普通高等教育应用技术本科规划教材

概率论与数理统计

主　编　王　红　刘　磊
副主编　商　豪　朱长青

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育应用技术本科规划

概率论与数理统计

主　编　王　红　刘　磊
副主编　商　豪　朱长青

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据高等院校“概率论与数理统计课程教学”基本要求，并结合21世纪工科类概率论与数理统计课程教学内容与课程体系改革发展要求编写而成.

本书共分5章，包括概率论的基本概念、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计初步等内容. 每章配有一定数量的习题，书末还附有习题的参考答案.

本书内容充实，体系新颖，选题灵活，并附有配套的练习册，可作为高等院校工科、理科和经济管理类专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书，对报考硕士研究生的学生以及广大教师与科技人员，也具有较高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 王红，刘磊主编. -- 上海：同济大学出版社，2014. 11

ISBN 978-7-5608-5609-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①王…②刘… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第199008号

普通高等教育应用技术本科规划教材

概率论与数理统计

主编 王 红 刘 磊 副主编 商 豪 朱长青

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 17

字 数 424 000

版 次 2014年11月第1版 2014年11月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5609-4

定 价 32.00元

前　言

当人类进入21世纪以来，随着社会的进步、经济的发展、计算机技术的广泛应用，数学在其中的作用变得越来越突出，科学技术研究中所用到的数学方法越来越高深，数学化已成为当今社会发展中各个研究领域中的重要趋势.

为赶超世界先进水平，近年来我国高等院校积极开展高等教育的教育教学改革，努力向国外先进水平看齐，其中大学数学的教学内容和教学方法改革首当其冲，这大大提高了大学数学的适用性.

本书是根据当前科学技术发展形势的需要，结合我们多年来对概率论与数理统计课程教学内容和教学方法改革与创新的成果编写而成的，其主要特点是注重数学与工程技术的有机结合，其中的许多例题和习题本身就是来自于实际的应用.同时对数学中的纯理论性的东西如概念、定理、方法的介绍注意结合学生的实际，尽量采用学生易于理解、容易接受的方式，进行深入浅出的讲解，从而最大限度地降低学生学习的难度.

本书由王红、刘磊主编，商豪、朱长青任副主编，参加编写的人员有：王红、刘磊、商豪、徐循、朱长青、杨策平、朱玲、张凯凡、李家雄、许松林、费锡仙、胡二琴、朱莹、陈华等老师，最后由王红、刘磊、商豪统稿定稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时予以修订.

编　者

2014年6月

目　　录

第1章 概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科，它与其他学科有着紧密的联系，并在社会经济各个领域具有广泛的应用. 本章将重点介绍概率论中的基本概念，如随机事件、样本空间、概率等，它们是学习概率论与数理统计的基础.

§1.1 随机事件与样本空间

一、随机现象及其统计规律性

在自然界和社会生活中存在着两类不同的现象：必然现象和随机现象，它们是从其结果能否被准确预知的角度来区分的. **必然现象**是在一定条件下必然发生（或必然不发生）并能准确预知其结果的现象. 例如，在标准大气压下，水在 100℃沸腾；在地面上竖直向上抛的石子一定下落等. **随机现象**是指在相同条件下重复进行时事先无法预知其结果的现象. 例如，在相同条件下抛掷同一枚硬币，可能出现标明硬币价值的"数字面"（记为"正面"）朝上，也可能另一面（记为"反面"）朝上，而每次在抛掷这枚硬币之前，都无法预知会出现"正面朝上"还是"反面朝上"的结果；记录 1 天内来某医院就诊的人数可能是任意非负整数，但事先无法预知其确切数字；某人买彩票可能中奖，也可能不中奖，但买之前无法预知是否中奖等.

随机现象的结果虽然无法预测，但并不是完全无规律可循. 例如，多次重复抛掷一枚硬币得到"正面朝上"的结果大致有 50%，1 天内到某医院就诊的人数按照一定规律分布，等等. 可见，虽然随机现象在个别试验或观察中会出现不确定的结果，但在大量重复试验或观察中其结果具有某种规律性，这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

概率论与数理统计的研究对象是随机现象的统计规律性.

二、随机试验与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性，需要对客观事物进行观察或试验. 下面是一

些观察或试验的例子.

E_1:抛掷一枚骰子,观察出现的点数;

E_2:抛掷一枚骰子 2 次,观察出现的点数;

E_3:抛掷一枚骰子 2 次,观察出现的点数之和;

E_4:记录某火车站售票处 1 天内售出的车票数;

E_5:在一批日光灯管中任意抽取 1 只,测试它的寿命.

仔细分析,可以发现上述观察或试验具有以下共同的特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地,将具有以上 3 个特点的观察或试验称为**随机试验**,记为 E,本书提到的试验都是指随机试验.

将随机试验所有可能结果构成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S. 样本空间的元素即随机试验 E 的每个可能结果称为**样本点**,记为 ω.

例如,上面的 5 个随机试验 $E_i(i=1, 2, \cdots, 5)$ 的样本空间分别为:

$S_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$S_2=\{(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6), (2, 1), \cdots, (2, 6), \cdots, (6, 1), \cdots, (6, 6)\}$;

$S_3=\{2, 3, \cdots, 12\}$;

$S_4=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$,这里的 n 是售票处 1 天内准备出售的车票数;

$S_5=\{t \mid t \geqslant 0\}$.

需要注意的是,样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如,在随机试验 E_2 和 E_3 中同是将一枚骰子抛掷 2 次,但由于试验的目的不一样,其对应的样本空间 S_2 和 S_3 也不一样.

三、随机事件

在实际进行随机试验时人们常常关心满足某些条件的那些样本点构成的集合. 例如,在观测日光灯管的寿命的随机试验 E_5 中,希望灯管寿命越长越好,比如寿命是否大于 1 000 h,即是否有 $t \geqslant 1\,000$,满足这一条件的样本点构成样本空间 S_5 的一个子集 A, $A=\{t \mid t \geqslant 1\,000\}$,称 A 为随机试验 E_5 的一个事件.

一般地,将随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**. 常用大写字母 A, B, C, $\cdots$表示. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一**事件发生**.

特别地,由一个样本点构成的单点集称为**基本事件**. 例如,试验 E_1 有 6 个基本

事件$\{1\}$，$\{2\}$，…，$\{6\}$；试验 E_3 有 11 个基本事件$\{2\}$，…，$\{12\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中是必然发生的，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也是 S 的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件与不可能事件虽无随机性可言，但在概率论中常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

例如，在 E_1 中"出现的点数是奇数"的事件 $A_1 = \{1, 3, 5\}$；

在 E_2 中"第1次出现的点数是1"的事件 $A_2 = \{(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6)\}$；

在 E_5 中"灯泡的寿命小于 1 000 h"的事件 $A_3 = \{t \mid 0 \leqslant t < 1\,000\}$.

四、事件的关系与运算

在同一样本空间中往往存在许多随机事件. 数学上一个基本的思想方法是通过对较简单事件的分析去了解较复杂的事件，因此，需要研究随机试验的各个事件之间的关系和运算.

由于样本空间、随机事件都是集合，因此，随机事件之间的关系和运算同集合之间的关系和运算是一致的. 下面根据"事件发生"的含义给出这些关系和运算在概率论中的提法.

设随机试验 E 的样本空间为 S，而 A, B, $A_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$，它表明事件 A 的样本点都属于事件 B.

2. 事件的相等

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$，它表明事件 A 的样本点与事件 B 的样本点完全相同.

3. 事件的和(并)

将表示"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的**和(并)**，记为 $A \cup B$. 它是由属于 A 或 B 的样本点构成的集合.

类似地，称$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 的和(并)；称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, … 的和(并).

4. 事件的积(交)

将表示"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积(交)**，记为 $A \cap B$ 或 AB. 它是由既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.

类似地，称$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 的积(交)；称$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, … 的积(交).

5. 事件的差

将表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记为 $A-B$. 它是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合.

6. 互不相容(或互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容(或互斥)**，它表明事件 A 与事件 B 没有相同的样本点.

7. 对立事件(或逆事件)

若 $A\cup B=S$, $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**(或**互为逆事件**)，它表明对每次试验而言，事件 A, B 必有一个发生，且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$, $\overline{A}=S-A$.

上述事件的各种关系和运算可用韦氏图(图 1-1)直观地表示.

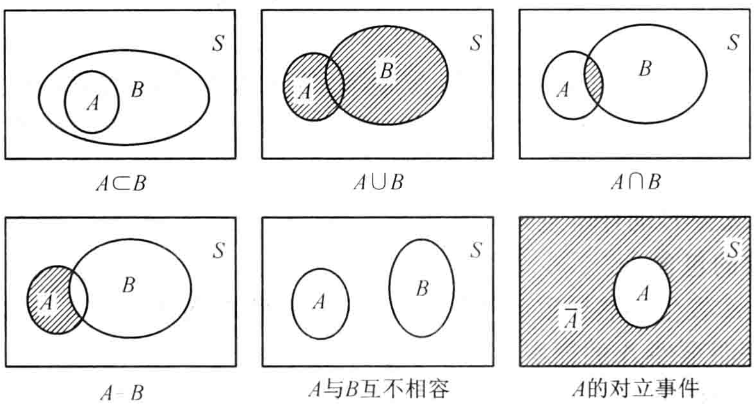

图 1-1 事件的关系与运算韦氏图

事件运算经常用到下述运算定律.

设 A, B, C 为事件，则有：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 对偶律(德・摩根公式) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 设有甲、乙、丙 3 人参加某项测试，记 A 为事件"甲参加该项测试合格"，B 为事件"乙参加该项测试合格"，C 为事件"丙参加该项测试合格"。试用 A, B, C 的运算关系表示以下各事件：

(1) 3 人中只有甲合格；

(2) 3 人中仅有 1 人合格；

(3) 3 人中至少有 1 人合格；

(4) 3 人都合格.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$.

(2) $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$.

(3) $A \cup B \cup C$ 或 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$.

(4) ABC.

§1.2　概率的概念和性质

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，人们常常关注某些事件发生的可能性究竟有多大，希望找到一个合适的数来度量事件在一次试验中发生的可能性大小. 本节先由频率引出度量事件发生的可能性大小的概率统计定义，然后给出概率的公理化定义，最后探讨概率的性质.

一、概率的统计定义

概率的统计定义是以大量重复试验为前提的，为此，首先引入频率及其稳定性的概念.

定义 1　在相同条件下重复做 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

由定义易知频率具有下列基本性质：

(1) 对任意事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S) = 1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n).$$

例 1　考查“抛硬币试验”，将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 6 遍，得

到数据如表 1-1 所示(其中 n_A 表示"硬币正面朝上"(设为事件 A)发生的频数，$f_n(A)$ 表示 A 发生的频率).

表 1-1　抛硬币试验数据

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492

由表 1-1 可以看出，虽然对于同样的试验次数 n，$f_n(A)$ 不尽相同，但当试验次数较大时，频率 $f_n(A)$ 在 0.5 附近波动，且随着 n 的增加，它逐步稳定在 0.5 这个数值上.

大量试验证实，当试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现稳定性，逐渐稳定于某个常数，这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性. 如果大量重复试验次数，得到频率 $f_n(A)$ 的稳定值，以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的.

定义 2(概率的统计定义)　在相同条件下进行大量重复试验，如果随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某一常数 p，则称常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$.

由统计定义求得的概率称为统计概率.

例如，在例 1 抛硬币试验中，事件 A("硬币正面朝上")的统计概率即为频率的稳定值 0.5.

二、概率的公理化定义

鉴于得到统计概率需要进行大量的试验，同时，为理论研究的需要，从频率的稳定性和频率的性质得到启发，可以给出如下度量事件发生可能性大小的概率的公理化定义.

定义 3(概率的公理化定义)　设 S 是随机试验 E 的一个样本空间，对于 E 上的每一事件 A 规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 同时满足下列 3 条公理条件:

(1) 非负性　$P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性　$P(S)=1$;

(3) 可列可加性　对任意可列个两两不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由大数定律(本书第 5 章内容)可知,当试验次数 $n \to \infty$ 时,频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$,因此,有理由将概率 $P(A)$ 用来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

三、概率的性质

由概率定义的 3 个公理条件可以推导出概率的一些重要性质.

性质 1　不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing) = 0$.

证明　因为 $S = S \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,由概率公理化定义的条件(2) 和条件(3),有 $P(S) = P(S) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$. 因此,$P(\varnothing) = 0$.

性质 2(有限可加性)　设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两不相容的,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证明　因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots,$$

而 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \varnothing, \varnothing, \cdots$ 是可列个两两不相容事件,由可列可加性和性质 1,有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

性质 3　对任意事件 A,有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明　因为 $A \cup \overline{A} = S$,且 $A\overline{A} = \varnothing$,由性质 2 有

$$1 = P(S) = P(A) + P(\overline{A}),$$

即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 4　对任意事件 A, B,有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

特别地,若 $A \supset B$,则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

证明　由于 $A = (A - B) \cup AB$,而 $(A - B) \cap AB = \varnothing$,故由性质 2,知

$$P(A) = F(A - B) + P(AB),$$

即

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

特别地，若 $A\supset B$，则 $AB=B$，所以

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$

推论 1　若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

推论 2　对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 5　对任意事件 A, B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明　由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，而 A 与 $B-AB$ 不相容，故由性质 2 和性质 4，知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5 得证.

性质 5 称为概率加法公式，它可以推广到有限多个事件的情形. 例如，对于 3 个事件 A, B, C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对于 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n，概率加法公式为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 2　设 $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$，分别在下列条件下求 $P(A\bar{B})$：

(1) $A\supset B$；(2) A 与 B 互不相容；(3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$.

解　由事件的关系与运算知 $A\bar{B}=A-B$，结合性质 4，可得

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

(1) 当 $A\supset B$ 时，有 $P(AB)=P(B)$，因此

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(AB)=0$，因此

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$