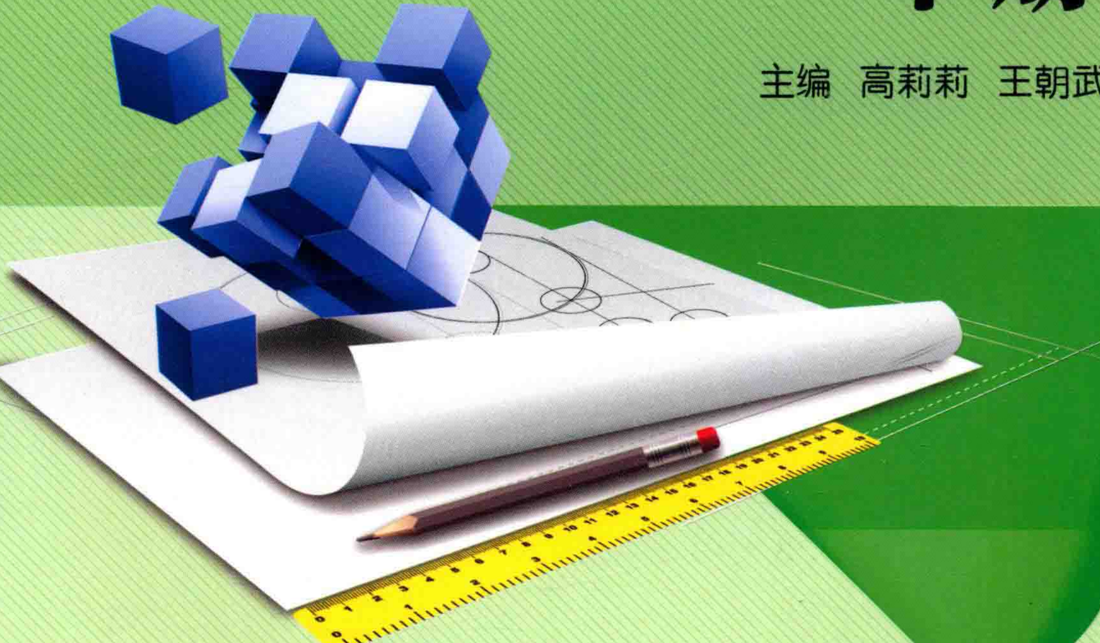
中等职业教育“十二五”规划教材

数学（基础模块）

下册

主编 高莉莉 王朝武



江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

中等职业教育“十二五”规划教材

数学

（基础模块）

下册

主编　高莉莉　王朝武

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

内 容 提 要

本套教材是教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》中所规定的基础模块部分，分为上、下两册。本书是基础模块下册，主要内容包括：数列，平面向量，直线和圆的方程，立体几何，概率与统计初步。教材在每节后配有习题，每章后配有复习题，可帮助学生及时巩固所学知识。

教材同步配备《数学辅导与自测（基础模块）》，包括“重点与难点辅导”、“教材习题解析”、“自我检测题”、“教材复习题解析”、“本章自我检测题”等环节，可供学生学习和训练使用。

本教材立足于中职数学教学实际，突出基础性，同时紧密与现代信息技术相结合，形式灵活，结构合理，可供各类中等职业学校的教师和学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

数学 ：基础模块．下册 / 高莉莉，王朝武主编．--
镇江 ：江苏大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-81130-502-9

Ⅰ．①数… Ⅱ．①高… ②王… Ⅲ．①数学课－中等专业学校－教材 Ⅳ．①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第133231号

数学（基础模块）下册
Shuxue (Jichu Mokuai) Xiace

主　　编 / 高莉莉　王朝武
责任编辑 / 李菊萍
出版发行 / 江苏大学出版社
地　　址 / 江苏省镇江市梦溪园巷30号（邮编：212003）
电　　话 / 0511-84446464（传真）
网　　址 / http://press.ujs.edu.cn
排　　版 / 北京金企鹅文化发展中心
印　　刷 / 北京市科星印刷有限责任公司
经　　销 / 江苏省新华书店
开　　本 / 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 / 8.5
字　　数 / 191千字
版　　次 / 2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-81130-502-9
定　　价 / 24.00元

如有印装质量问题请与本社营销部联系（电话：0511-84440882）

编者的话

本套教材根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》编写。教材严格按照“教学大纲”对课程教学目标的要求，以及对认知要求和技能与能力培养要求的规定，同时紧密结合中等职业学校的教学实际和学生特点，旨在培养学生的创新思维、实践能力和主动学习的能力，提高学生的文化知识水平、职业技能和就业能力，从而为适应社会岗位的全方位要求奠定基础。

本套教材是“教学大纲”所列教学内容结构中的基础模块，分为上、下册。《数学（基础模块）上册》内容包括：集合，不等式，函数，指数函数与对数函数，三角函数。

本书是《数学（基础模块）下册》，主要内容包括：数列，平面向量，直线和圆的方程，立体几何，概率与统计初步。完成本书《数学（基础模块）下册》内容需要68学时，学时分配可以参照下表：

《数学（基础模块）下册》学时分配表

章内容	学时数
第6章　数列	10
第7章　平面向量	10
第8章　直线和圆的方程	18
第9章　立体几何	14
第10章　概率与统计初步	16

在编写过程中，本套教材努力体现中等职业教育“以服务为宗旨，以就业为导向”的教学方针，力求做到重点突出，浅显易懂，基本概念和原理叙述准确，引用数据科学可靠。此外，本套教材讲述形式灵活多样，设有“提示”、“注意”、“想一想”、“练一练”等板块，可以拓展知识广度，激发学生的学习兴趣，强化学生的独立思考能力和动手能力。

本套教材知识实用、结构合理、教学适用性强，上、下册同步配备《数学辅导与自测（基础模块）》以及精美的教学课件（请登陆北京金

企鹅文化发展中心网站 http://www.bjjqe.com 下载）等，可供各类中等职业学校的教师和学生使用。

本册教材由高莉莉和王朝武主编。在编写过程中，作者参考了大量的文献资料，在此向原作者表示感谢；同时得到了许多专家、教授的支持和帮助，他们提出了许多宝贵意见，在此致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中不妥与疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，提出宝贵意见，以便进一步修订和完善。

编　者

2013 年 5 月

目　　录

第 6 章 数列

在自然界和日常生活中，我们经常会遇到按照一定次序排列的一列数．例如，假设每一对新生的小兔子要一个月后才能到成熟期，且一对成熟的兔子每一个月都会生一对小兔子．若现在有一对小兔子，则以后每个月兔子的对数依次为（如图 6-1 所示）

$$1,1,2,3,5,\cdots.$$

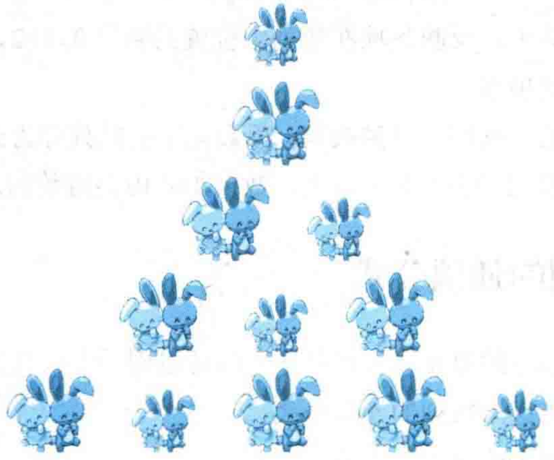


图 6-1

若要计算一年后共有兔子多少对，就需要应用数列的知识．

6.1 数列的概念

6.1.1 数列的定义

观察

全体自然数从小到大排成一列数为

$$0,1,2,3,4,\cdots. \quad ①$$

2,4,6,8,10 的倒数排成一列数为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}. \quad ②$$

无穷多个 3 构成一列数为

$$3,3,3,3,3,\cdots. \quad ③$$

2006～2012 年某市普通高中生人数（单位：万人）构成一列数为

$$82,93,105,119,129,130,132. \quad ④$$

提示

例如，在数列①中，$a_1=0$，$a_2=1,a_3=2$，$a_4=3,a_5=4,\cdots$.

像这样，按照一定次序排成的一列数称为**数列**. 数列中的每一个数称为这个数列的**项**. 数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数称为这个数列的第 1 项（或**首项**），排在第二位的数称为这个数列的第 2 项，……，排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项.

所以，数列的一般形式可以写成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$. 其中，反映各项在数列中位置的数字 $0,1,2,3,\cdots,n$ 分别称为对应各项的**项数**.

提示

数列的“项”与这一项的“项数”是两个不同的概念. 例如，数列④中第 2 项为 93，而这一项的项数为 2.

项数有限的数列称为**有穷数列**；项数无限的数列称为**无穷数列**. 上面的例子中，数列②④为有穷数列，数列①③为无穷数列.

6.1.2　数列的通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与项数 n 之间可以用一个公式来表达，那么这个公式就称为这个数列的**通项公式**.

例如，数列①的通项公式为

$$a_n=n-1,n\in\mathbf{N}^*.$$

数列②的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2n},n\in\{1,2,3,4,5\}.$$

数列③的通项公式为

$$a_n=3,n\in\mathbf{N}^*.$$

像数列③这样各项都相等的数列称为**常数列**.

已知数列的通项公式，可以求出这个数列中的任意一项；也可以求出已知项的项数.

注意

① 并不是每个数列都有通项公式.

② 若一个数列的通项公式定义域为 $\mathbf{N}^*$，在本章中，$n\in\mathbf{N}^*$ 可省略.

◈ 例题解析

例 1　写出下列数列的一个通项公式，使其前 4 项分别是下列各数.

（1）$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$；　　　　（2）$2,0,2,0$.

解　（1）观察数列的前 4 项与其项数的关系

$$a_1=\frac{(-1)^{1+1}}{1},\qquad a_2=\frac{(-1)^{2+1}}{2},$$
$$a_3=\frac{(-1)^{3+1}}{3},\qquad a_4=\frac{(-1)^{4+1}}{4}.$$

由此可知，该数列的通项公式为

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

（2）观察数列的前 4 项与其项数的关系

$$a_1=(-1)^{1+1}+1,\qquad a_2=(-1)^{2+1}+1,$$
$$a_3=(-1)^{3+1}+1,\qquad a_4=(-1)^{4+1}+1.$$

由此可知，该数列的通项公式为

$$a_n=(-1)^{n+1}+1.$$

例 2　已知数列的通项公式为 $a_n=10+2n$，求：

（1）数列的前 4 项；　　　　（2）数列的第 10 项；

（3）若 54 为该数列的一项，请计算它的项数.

解　（1）$a_1=10+2\times1=12$，$a_2=10+2\times2=14$，

$a_3=10+2\times3=16$，$a_4=10+2\times4=18$.

所以，数列的前 4 项是 $12,14,16,18$.

（2）数列的第 10 项是

$$a_{10}=10+2\times10=30.$$

（3）
$$a_n=10+2n=54,$$
$$n=22.$$

所以，54 为该数列的第 22 项.

例 3　某水泥厂生产水泥，今年的产量为 18 万吨，由于技术改造，计划每年增产 15%，写出从今年开始 5 年内每年的产量排成的数列，并写出通项公式.

解　$a_1=18$；

$a_2=18\times(1+0.15)=18\times1.15$；

$a_3=18\times1.15\times(1+0.15)=18\times1.15^2$；

$a_4=18\times1.15^2\times(1+0.15)=18\times1.15^3$；

$a_5=18\times1.15^3\times(1+0.15)=18\times1.15^4$.

故该数列为

注意

由数列的有限项探求通项公式时，答案不一定是唯一的．例如，2^n-1 和 n^2-n+1 的前 3 项相同．

$$18, 18\times1.15, 18\times1.15^2, 18\times1.15^3, 18\times1.15^4.$$

其通项公式为

$$a_n = 18\times1.15^{n-1}, n\in\{1,2,3,4,5\}.$$

习题 6.1

1. 已知数列的前 4 项，写出它们的一个通项公式.

（1）$2, 3, 4, 5$；　　（2）$-3, -6, -9, -12$；

（3）$1, 8, 27, 64$；　　（4）$\dfrac{1}{1\times2}, -\dfrac{1}{2\times3}, \dfrac{1}{3\times4}, -\dfrac{1}{4\times5}$.

2. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它们的前 5 项.

（1）$a_n = 5\times(-1)^{n-1}$；　　（2）$a_n = n(n-1)$；

（3）$a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$；　　（4）$a_n = (-1)^n\dfrac{1}{n+1}$.

3. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式.

（1）$1, 3, 7, (\quad), 31, (\quad), 127$；

（2）$2, 5, (\quad), 17, 26, (\quad), 50$；

（3）$1, \sqrt{2}, (\quad), 2, \sqrt{5}, (\quad), \sqrt{7}$.

4. 写出数列 $\{n(2n+3)\}$ 的前 4 项，并判断 275 是否为该数列中的项，如果是，请指出是第几项.

6.2　等差数列

6.2.1　等差数列的定义

观察

正偶数从小到大排列，可组成数列

$$2, 4, 6, 8, \cdots. \qquad ①$$

某住宅楼，从第 1 层开始，每一层的楼板高度，可组成数列

$$0, 3, 6, 9, \cdots. \qquad ②$$

买衣服时会发现，衣服的号码从小到大可组成数列

$$160,165,170,175,\cdots. \quad ③$$

观察上面的数列，可以发现：

数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 2;

数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 3;

数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于 5.

这三个数列有一个共同特点，就是从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与其前一项的差都等于同一个常数，那么，这个数列称为**等差数列**，这个常数称为等差数列的**公差**，用字母 d 表示.

如果三个数 a,A,b 成等差数列，则 $A-a=b-A$，即

$$A=\frac{a+b}{2},$$

此时，A 就称为 a 与 b 的**等差中项**.

等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等差中项.

提示

由等差数列的定义可知 $a_{n+1}-a_n=d$.

6.2.2 等差数列的通项公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，则

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

依次类推，最终可推导出等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

想一想

在等差数列的通项公式中，有四个量：a_n，a_1，n、d. 一般，只要知道其中的三个，就可以求出第四个了. 现在请大家想一想，当所求的量不同时，应分别采用什么样的计算方法?

◈ 例题解析

例 1 求等差数列 $10,6,2,\cdots$ 的第 15 项.

解 因 $a_1=10,d=a_2-a_1=6-10=-4$，所以该数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d=10+(n-1)\times(-4)$$
$$=-4n+14.$$

该数列的第 15 项为

$$a_{15}=-4n+14=-4\times15+14=-46.$$

练一练

若已知等差数列 $\{a_n\}$ 的 $a_3=5$，$a_7=17$，你可以求出它的 a_1 和 d 吗?

提示

由例题我们可以总结出，在等差数列的通项公式中，字母 n 的系数即为等差数列的公差．例如，例题 2 中，通项公式为 $a_n=3n-1$，n 的系数 3 即为该等差数列的公差．

例 2 等差数列 $2,5,8,\cdots$ 的第几项是 59？

解 因 $a_1=2$，$d=a_2-a_1=5-2=3$，所以该数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 3$$
$$=3n-1.$$

设该数列的第 n 项等于 59，则

$$59=3n-1,$$

解得

$$n=20.$$

因此，该数列的第 20 项为 59．

例 3 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d=5$，$a_9=38$，求首项 a_1．

解 因 $d=5$，故设等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+5(n-1).$$

因 $a_9=38$，故

$$38=a_1+5\times(9-1).$$

解得

$$a_1=-2.$$

例 4 某市出租车的计价标准为 1.2 元/km，起步价为 10 元，即最初的 4 km（不含 4 km）计价 10 元．如果某人在该市坐出租车去 14 km 处的地方，需要支付多少车费？

解 根据题意，当该市出租车的行程大于或等于 4 km 时，每加 1 km，乘客需要支付 1.2 元．所以，可以建立一个等差数列 $\{a_n\}$ 来计算车费．

令 $a_1=11.2$ 表示 4 km 处的车费，公差 $d=1.2$．那么，当出租车行至 14 km 处时，$n=11$，此时需要支付的车费为

$$a_{11}=11.2+(11-1)\times 1.2=23.2(\text{元}).$$

卡尔·弗里德里希·高斯，德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家，近代数学的奠基者之一，在历史上影响巨大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列，有“数学王子”之称．

6.2.3 等差数列的前 n 项和公式

著名数学家高斯在上小学的时候就显示出了惊人的天赋．最能证明这一点的是高斯十岁那年，老师出了一道题目，要求学生将 1 到 100 的所有整数加起来．当其他学生忙于把 100 个数逐个相加时，高斯却用下面的方法迅速算出了正确答案：

$$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)=101\times 50=5\,050.$$

高斯的算法实际上解决了求等差数列 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 前 100 项和的问题．此数列的首项为 1，第 100 项为 100，公差为 1，根据高斯的计算可知，其前 100 项和为

$$\frac{(1+100)\times 100}{2}.$$

下面我们将这种方法推广到求一般等差数列的前 n 项和.

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和可用 S_n 表示，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据高斯算法的启示，对于公差为 d 的等差数列，其前 n 项和可表示为

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ①$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad ②$$

将①②两式相加可得

$$\begin{aligned}2S_n&=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

由此得到等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

将等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入上式，可得

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

◈ 例题解析

例 5 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$d=2, a_{20}=29$，求前 20 项的和 S_{20}.

解 由已知条件可得

$$29=a_1+(20-1)\times 2,$$

$$a_1=-9.$$

因此，其前 20 项之和为

$$S_{20}=\frac{20\times(-9+29)}{2}=200.$$

例 6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n=2n^2-30n$，求出这个数列的通项公式，并判断其是否为等差数列?

解 因

$$S_n=2n^2-30n,$$

$$S_{n-1}=2(n-1)^2-30(n-1),$$

因此

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-32, n\geqslant 2.$$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2-30=-28$，也适合上式，所以该数列的通项

提示

数列 $\{a_n\}$ 的通项与它的前 n 项和 S_n 有如下关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}.$$

公式为

$$a_n = 4n - 32.$$

又因

$$a_n - a_{n-1} = (4n - 32) - [4(n-1) - 32] = 4, n \geqslant 2.$$

所以，$\{a_n\}$是等差数列.

6.2.4 等差数列实际应用举例

例 7 在政府的安排下，银行提供无息贷款 58 000 元帮助某地区发展一个项目，还款方式为一年后的第一个月还 1 000 元，以后每个月都比前一个月多还 200 元，问需要多少个月能还清全部贷款？

解 由题意可知，每月还款数是首项 $a_1 = 1000$，公差 $d = 200$ 的等差数列. 设 n 个月可以还清贷款，则 n 个月的还款总额为 S_n，即

$$S_n = 1\,000n + \frac{n(n-1)}{2} \times 200 = 100n^2 + 900n.$$

因为还款是无息的，所以有

$$100n^2 + 900n = 58\,000,$$

解得 $$n_1 = 20, n_2 = -29(\text{舍去}).$$

故 20 个月可以还清这笔贷款.

例 8 用一辆汽车从预制场运送 54 根水泥电杆去 500 m 处的地方开始安装，以后每隔 50 m 放一根，一辆车一次运三根，请计算完成整个任务汽车行程多少公里？

解 第一车运三根，放在 500 m，550 m，600 m 处返程，汽车行程 $600 \times 2 = 1\,200(\text{m})$，以后每车比前一车多行 $50 \times 3 \times 2 = 300(\text{m})$，共运 18 车，则 18 车的往返行程成等差数列，其 $a_1 = 1\,200, d = 300, n = 18$，故

$$S_{18} = 18 \times 1\,200 + \frac{1}{2} \times 18 \times 17 \times 300 = 67\,500(\text{m}),$$

即完成整个任务汽车行程 67.5 公里.

习题 6.2

1. （1）求等差数列 $-7, -4, -1, \cdots$ 的第 20 项.

（2）等差数列 $4, 9, 14, \cdots$ 的第几项是 119？

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_7 = 13, a_{10} = 4$，求 a_6 和 d；

（2）已知 $a_2 = 12, a_n = -20, d = -2$，求 n；

（3）已知 $a_{18}=18, d=3$，求 a_{10}．

3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，

（1）已知 $a_1=2, a_{10}=29$，求 S_{10}；

（2）已知 $a_1=5, d=\dfrac{3}{2}$，求 S_{15}．

4．体育场一角看台的座位是这样排列的：第一排有 15 个座位，从第二排起每一排都比前一排多 2 个座位．你能用 $\{a_n\}$ 表示第 n 排的座位数吗？第 10 排能坐多少个人？

5．一种车床变速箱 8 个齿轮的齿数成等差数列，其中，首末两个齿轮的齿数分别是 45 和 24，求其余各轮的齿数．

6．一批木材共 210 根，要堆成 7 层，要求上面一层要比下面一层少一根，问最下面一层应当放几根？

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的定义

在现实生活中，我们还会遇到下面一组数列，即细胞分裂时每次 1 个细胞分裂为 2 个，则每次分裂后细胞的个数依次为

$$2,4,8,16,32,\cdots.$$

观察上面的数列，可以发现，从第 2 项开始，数列中每一项与其前一项的比都等于 2．

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与其前一项的比都等于同一常数，那么，这个数列称为**等比数列**，这个常数称为等比数列的**公比**，用字母 $q(q\neq 0)$ 表示．

如果三个数 a，G，b 成等比数列，则

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G},$$

即

$$G^2=ab,$$

此时，G 就称为 a 与 b 的**等比中项**．

等比数列中，从第 2 项起，每一项（有穷数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等比中项．

提示

由等比数列的定义可知 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q, q\neq 0.$

6.3.2 等比数列的通项公式

与等差数列类似，下面我们通过观察等比数列各项之间的关系来探求其通项公式.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，则

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 q,$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$
……

依次类推，最终可推导出等比数列的通项公式为

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

注意

对于任意两个非零实数 a，b，只有当 a，b 同号时，它们之间才存在等比中项 G，且 $G=\pm\sqrt{ab}$.

想一想

在等比数列的通项公式中，有四个量：a_n，a_1，n，q，一般只要知道其中的三个，就可以求出第四个了. 现在请大家想一想，当所求的量不同时，应分别采用什么样的计算方法？

◈ 例题解析

例 1 一个等比数列的第 3 项和第 4 项分别是 12 和 18，求它的第 1 项和第 2 项.

解 设这个等比数列的第 1 项为 a_1，公比为 q，那么

$$a_1 q^2 = 12, \quad ①$$
$$a_1 q^3 = 18, \quad ②$$

②÷①，得

$$q = \frac{3}{2}.$$

将 q 代入式①，可得

$$a_1 = \frac{16}{3}.$$

于是

$$a_2 = a_1 q = \frac{16}{3} \times \frac{3}{2} = 8.$$

例 2 求等比数列 $11, 3.3, 0.99, \cdots$ 的第 4 项和第 5 项.

解 由题意可知，$a_1 = 11, q = \frac{3.3}{11} = 0.3$，所以该数列的通项公式为

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 11 \times 0.3^{n-1}.$$

因此

$$a_4 = 11 \times 0.3^{4-1} = 0.297,$$
$$a_5 = 11 \times 0.3^{5-1} = 0.0891.$$