$ 与标准事件 E_p, $0 \leqslant p \leqslant 1$ 比较，这就直接确定了一个概率 $p = P(\theta = \theta_1)$。

更有效的方法如下进行：首先问，两个事件 $\theta = \theta_1$，或 $\theta = \theta_2$ 那一个更为可能，这就确是或者 $p \geqslant \frac{1}{2}$，或者 $p \leqslant \frac{1}{2}$。然后问事件 $\theta = \theta_1$ 的可能性是否至少为 θ_2 的3倍，这就确定或者 $p \geqslant \frac{3}{4}$，或者 $p \leqslant \frac{3}{4}$。这样，p 的范围可以不断缩小：



假设决策者使用上述步骤为事件 $\theta = \theta_1$ 估计一个概率0.65,则应问对互补事件 $\theta = \theta_2$，$1 - p = 0.35$ 是否为一合理概率，如不是，则应重新估计 $\theta = \theta_1$。

（2） θ 有有限个可能值 $\theta_1, \cdots\cdots \theta_n$

一个市场的例子。

设有一染料公司考虑一种新型染料的生产和市场，管理人员面临所提出的染料的质量的不确定性。即使商业生产能得到试验同样的质量，也有市场大小的不确定性。想像两种可能的质量水平，即有预期的质量或者没有；有三种可能的需求水平，即大、中和小。则有六种可能的后果，对每种后果，估计利润如下表：

表1—5

后　　果	净利润（元）
θ_1：有预期质量，市场大	700,000
θ_2：　〃　　〃　中	650,000
θ_3：　〃　　〃　小	550,000
θ_4：没有预期质量，市场大	200,000
θ_5：　〃　　　〃　中	150,000
θ_6：　〃　　　〃　小	50,000

管理部门决定，如果期望利润至少为500,000元，就开发这一新产品。问题归结为估计六种后果的概率。

设经研究部门估计新产品有高质量的概率为0.9。

设经市场部门估计市场大、中、小的概率各为0.3，0.5和0.2。

设产品质量和高质量产品的市场大小互相独立，则六种概率为

$P(\theta_1)=0.9\times0.3=0.27$，　　$P(\theta_2)=0.9\times0.5=0.45$，

$P(\theta_3)=0.9\times0.2=0.18$，　　$P(\theta_4)=0.1\times0.3=0.03$，

$P(\theta_5)=0.1\times0.5=0.05$，　　$P(\theta_6)=0.1\times0.2=0.02$，

期望净利润为

$$700,000\times0.27+\cdots\cdots+50,000\times0.02=595000\text{元}$$

故开发这一新产品。

（3）θ有连续值$a\leqslant\theta\leqslant b$

在这种情况下，可为θ估计一个连续概率分布，这一分布可以用一密度函数$f(x)$，$a<x<b$代表，也可用一累积分布函数$F(x)$代表。

设$f(x)>0$，$a<x<b$，则$F(x)$将为正的严格增函数。

使用累积分布函数$F(x)$，是因为其值可以解释为事件的概率

$$F(x)=P(a<\theta<x),\quad a<x<b$$

对于每一个x，估计事件$a<\theta<x$的概率$P(a<\theta<x)$，可求得$F(x)$。实际上，通常用间接方法更容易求出。

对于一个给定概率p，$0\leqslant p\leqslant1$，令x_p表示如下关系的x值

$$F(x_p)=P(a<\theta<x_p)=\int_a^{x_p}f(t)\,dt=p$$

值x_p称为θ的p分位。设$f(x)>0$（$0<x<b$），则值x_p唯一定义。

0.5分位$x_{0.5}$称为θ的中值，0.25分位$x_{0.25}$称为θ的下$\frac{1}{4}$分位，0.75分位$x_{0.75}$称为θ的上$\frac{1}{4}$分位。由上述定义，得

$$\begin{aligned}&P(a<\theta<x_{0.5})=P(x_{0.5}<\theta<b)\\&P(a<\theta<x_{0.25})=P(x_{0.25}<\theta<x_{.5})\\&P(x_{.5}<\theta<x_{.75})=P(x_{.75}<\theta<b)\end{aligned}\qquad(1\text{-}4)$$

式（1—4）很容易由决定者解释，因此，$x_{.25}$、$x_{.5}$和$x_{.75}$常是决策者最容易直接估计的量。一旦估计出这些值，就确定了曲线上的5个点。下一步就是确定通过这些点的函数$F(x)$。

例如付食公司对于鲜鱼需求量在$(0,\infty)$之间估计一个连续概率分布。假设他估计45公斤是一个中值，$x_{0.5}=45$。又估计，对于$\theta=35$公斤，事件$0\leqslant\theta\leqslant35$和$35\leqslant\theta\leqslant45$有相同可能性，对于$\theta=57$，事件$45\leqslant\theta\leqslant57$和$57\leqslant\theta\leqslant\infty$有相同可能性，于是他判断$x_{.25}=35$，$x_{.75}=57$。这样，可以得到5点如图1—2所示。如果决策者认为这几点已能确定$F(x)$，则可通过这几点绘出$F(x)$曲线。管理人员可以用这一曲线来确定最优进货量a^*。

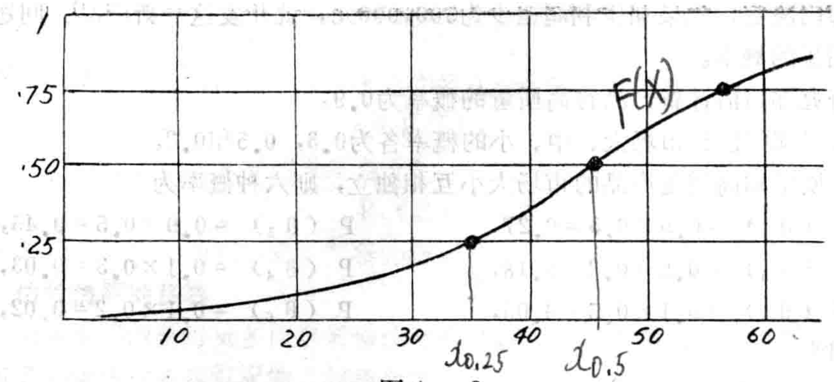


图1—2

也可以用理论方法求F(X)曲线。如已经估计几点(x_{pi}, p_i) i=1,⋯K。决策者假设他的分布曲线属于某些分布类型，例如属于正态分布或贝塔分布，问题在于选择参数值，使所得分布函数F(X)有所估计的分位。常常是估计的分位的数目大于参数数目，所以选择参数只能使F(X)的分位值近似等于估计的分位。

下面以正态分布为例进行说明。设已估计得到$X_{.25}=35$，$X_{.5}=45$，$X_{.75}=57$。

令
$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2/\sigma^2},\quad -\infty<X<\infty$$

参数μ，σ^2待定。

因为f(X)对称于期望值μ，故必有$X_{.5}=\mu$，即

$$\mu=45$$

由于f(X)对称，故应有$X_{.5}-X_{.25}=X_{.75}-X_{.50}$。但在上例中，$X_{.5}-X_{.25}=10$，$X_{.75}-X_{.5}=12$。设公司管理人员同意，为估计正态分布，可以取$X_{.25}=34$，$X_{.75}=56$，则$x_{0.5}-X_{.25}=X_{.75}-X_{.5}=11$。

为了指定一个方差σ^2值，必须找出σ^2和$X_{.75}-X_{.5}$这一距离的关系。根据$X_{.75}$的定义，有

$$F(X_{.75})=\int_{-\infty}^{X_{.75}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}dX=0.75$$

代换变量可得

$$\int_{-\infty}^{(X_{.75}-\mu)/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=0.75$$

由统计表可以查得

$$(X_{.75}-\mu)\sigma=0.674$$

故得
$$\sigma=\frac{X_{.75}-X_{.5}}{.674}=\frac{11}{.674}=16.32$$

所以管理人员用一个参数为$\mu=45$，$\sigma=16.32$的正态分布估计需求量。

§1—3　进行试验的决策模型

下面研究决策者在决策前能获得附加信息的情况。

1、一个试验

想像一个决策者面前有一支未知的缸，已往的事件使他相信这一支缸或为缸Ⅰ或为缸Ⅱ，这些缸中装有

缸Ⅰ：3支红球，7支绿球，一纸条；

缸Ⅱ：8支红球，2支绿球，一纸条。

但是已往的事件不能使决策者知道面前是那一支缸，而只告诉他缸Ⅰ的估计概率为$\frac{3}{4}$，是缸Ⅱ的概率为$\frac{1}{4}$。

假设决策者有两个可能的行动：

a_1：猜是缸Ⅰ。

a_2：猜是缸Ⅱ。

选择这些行动之一以后，决策者由缸中取出纸条。在缸Ⅰ中的纸条上写有“这是缸Ⅰ，你如已选行动a_1,将得25分；如已选行动a_2,将得0分”。在缸Ⅱ的纸条上的信息相反，为“这是缸Ⅱ，你如已选行动a_2，将得50分；如已选行动a_1，将得－10分”。

决策者应选择a_1还是a_2行动呢？

注意到在未知缸中的有色球没有起作用，就是说缸本身的状态确定了结局。缸本身的可能状态表示为

θ_1：缸是缸Ⅰ

θ_2：缸是缸Ⅱ

用这一记号，结局可以表示为决策者的行动和缸的实际状态的函数：即

$$g(a_1,\ \theta_1)=25,\qquad g(a_2,\ \theta_1)=0$$

$$g(a_2,\ \theta_2)=50,\qquad g(a_1,\ \theta_2)=-10$$

这样就得到一个不进行试验的决策模型，虽然这一问题和上一节的库存问题表面上大不相同，但两者的事件顺序都是

(1)选择行动a，

(2)发生一种自然状态θ，

(3)引起一种与行动a和自然状态θ有关的结局。

图1—3　是这一情况的模型。图中给出θ_1和θ_2的概率及得分。

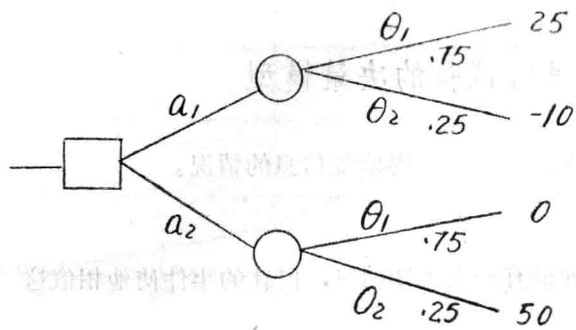


图 1—3

如果采取行动 a_1，容易算出期望得分

$$G(a_1) = 25\times0.75 - 10\times0.25 = 16.25$$

同样，行动 a_2的期望得分

$$G(a_2) = 50\times0.25 + 0\times0.75 = 12.5$$

为了使期望值最大，决策者应选择行动 a_1，即应猜缸是缸Ⅰ。

现在假设在选择行动 a_1或 a_2之前决策者能够由未知缸抽样获得附加信息。假设有如下几种抽样方案

e_0：没有附加信息。这已分析过，称为“无信息试验”。

e_1：由缸中抽出一支球。这一方案的代价是5分，常称为“抽样费”。这样可以得到某些信息，但不能消除所有不确定性。这种方案称为“不完全信息试验”。

e_2：由缸中抽出两支球。这一方案的代价是10分，这比 e_1能获得更多信息，但要付出更大代价。

e_P：由缸中抽出纸条。代价为20分，它告诉决策者面前是那一支缸。这称为“完全信息试验”。实际问题中，这一方案通常是不可能的。

可用 e_2和 e_P试验的模型称为“进行试验的模型”。

下面分析应进行何种试验并采取那一种行动。

2、决策树模型

决策树是有不确定情况的一种模型。画法如图1—3。图中

方块——决策点；　　○——事件点。

在每一事件分支填上该事件的概率。在每一分支终端填上事件结局的价值。

3、有试验 e_1的决策树

各种可能性绘于图1—4。

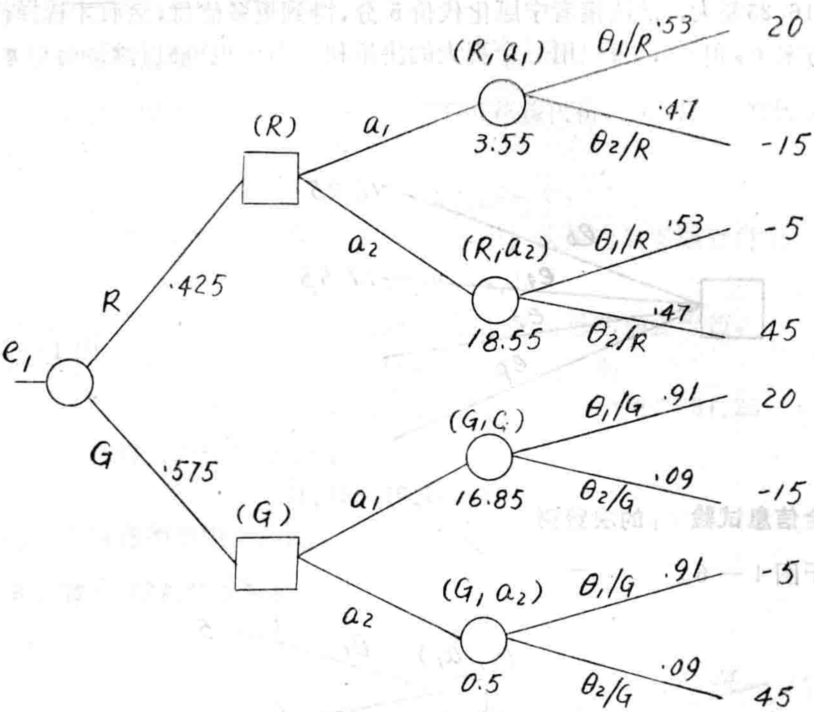


图 1—4

首先，抽出一支红球的概率为

$$P(R)=P(R/\theta_1)P(\theta_1)+P(R/\theta_2)P(\theta_2)$$
$$=0.3\times0.75+0.8\times0.25=0.425$$

同样，抽绿球的概率为

$$P(G)=0.575$$

在右侧的四个事件分支的概率是条件概率。这些条件概率可由贝叶斯公式求出

$$P(\theta_1/R)=\frac{P(R/\theta_1)P(\theta_1)}{P(R)}=\frac{0.3\times0.75}{0.425}=0.53$$

$$P(\theta_1/G)=\frac{P(G/\theta_1)P(\theta_1)}{P(G)}=\frac{0.7\times0.75}{0.575}=0.91$$

由之　　$P(\theta_2/R)=0.47$，　　$P(\theta_2 1G)=0.09$。

在这里$P(\theta_1)$，$P(\theta_2)$称为先验概率。$P(\theta_1/R)$等称为后验概率。

应注意到，在结局中已将试验代价减去。

由决策树容易算出

$$G(R, a_1)=20\times0.53-15\times0.47=3.55$$
$$G(R, a_2)=18.5$$
$$G(G, a_1)=16.85$$
$$G(G, a_2)=0.5$$

显然，在决策点(R)应选择a_2，猜测缸为缸Ⅱ。在决策点(G)，应选择a_1。

$$G(e_1)=18.5\times0.425+16.85\times0.575=17.55$$

这比G(e_0)=16.25要大，故决策者宁愿化代价5分，得到更多信息，然后才选择行动。

为了比较方案 e_0和 e_1，可以用一个更大的决策树。当然也可以包括 e_2和 e_p，如图1—5。

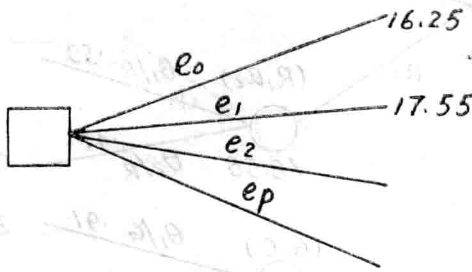


图1—5

4、有完全信息试验 e_p的决策树

决策树绘于图1—6。

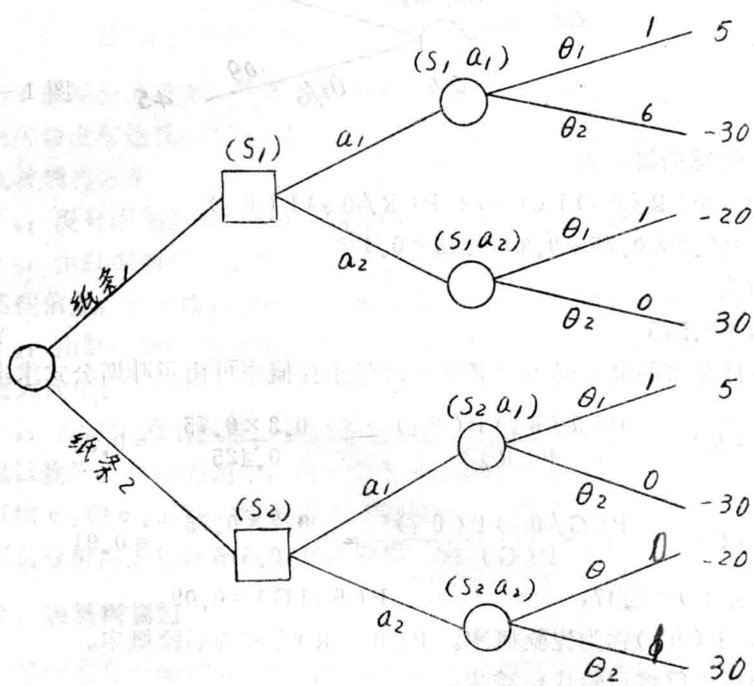


图1—6

由于代价为20，已由后果中减去。这一决策树与 e_1试验有相同的形式，但在 e^P情况下，条件概率或为1或为0。于是可以很容易算出

$$G(S_1, a_1) = 5 \qquad G(S_1, a_2) = -20$$

抽得 S_1，决策者应选 a_1。

$$G(S_2, a_1) = -30 \qquad G(S_2, a_2) = 30$$

抽得 S_2，决策者应选 a_2。

$$G(e_p) = 5\times 0.75 + 30\times 0.25 = 11.25$$

所以这一方案比e_0，e_1均要差。

5、信息期望值

设决策者可以用e_0和e_1方案，e_0不用花费代价，e_1有c_1的代价，则e_1的期望收益为

$$G(e_1)=22.55-c_1$$

比较$G(e_1)$和$G(e_0)=16.25$ 可以看出，决策者最多愿意付出

$$22.55-16.25=6.30$$

的代价用于试验e_1。这个值称为试验e_1的抽样信息的期望价值。

设决策者能利用e_0和e_p，e_p要花费代价c_p，则

$$G(e_p)=(25-c_p)\times 0.75+(50-c_p)\times 0.25=31.25-c_p$$

故决策者愿意付出的代价最多为

$$31.25-16.25=15$$

这称为完全信息的期望价值。

6、有e_2试验的决策树

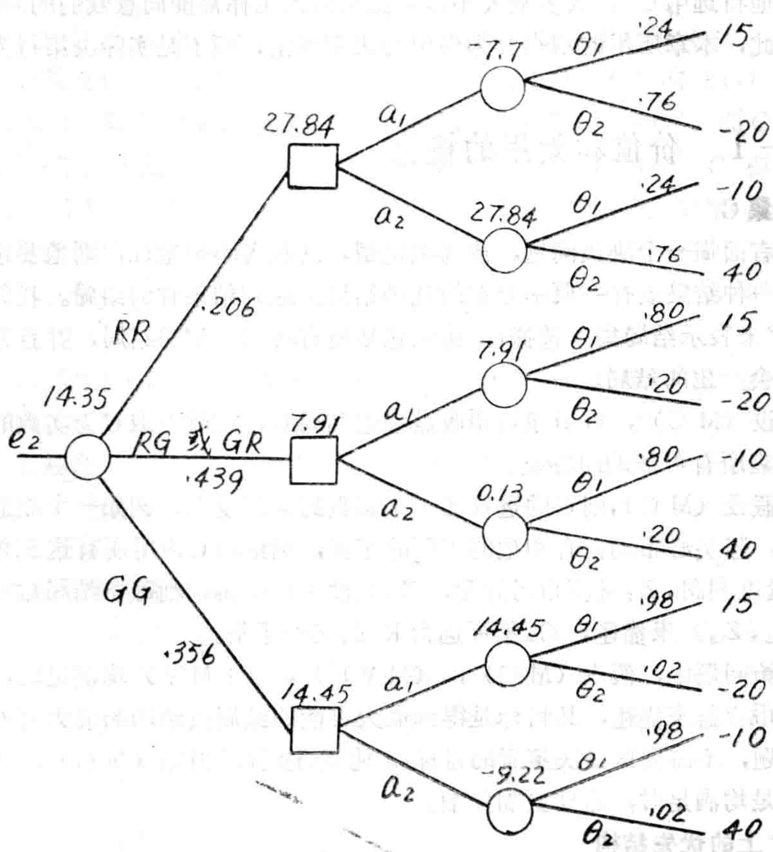


图1—7

决策树绘于图1—7。各点的期望值也示于图中。

第二章　价值和效用：优先选择的数量化

在上一章决策分析中，我们假定决策者的目标是使其收益期望值最大，这种假设可以表述如下

用货币表示的收益越大越好

（MC）：货币结局条件。决策者可能行动的结局可以用他的净货币收益的这个属性来描述。

和财产有关

（MV）：货币价值原则。决策者希望采用导致等效货币净收益较大的行动。

（EMV）：期望货币价值原则。决策者希望采用导致期望净货币收益较大的行动。

在许多重要决策情况中上述假设并不重要，在这种情况下决策者怎样提出其目标还要做许多工作。

在本章我们只讨论决策者重视其结局而要求详细、仔细地给以分析，我们将指出，如果他认为某些条件是重要的，则他将使用某一相关步骤来分析其决策问题。

某些条件在任何决策问题中都可以认为是重要的，一个例子是，在结局中，决策者的优先选择是传递的，即当他对结局C_1和C_2选中结局C_1，对结局C_2和C_3选中C_2，则对C_1和C_3，他将选中C_1。大多数人不需要做另外的工作都能同意我们的判断与这一情况相符。因此，本章所用的观点称为惯用的决策理论，而不是实际决策行为的描述理论。

§2—1　价值和效用的概念

1、结局集$C°$

假设决策者面临一个决策问题，或为确定型，或包含不确定性，则他要选择行动，每一行动或有一种结果或有一概率分布的几种结果。这种结果称为结局。我们用C表示各结局，用$C°$来表示结局集。选择$C°$集应包括所有可以产生的结局，并且为方便起见也包括某些不会产生的结局。

当满足假设（MC），可用净货币收益描述结局C，这时可取C为实数的区间I，I应包括决策者所有可能的净收益。

当不满足假设（MC），则C的选择比一个实数的区间复杂，例如一个制造厂不仅关心目前的利润，还关心市场占有和他的工厂的革新，则结局C应用所有这三种属性来描述：如果Z_1量度利润，Z_2量度市场分配，Z_3量度工厂革新，则每一结局C可用一向量$C=(Z_1, Z_2, Z_3)$来描述，C_o集可选为R^3的某一手集。

在一个决策问题中，假设（MC），（MV）），（EMV）均满足时，决策者的结局可用净货币收益来描述，其目标是得到最大可能的结局或结局的最大可能期望值。对这一决策问题，不需要区分决策者的目标和他的选择，但如（MC），（MV），（EMV）不是均满足时，需要更加仔细。

2、集$C°$上的优先结构

假设在结局集$C°$中任意两个结局C和C'，决策者能规定他喜爱C或C'或同等喜爱，这一结局的比较称为$C°$上的优先结构。

如决策者认为C，优于C′,用C≻C′表示；C′优于C，用C′≻C表示；C和C′没有差别，用C～C′表示。

在研究C上的优先结构时，我们总作如下假设。

（C）一致性条件。对任意结局C，C′∈C°

（i）C≻C′，C～C′，C′≻C三者只有一个是真；

（ii）只有当C′～C，才有C～C′。

名词“一致性”不是指逻辑的一致性，而是爱好上的一致性。

一旦得到优先关系“优先于”（≻）和“无差于”（～），可以得到一个新的关系“至少无差于”（≿），定义为

如果C≻C′或C～C′　　则有C≿C′　　　　（2—1）

假设在C°上已规定关系≻和～,满足条件（C），并由式（2—1）定义一关系≿，则下列件条成立：

如果C≿C′且C′≿C，则C～C′　　　　（2—2）

如果C≿C′但没有C′≿C，则C≻C′　　　　（2—3）

反之,假设在C上已规定关系≿,并由式（2—2），（2—3）定义了关系≻和～，则条件（2—1）和（C）成立。

*证明。首先证明由（2—1）和（C）得到（2—2）和（2—3）。要证明（2—2）,先假设C～C′,则由（2—1）有C≿C′,由（C）的（ii）有C′≿C。现在假设C≿C′和C′≿C。由于C≿C′表示C≻C′或C～C′，而C′≿C表示：C′≻C或C′～C。于是由条件（C）的（i），取消C′≻C和C≻C′得到C～C′。

证明（2—3），先假设C≻C′，则由（2—1）C≿C′。但由条件（C），C≻C′表示不能有C′≻C和C～C′，而由（2—1）这表示不能有C′≿C。现在假设有C≿C′和没有C′≿C，则C≿表示C≻C′或C～C′（2—1），但如C～C′，则由（C）和（2—1）有C′≿C，去掉C′≿C，故有C≻C′。

反之可以证明由（2—2）和（2—3）得到（2—1）和(5)。证明（2—1）先假设C≿C′。或有C′≿C或没有C′≿C，（2—2）和（2—3）表示C～C′或C≻C′。现在假设C≻C或C～C′，则或（2—2）或（2—3）导出C≿C′。

证明（C），假设C～C′,C≻C′,C′≻C三者有一个以上为真，则（2—2），（2—3）出现矛盾，并且由（2—2）可以得到（C）（ii）。　〔证毕〕

3、确定型问题的价值函数

研究确定型问题，这时，决策者的任一行动，只产生一种确定的结局。假设决策者已规定一个结局集。在集C°上获得一个优先结构的方法是在C°上估计一个实值函数，使得对任意两个结局C和C′,当C至少与C′一样时，υ（C）⩾υ（C′)，这可表示为

∀C,C′∈C°，如果υ（C）⩾υ（C′），则C≿C′　　　　（2—4）

这个函数υ称为价值函数。

如果用符号≻和～表述，可表示如下

∀C，C′∈C°，如果υ（C）＞υ（C′）则C≻C

∀C，C′∈C°，如果υ（C）＝υ（C′），则C～C′

表示集C上的指定的优先结构的价值函数v不是唯一的。给定一个价值函数，任何v的正倍数mv都可代表这相同的优先结构。

我们引入价值函数，主要是对不满足假设（MC）和（MV）的问题，但是这一概念很容易变换为满足假设（MC）和（MV）的情况。一种途径是规定C为一个净货币收益的区间，这时结局$C=x$的值较大的是优先的，而恒等函数$v(x)=x$是一个价值函数。这一模型要求确定在区间$C=I$的可能净收益的子集中确定x的最大值。

另一个途径特别适用于线性规划模型，规定集C为模型中决策变量$x_1, \cdots\cdots x_n$的一组向量，例如有非负值$x_1\geqslant 0, \cdots\cdots x_n\geqslant 0$的所有向量$x_1\cdots\cdots x_n$的集合，则可能结局的子集S是可行解的集合，价值函数$v(x_1, \cdots\cdots x_n)$可以规定为模型的目标函数$Z(x_1, \cdots\cdots x_n)$。

4、有不确定性的问题的效用函数

对于有不确定性的问题，一个行动可能导致几种结局之一，决策者不仅要规定各种结局的优先，而且要规定各事件分支的优先。

即使满足假设（MC）和（MV），常常也不宜于假设决策者喜爱有较大期望净收益的分支。例如，一笔投资，必须在两者之间采取决策，一个是冒险投资，可能得到利润20000元，也可能亏5000元，可能性相同；另一个是安全投资，保证得到利润5000元。

如图2—1所示，选前者，可得期望净收益7500元，但是对于亏本5000元会造成很

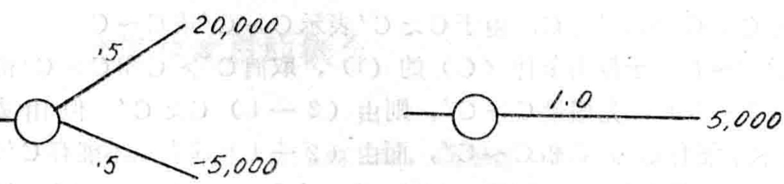
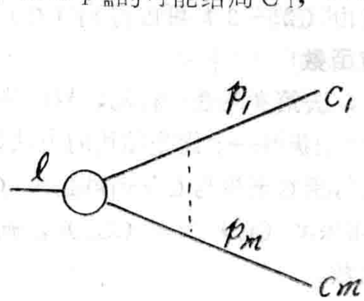


图2—1

大损害的投资者来说，宁愿选择后者。对这一决策者，假设（EMV）是不适宜的，一个实际的决策模型必须在优先选择中考虑可靠问题。

定义2、1　一个事件分支如果产生有给定概率的几种结局时，称为一个概率事件。用l表示各具有概率$p_1, \cdots\cdots p_m$的可能结局$C_1, \cdots\cdots C_m$的一个概率事件，即



在一指定集C°中结局的所有概率事件，称之为C°—概率事件，决策者在一类C°—概率事件上怎样估价一个优先结构呢？一种方法在C°上估计一个函数u，对于一个结

局为C_1，……C_m和p_1……p_m的概率事件l，和另一个结局为C_1'，……C_m'和p_1'……p_m'的概率事件l'，当l的期望值$p_1u(C_1)+\cdots\cdots+p_mu(C_m)$至少与$l'$的期望值$p_1'u(C_1')+\cdots\cdots+p_m'u(C_m')$一样大时，决策者认为$l$至少不差于$l'$。这可表示为

$$\text{如}\quad \sum_{i=1}^{m} p_i u(C_i) \geqslant \sum_{i=1}^{m'} p_i' u(C_i')$$

$$\text{则}\qquad l \gtrsim l' \tag{2—5}$$

满足式(2—5)的函数称为效用函数。在一类C°一概率事件上表示一优先结构的效用函数u不是唯一的。

近来常将价值函数称为顺序效用，将效用函数称为基本效用。

§2—2 货币结局的效用

常常决策者认为为期望净货币收益最大并不代表他真实的目标，因为他常常感到行动中有冒险性。本节我们讨论决策者将他对于冒险的态度数量化的方法。在讨论中假设货币结局条件（MC）和货币价值原则（MV）是对决策者同样的合适的描述。

1、有冒险的一个例子

设某电子进口公司能由外商进口电视机，如果进口管理不变，可获利润x元，如实施新的管理，将损失X元。根据过去的经验，获利的可能性比损失的可能性大一倍，所以估计获利概率为$P=\frac{2}{3}$，损失概率为$\frac{1}{3}$。

在公司进行决策时，和公司现有财产有关，如果x与公司财产相比很小，则认为期望货币价值原则是适用的，如果x相对很大，则必须小心从事。

这样，我们必须在期望货币价值原则不适用时，对优先选择数量化。

2、必然性当量

由上面的例子，如不进口，则结局是0，而进口，则得到一个概率事件。在各结局中，决策者在结局中的优先选择并不代表其在概率事件和结局之间的优先选择，必须使决策者将其对结局的优先结构扩展到两种不同形式的后果的优先结构。

假设工厂投资于一种新产品，可能的净收益为30000元或-10000元其概率各为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{3}$。如不投资于新产品而用于其它项目，则肯定能获得4000元的利润，对这种情况，可以构成决策模型如图2—2所示。

首先，决策者问自己对于以概率$\frac{2}{3}$获利30000元或以概率$\frac{1}{3}$损失10000元这一事件

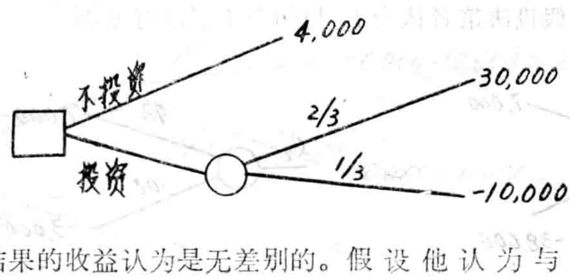
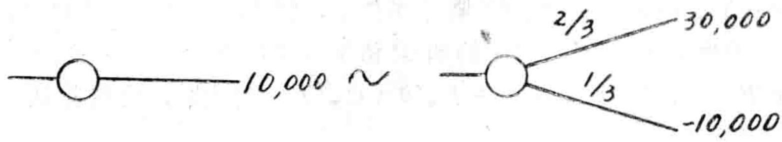


图2—2

分支与多大的必然结果的收益认为是无差别的。假设他认为与必然结果的收益$x_0=10000$元无差别，即



这个估计量x_0=10000元称为这一概率事件的必然性当量。

定义2—2　对于一个概率事件，假设决策者估计一个货币量x_0，他认为必然的x_0与概率事件l又没有差别，则x_0称为概率事件l的必然性当量，记为CE(l)。

用这个必然性当量，可以将概率事件l转换为一个单独的结局。在图2—2中，可以用结局CE（l）=10000代替分支l。这样，在假设（MV）时，他宁愿获得更多货币，于是应选择投资产品。

为了将必然性当量变为一般方法，以便用于分析更复杂的决策模型，我们研究图2—3所示投资问题。

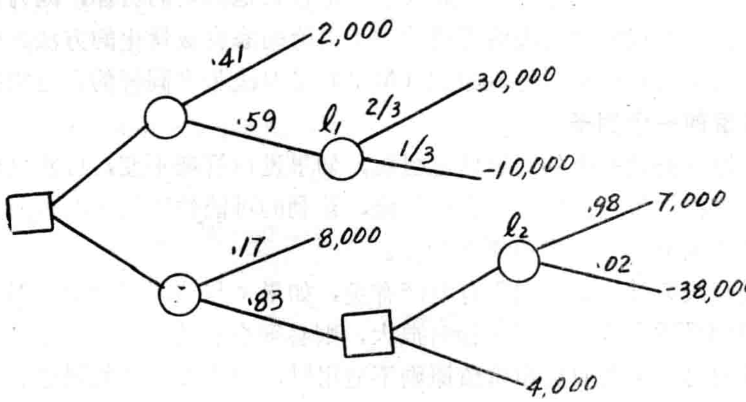
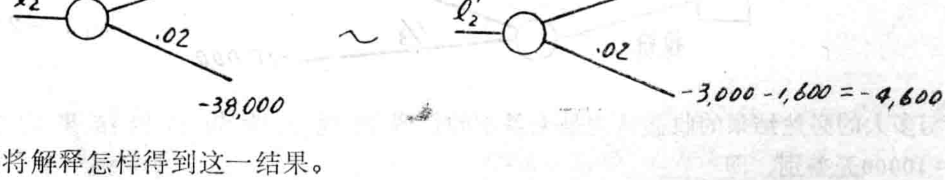


图2—3

假决设策者认为，货币在-5000到15000元之间，他能容许取平均值，但超出这个范围，必须仔细考虑。假设他对l_1有一个必然性当量CE（l）=10000元，他可以用10000的结局代替l_1。这样就得到两结局2000和10000，这些结局在-5000到15000范围内，这样，上面分支不必估计其必然性当量，可规定其等于分支的期望货币价值，这个值为

$$0.41\times2000+0.59\times10000=6720元。$$

至于下部分支，假设决策者认为l_2与如下l_2'没有差别



后面将解释怎样得到这一结果。