

带跳的不确定 最优控制及应用

DAITIAO DE BUQUEDING
ZUIYOU KONGZHI JI YINGYONG

■ 邓留保 / 著



经济科学出版社
Economic Science Press

带跳的不确定最优控制及应用

邓留保/著

经济科学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

带跳的不确定最优控制及应用/邓留保著. —北京:
经济科学出版社, 2014. 5

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4681 - 3

I. ①带… II. ①邓… III. ①最佳控制 - 研究
IV. ①0232

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 108160 号

责任编辑: 杜 鹏

责任校对: 靳玉环

责任印制: 邱 天

带跳的不确定最优控制及应用

邓留保/著

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191522

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件: [esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: [http: //jjkxcbs. tmall. com](http://jjkxcbs.tmall.com)

北京万友印刷有限公司印装

880 × 1230 32 开 4. 25 印张 150000 字

2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5141 - 4681 - 3 定价: 25. 00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191502)

(版权所有 翻印必究)

前 言

现实生活的复杂性使得我们面对各种各样的非决定性事件。非决定性主要包括客观非决定性和主观非决定性。随机性是一种客观非决定性，概率论是研究这种非决定性的有效数学工具。主观非决定性，一些学者将其称为模糊性，并用 Zadeh 的模糊集理论进行研究。然而，大量的研究表明，在现实生活中，有许多非决定性既不能用概率论也不能用模糊集理论来解释。如由人类主观意识造成的非决定性，或者人类语言表达的非决定性，如“大约 100 公里”、“高速”、“大约 80 公斤”、“大约 39 摄氏度”、“大小适中”等，既不满足概率论也不满足模糊集理论所描述的性质，这种主观非决定性需要用新的理论来解决。2007 年，清华大学刘宝碇教授提出了建立在规范性、自对偶性、次可加性和乘积测度公理化体系之上的不确定性理论，作为研究这类主观非决定性的数学工具。目前该理论已经发展成为一门数学分支。不确定最优控制是建立在不确定性理论基础上的一种新的最优控制问题。2010 年，朱元国教授提出并研究了不确定最优控制问题。但对不确定最优控制的研究才刚刚开始，还有很多方面的问题需要作进一步的研究。在实际中，一些不确定系统可能会受到外部突发性非决定性信息的干扰，系统的状态可能会发生突发性的跳跃。本书在已有的对不带跳的不确定最优控制问题研究的基础上，考虑跳跃对不确定系统的影响，应用动态规划原理进一步研究了带跳的不确定最优控制问题。主要研究内容如下：

1. 引入了一个具有跳跃不确定分布的 Z 跳跃不确定变量 $Z(r_1, r_2, t)$ ，证明了 Z 跳跃不确定变量的线性可加性；在此基础上引入了一个 V 跳跃不确定过程来描述不确定微分系统中的不连续的跳跃部分，证明了 V 跳跃不确定过程的存在性；定义了不确定过程对

V 跳跃不确定过程的积分及微分；引入了跳跃不确定微分方程；研究了跳跃不确定微分方程解的存在性和唯一性。

2. 研究了一维连续情形下带跳的不确定最优控制问题。运用动态规划法证明了其最优性原理，得出了最优性方程，并研究了模型在最优证券组合投资和养老基金最优控制方面的应用。

3. 将一维连续情形下带跳的不确定最优控制问题推广到了多维情形。推导出了多维连续情形下带跳的不确定最优控制问题的最优性原理和最优性方程，研究了模型在 R&D (Research and Development) 公共财政补贴政策优化决策方面的应用。

4. 研究了一维连续情形下特殊带跳的不确定最优控制问题——带跳的线性二次不确定最优控制问题，推导出了最优控制存在的充分和必要条件，讨论了其在企业投资决策优化方面的应用。

5. 将一维连续情形下带跳的线性二次不确定最优控制问题推广到了多维情形。推导出了多维连续情形下带跳的线性二次最优控制存在的充分和必要条件，并研究了其在企业最优库存控制方面的应用。

作者

2014年3月

目 录

1	引言	1
1.1	选题背景及意义	1
1.2	国内外研究现状	6
1.3	本书的结构安排	12
2	预备知识	14
2.1	不确定测度	14
2.2	不确定变量	17
2.3	不确定分布和逆不确定分布	19
2.4	不确定变量的期望和方差	23
2.5	不确定过程	25
2.6	不确定积分与微分	27
3	带跳的不确定分析	33
3.1	跳跃不确定变量	33
3.2	跳跃不确定过程	38
3.3	跳跃不确定积分与微分	41
3.4	跳跃不确定微分方程	43
3.5	跳跃不确定微分方程解的存在性与唯一性	45
4	带跳的不确定最优控制问题	51
4.1	一维带跳的不确定最优控制问题	51
4.2	多维带跳的不确定最优控制问题	64
5	带跳的线性二次不确定最优控制问题	79
5.1	一维带跳的线性二次不确定最优控制问题	79
5.2	多维带跳的线性二次不确定最优控制问题	92

6 结论与展望	108
6.1 本书的主要工作	108
6.2 本书的创新点	109
6.3 今后的研究方向	109
参考文献	110
致谢	126

1 引言

1.1 选题背景及意义

最优控制问题是人们在日常生活及工作中都会经常遇到的普遍性问题。自 20 世纪 50 年代以来，最优控制理论已经成为现代控制理论的重要研究分支，它的研究对象是在某控制系统下使某项性能指标达到最优。最优控制理论在实际生活的诸多领域有着非常广泛的应用，不仅在生产、生活、国防和规划等领域具有重要意义，而且越来越广泛地被应用到经济管理科学中，发挥着愈来愈大的作用。随着现代数学理论的不断进步，最优控制理论也在不断地向前发展，仍是一个十分活跃的研究领域。

许多学者对最优控制理论的研究主要是在确定性环境下进行，即在确定性信息下建立最优控制模型。在现代最优控制理论中，借助于变分法、Pontryagin 的极大值原理及 Bellman 的动态规划原理等主要工具，确定性最优控制已建立了一套比较成熟的理论。其中，线性二次型 (LQ) 控制理论则是最优控制理论最完整的一部分，无论在理论方面还是在应用方面都得到了极大的发展，在现代控制理论中占有中心的地位。

随着人们对自然界和人类社会认识的不断加深，发现确定性的模型并不能解决现实生活中所有的最优控制问题。由于自然界和人类社会在不断变化和发展之中，人们接触到的各种各样的信息有时候是确定性的，但更多的时候是非决定性的。在现实世界中，非决定性信息可谓无处不在、无处不有、无孔不入。信息或事件是否出现以及以什么样的形态出现要受到种种偶然的、不可预测的因素的影响。随机信息是人们较早认识的一种客观非决定性信息，处理此类问题的有效工具是概率论，其公理化体系由苏联数学家 Kolmogorov 于 1933 年建立。当人们科学地认识和处理的非决定性

信息是随机信息时，一些学者提出并研究了随机最优控制问题，即研究基于某随机控制系统下确定一个决策以使某项性能指标达到最优。自从 20 世纪 70 年代 Merton¹ 将随机最优控制技术应用用于研究最优消费投资以来，随机最优控制理论得到了极大的发展，尤其是在现代金融中的应用。借助随机分析理论研究随机最优控制问题，其丰富的研究成果使得随机最优控制理论现在已成为一个重要的研究分支，并且在不同的领域显示出非同凡响的应用。

不同于随机客观非决定性信息，在实际生活中还广泛存在着另一类主观非决定性信息，习惯上称为模糊信息。由于人的主观表现，在有人类参与的活动中都会出现这类模糊信息。处理此类问题的有效工具是模糊数学理论。自 1965 年 Zadeh² 首次提出模糊集的概念以来，模糊数学理论已经得到了长足的发展。迄今为止模糊数学已逐渐成为人们用来处理主观非决定性信息的一个重要方法。为了用数学方法严密度量模糊事件发生的可能性，1978 年，Zadeh³ 提出了可能性测度及模糊变量的概念，并发展了一套可能性理论。后来人们发现用可能性理论去解决现实问题时需要同时使用它的对偶部分——必要性测度，进而又引进了必要性测度的概念。但这两种测度都缺乏自对偶性。也就是说，当已知某模糊事件的可能性测度(或必要性测度)时，其对立事件的可能性测度(或必要性测度)却未必能知。为此，2002 年，清华大学刘宝碇教授提出了可信性测度的概念，解决了上述问题，并于 2004 年系统地提出了可信性理论⁴，进一步发展了模糊数学理论。

模糊逻辑控制、最优模糊控制和模糊最优控制是模糊数学理论

¹Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model. *Journal of Economic Theory*, 1971, 3:373-413.

²Zadeh L. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8:338-353.

³Zadeh L. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, 1:3-28.

⁴Liu B. *Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

在控制论中应用的三个方面。模糊集理论的应用起源于控制论，诞生了模糊控制论。模糊控制论的基本研究内容之一是利用“IF-THEN”规则构造模糊控制器，以达到某一目标的实现。这是一种基于规则的控制，它直接采用语言型控制规则，在设计中不需要建立被控制对象的精确数学模型。在模糊控制论中人们研究较多的是两个基本的模糊控制：Mamdani¹ 模糊控制和 Takagi-Sugeno² 模糊控制。国内外有无数控制论专家及数学家致力于模糊控制论的研究，如 Zadeh、Zimmermann、Komolov、Mamdani、Takagi、Sugeno、Dubois、Prade、Klir、Yager、汪培庄、王立新、张文修等。1979年，Komolov³ 提出了最优模糊控制的概念。该问题考虑在某控制系统下确定一个模糊决策以使性能指标达到最优。解决该问题的方法之一是针对决策的某种隶属度函数形式，利用 Pontryagin 的极大值原理求解。模糊集理论的另一个应用是模糊最优控制问题。该问题是研究基于某模糊控制系统下确定一个决策以使某项性能指标达到最优。解决该问题通常是将模糊问题转化为一个确定性的问题进行求解。需注意最优模糊控制与模糊最优控制是完全不同的。前者是研究确定型控制系统下确定模糊决策，即求出的解是一个模糊变量(或模糊集)；而后者则是在模糊系统下找出确定型决策。2009年，Zhu⁴ 利用 Liu (2004) 提出的可信性理论，进一步研究了模糊最优控制问题。

然而，现实生活的复杂性使得我们面对各种各样的非决定性信

¹Mamdani E. Applications of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proceedings IEEE, 1974, 121:1585-1588.

²Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1):116-132.

³Komolov S., Makeev S., Shaknov I. Optimal control of a finite automation with fuzzy constraints and a fuzzy target. Cybernetics and Systems, 1979, 16(6):805-810.

⁴Zhu Y. A fuzzy optimal control model. Journal of Uncertain Systems, 2009, 4:270-279.

息。大量的研究表明，在现实生活中还有许多非决定性现象既不能用概率论也不能用模糊数学理论来解释。例如，由人类主观意识造成的非决定性信息，或者人类语言表达的非决定性信息，如“大约 100 公里”、“高速”、“大约 80 公斤”、“大约 39 摄氏度”、“大小适中”等，就既不满足概率论也不满足模糊数学所描述的性质。用它们来解释会出现悖论。例如，考虑“北京到天津的距离为大约 100 公里”所表达的这样一个非决定性信息。如果将“大约 100 公里”理解为一个模糊变量，则可以构造如下的隶属度函数：

$$\mu(x) = \begin{cases} (x - 80)/20, & \text{如果 } 80 \leq x \leq 100, \\ (120 - x)/20, & \text{如果 } 100 \leq x \leq 120. \end{cases}$$

该隶属度函数表示了一个三角模糊变量 (80, 100, 120)。按照模糊数学的可能性理论，我们可得出“北京到天津的距离恰好等于 100 公里”和“北京到天津的距离不是 100 公里”的可能性测度均为 1 的结论。这显然违背人的直觉，根据常识我们可知，这个距离恰巧是“100 公里”几乎是不可能的。同时，“北京到天津的距离精确地等于 100 公里”和“北京到天津的距离不是 100 公里”的置信程度均为 1 这一结论也难以让人接受。我们凭直觉自然会认为“北京到天津的距离不是 100 公里”的可能性要远大于“北京到天津的距离恰为 100 公里”。同样，如果利用可信性理论，会得出“北京到天津的距离恰好等于 100 公里”和“北京到天津的距离不是 100 公里”的可信性测度均为 0.5 的结论，我们同样无法区分两个命题哪个更有可能发生。此例说明，“大约 100 公里”这一非决定性信息不能用可能性理论来描述，也说明了其不是模糊变量。实际中这样的问题很常见，还有大量的这种问题没有找到合适的方法解决。针对这样的问题，还有的学者主张利用主观概率或 Dempster-Shafer 证据理论来建立数学模型进行研究。然而，大量调研发现，这些非确

定性信息同样不适合利用主观概率或 Dempster-Shafer 证据理论去研究。事实上, 主观概率、Dempster-Shafer 证据理论也都存在各自的悖论。相关的例子参见 Shafer¹、Dempster² 等。

为了解决这类主观非决定性信息所产生的问题, 2007 年, 清华大学刘宝碇教授提出了具有规范性、自对偶性、可列次可加性和乘积测度公理的不确定性理论³。尝试用一种新的公理化体系的方法对这类主观非确定性信息进行研究。特别针对缺少历史数据或历史数据不可靠, 所需数据由人主观给出的情况。这一理论能胜任模糊数学的所有工作, 而且在刻画主观非决定性信息时, 并没有产生上述的悖论, 因而得到了广泛的认可和应用。2011 年, Liu 又进一步丰富了不确定性理论⁴。目前这套基于规范性、对偶性、次可加性和乘积测度四条公理的理论体系已经逐步发展为一个公理化的数学分支, 得到了很多学者的关注和研究, 衍生出了不确定过程、不确定微分方程、不确定分析、不确定熵、不确定统计、不确定规划、不确定逻辑、不确定推理、不确定风险分析、不确定金融等众多方向, 并广泛应用于电力、设备选址、车辆路径等众多领域。关于不确定性理论最新的研究进展见 Liu (2011)。

基于 Liu (2007) 提出的不确定性理论, Zhu (2010) 提出并研究了不确定最优控制问题。运用动态规划原理, 得出了最优控制问题的最优性方程。该模型对连续的不确定系统来说是合理的模型。然而, 在实际中, 某些外部极端事件或噪音对不确定系统具有重大的影响, 往往使系统呈现出不连续的变化状态, 表现出跳跃性的特征。例如, 在不确定金融市场, 某些重大事件的发生, 如战争、发

¹ Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976.

² Dempster A. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2):325-339.

³ Liu B. Uncertainty Theory. 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 2007.

⁴ Liu B. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

布宏观经济数据公告、货币政策调整消息发布、公司重大事项的公布等常常会引起证券价格发生跳跃式的剧烈波动。有时这种跳跃性具有非常大的危害性，如金融资产收益的跳跃的不可预测性和剧烈性往往会导致投资机构或个人突发性的巨大损失甚至破产（例如美国曾盛极一时的长期资本管理公司），更严重的会导致股市的崩溃甚至影响社会的稳定（如 1929 年、1987 年的美国股市危机、1998 年的亚洲金融危机以及 2007 年发生的美国次贷危机等）。本书在 Zhu (2010) 工作的基础上进一步研究系统受跳跃非决定性信息干扰的不确定最优控制问题及其在实际中的应用，是一件非常有意义的工作。本书的部分意义在于理论上为进一步发展不确定最优控制理论、拓展不确定性理论的应用范围做一点贡献，并可以为生产、工程、控制、管理、金融等领域中系统受跳跃非决定性信息干扰的最优控制问题提供特性研究及求解方法研究。

1.2 国内外研究现状

最优控制理论是由经典变分学发展起来的，其历史可追溯到 370 多年前的 17 世纪 30 年代末伽利略 (Galileo) 提出的悬链线重量问题和最速降线问题。许多数学家如莱布尼兹 (Leibnitz)、牛顿 (Newton)、贝努利 (Bernoulli)、欧拉 (Euler)、拉格朗日 (Lagrange) 等参加了对此问题的研究，并由此提出了最优控制变分法的概念。20 世纪 40 年代维纳 (Wiener) 提出了相对于某一个性能指标进行最优设计的概念，吸引了大批学者关注和研究。1950 年，米顿纳尔 (Medonal) 首次将这一概念应用于研究继电器系统在单位阶跃作用下的过渡过程的时间最短最优控制问题。我国学者钱学森 1954 年所著的《工程控制论》中介绍了 Bushaw 讨论的最优开关控制问题，并指出变分学是设计最优控制器的数学方法，从而在我国开始了最优控制理论的研究。到了 50 年代末，特别是 60 年代初，在空间技术发展和数字计算机实用化的推动下，动态系统的优化

理论得到了迅速发展,逐渐形成了一个重要的学科分支——最优控制。1962年,受分析力学中哈密尔顿原理的启发,苏联数学家庞特里雅金 (Pontryagin) 等人把“极大值原理”作为一种推测首先提出来,随后作出了严格的数学证明。“极大值原理”把最优控制问题表述为具有约束的非古典变分学问题,发展了经典变分原理,成为处理闭集性约束变分问题的强有力的工具。同时期的美国数学家贝尔曼 (Bellman) 则提出了解决最优控制问题的另一种数学方法——动态规划方法。他依据最优性原理,发展了变分学中的哈密尔顿——雅可比理论。动态规划方法非常适合于用来研究离散型最优控制问题,并且可以借助计算机进行较大规模的数值求解。此外,卡尔曼 (Kalman) 则深入研究了线性系统在二次性能指标下的最优控制问题,把它归结为黎卡提 (Riccati) 方程的求解,建立了最优线性反馈调节器设计的理论基础。同时提出了可控性及可观测性概念,建立了最优估计理论。至此, Pontryagin 的极大值原理、Bellman 的动态规划方法和 Kalman 的最优线性反馈调节器设计的理论,成为人们研究最优控制问题的主要经典方法¹。国内外众多学者都对最优控制理论研究作出过重要贡献,如 Lions、Fattorini、Friedman、Stampacchia、解学书、李训经、雍炯敏、楼红卫等。

随机最优控制问题的研究起始于 20 世纪六七十年代,于七八十年代逐渐成熟,而其应用则得到了更大的扩展,尤其是在现代金融中的应用。Merton (1971)、Fleming (1986)、Rishel (1999)、Harrison (1985)、Karatzas (1989)、Jensen (1998) 等研究了金融学中基于 Brownian 运动或随机微分方程的随机最优控制问题,得到了一些非常实用的结果。Dixit 和 Pindyck (1994) 运用动态规划方法对基于 Itô

¹张学铭,李训经,陈祖浩. 最优控制系统的微分方程理论. 北京: 科学出版社, 1989.

过程的优化问题进行了研究¹。Kushner (1972)、Haussmann (1976)、Bensoussan (1983)、Pardoux (1990)、Seierstad (2010)、Bahlali 和 Chala (2005)、Øksendal (2008)、Bagheri (2007) 等研究了随机最优控制的极大值原理。国内学者彭实戈 (1990)、吴臻 (2010) 也对随机最优控制的极大值原理的研究做出了重大贡献。Ou-Yang (2003、2005)、Sung (2005) 等在 Merton 等的随机连续金融框架下, 建立委托代理模型, 运用随机最优控制技术研究了动态委托资产组合投资管理中的最优合同问题。Merton (1975)、Solow (1956) 研究了不确定环境下经济增长的随机最优控制模型。Boulier (1995)、Cairns (1995、1997) 研究了养老基金随机最优控制的离散时间模型, Boulier (1996)、Cairns (2000) 研究了养老基金随机最优控制的连续时间模型。

在许多实际领域, 线性二次型 (LQ) 最优控制是最基本的也是被广泛应用的工具之一。LQ 最优控制理论的一个突出特征是它能够得到统一的最优分析解, 进而得到最优反馈控制律。由于状态反馈控制容易实现, 因此, LQ 控制理论已经成为最优控制理论和应用的最完整的部分之一。确定性的 LQ 最优控制理论最早由 Kalman (1960) 所创立, 迄今为止无论在理论还是应用方面都得到了极大的发展, 在现代控制理论中占有中心的地位。许多学者在这方面作出了贡献。如 Anderson、Moore、Lewis、Syrmos、Ferrante、Ntogramatzidis 等。而随机 LQ 最优控制问题首先由 Wonham (1968) 提出。Bismut (1976) 对具有随机系数的随机 LQ 最优控制问题进行了详细的分析。Bonsoussan (1992) 和 Davis (1977) 研究了随机线性二次调节器问题 (LQRs)。同时, Chen 等 (1998) 考虑了无限水平集随机 LQ 控制问题, 其中允许成本加权矩阵为无限水平集。Wu 和 Zhou (2002) 研究了无限时间范

¹Dixit A., Pindyck R. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.

围内具有无限水平集状态和成本函数的控制加权矩阵的随机 LQ 最优控制问题。LQ 最优控制问题在金融领域有着非常广泛的实际应用。Zhou 和 Li (2000) 将连续时间均值—方差问题抽象为一种随机 LQ 控制优化问题, 运用嵌套方法将原问题转化为 LQ 控制问题, 通过求解 LQ 控制问题得到原问题的解。其他的一些研究者, 如 Kohlmann、Tang、Zhou、Lim 等也进行了这方面的研究。

对最优控制来说, 跳跃的重要性是显然的。某些外部极端事件或噪音对不确定动态系统具有重大的影响。例如, 当有重大事件发生或发布宏观经济公告时, 金融证券组合的价值就会发生大的变化。为了处理带跳的最优控制问题, 必须将不连续的跳跃变化考虑进描述动态系统的微分方程中。在随机动态系统中, 通常用泊松 (Poisson) 过程来描述系统的动态跳跃过程。Hanson 和 Tuckwell (1997) 研究了随机跳跃干扰下的人口增长最优控制模型。Jeanblance-Picque 和 Pontier (1990)、Bardhan 和 Chao (1995)、Gao 和 Xu (2004) 等研究了跳扩过程的最优投资消费问题。Ngwira 和 Gerrard (2007) 运用随机最优控制技术研究了风险资产收益服从跳跃—扩散过程的固定收益制 (DB) 养老基金的最优资产配置问题。Hipp 和 Plum (2000、2003) 运用随机最优控制理论研究了服从跳跃—扩散风险过程的保险公司的最优投资问题。此外, 还有一些其他的研究者在这方面作了进一步的研究工作, 如 Yang 和 Zhang (2005)、Wang 和 Wu (2001) 以及 Wang, Xia 和 Zhang (2007) 与 Guo 和 Lei (2007) 等。

自从控制论专家 Zadeh 开始模糊集理论的研究以来, 模糊控制的研究就从未间断。模糊集的概念是由于人们判断上或语言上的不确定性而提出来的, 这种集合从数学的角度看是用取值于区间 $[0,1]$ 的隶属度函数来定义的, 这为不确定语言的精确表达提供了方法。模糊集理论的应用起源于控制论, 诞生了模糊控制论。在模糊控制研究中, 有一类最优模糊控制问题。该问题考虑在某控制系统下确

定一个模糊决策以使性能指标达到最优。解决该方法之一是针对决策的某种隶属度函数形式,利用 Pontryagin 的极大值原理求解。极大值原理是将原问题转化为一个微分方程问题,解微分方程时通常要利用数值解。最优模糊控制的概念由 Komolov 于 1979 年提出, Willaey (1979)、Filev (1992)、王立新 (2003) 等也研究过最优模糊控制问题。除了最优模糊最优控制问题以外,还有一类模糊控制问题:模糊最优控制问题,该问题考虑在某模糊控制系统下确定一个决策以使性能指标达到最优。解决该方法通常是先将模糊问题转化为确定性的问题再进行求解。其理论基础是刘宝碇教授于 2004 年提出的可信性理论。Zhu (2009) 利用模糊 Liu 过程研究了模糊最优控制问题。Wang 和 Zhu (2009) 研究了多维模糊最优控制问题及其在最优停时中的应用。Zhao 和 Zhu (2010) 进一步研究了有限时间,控制变量无约束的线性二次型模糊最优控制问题。最近, Qin 等 (2011) 研究了模糊线性二次最优控制在生产计划优化中的应用。Zhu (2011) 研究了多阶段模糊系统的模糊最优控制问题。Liu 和 Zhu (2011) 又进一步研究了多维多阶段模糊系统的最优控制问题。

基于 Liu (2007) 提出的不确定性理论, Zhu (2010) 提出了不确定最优控制问题。该问题研究基于某不确定控制系统下使某项性能指标达到最优,并研究了期望价值准则下不带跳的不确定最优控制问题。通过运用 Bellman 的动态规划原理,得出了不确定最优控制的最优性方程,并将其用来解决一个证券投资组合问题,获得了满意的结论。Kang 和 Zhu (2012) 研究了多阶段不确定系统 Bang-bang 最优控制, Xu 和 Zhu (2012) 研究了不确定 Bang-bang 控制的连续时间模型。Sheng 和 Zhu (2013) 研究了乐观值价值准则下的不确定最优控制问题。Ge 和 Zhu (2013) 给出了不确定最优控制问题最优性的一个必要条件。然而,关于不确定最优控制的研究才刚刚起步,处于发展之中,还有许多问题值得去继续进行深入的研究。本书考