海岸河口工程研究论丛

# 基于薛定谔方程的非线性波浪传播理论

张义丰　李瑞杰　著

THE THEORY OF
NONLINEARWAVE-PROPAGATION BASED
ON SCHRÖDINGER EQUATION

人民交通出版社
China Communications Press

海岸河口工程研究论丛

# 基于薛定谔方程的
# 非线性波浪传播理论

张义丰 李瑞杰 著

THE THEORY OF
NONLINEARWAVE-PROPAGATION BASED
ON SCHRÖDINGER EQUATION

人民交通出版社
China Communications Press

## 内容提要

本书是《海岸河口工程研究论丛》之一。波浪非线性传播一致是海洋动力研究的重要课题，本书基于非线性薛定谔波浪方程，对深水波浪传播中的非线性和不稳定性进行研究，从深水—有限水深—近岩的波浪理论出发，分析波列间的相互作用，探讨了包含时间变量的近岸非线性波浪理论，进一步丰富了非线性波浪理论。

本书研究成果可为从事海岸河口波浪动力研究的人员提供参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

基于薛定谔方程的非线性波浪传播理论 / 张义丰，李瑞杰著.
— 北京：人民交通出版社，2014.5
ISBN 978-7-114-10729-0

Ⅰ.①基… Ⅱ.①张…②李… Ⅲ.①基于薛定 – 港口建设 – 理论 Ⅳ.①U66

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 290636 号

书　　名：基于薛定谔方程的非线性波浪传播理论
著 作 者：张义丰　李瑞杰
责任编辑：韩亚楠　崔　建　潘艳霞
出版发行：人民交通出版社
地　　址：(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010)59757973
总 经 销：人民交通出版社发行部
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市密东印刷有限公司
开　　本：720 × 960　1/16
印　　张：6.75
字　　数：121 千
版　　次：2014 年 5 月　第 1 版
印　　次：2014 年 5 月　第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-10729-0
定　　价：32.00 元

# 序

海岸、河口是陆海相互作用的集中地带，自然资源丰富，是经济发达、人口集居之地。以我国为例，我国大陆海岸线北起辽宁省的鸭绿江口，南至广西的北仑河口，全长18000km；我国海岸带有大大小小的入海河流1500余条，入海河流径流量占全国河川径流总量的69.8%，其中流域面积广、径流大的河流主要有长江、黄河、珠江、钱塘江、瓯江等。海岸河口地区居住着全国40%左右的人口，创造了全国60%左右的国民经济产值，长三角、珠三角、环渤海等海岸河口地区是我国经济最为发达的地区，是我国的经济引擎。

人类在海岸河口地区从事经济开发的生产活动涉及很多的海岸河口工程，如建设港口、开挖航道、修建防波堤、围海造陆、保护滩涂、治理河口、建设人工岛、修建跨(河)海大桥、建造滨海火电厂和核电厂等等，为了使其经济、合理、可行，必须要对环境水动力泥沙条件有一详细的了解、研究和论证。人类与海岸河口工程打交道是永恒的主题和使命。

交通运输部天津水运工程科学研究院海岸河口工程研究中心的前身是天津港回淤研究站，是专门从事海岸河口工程水动力泥沙研究的专业研究队伍，致力于为港口航道(水运工程)建设和其他海岸河口工程等提供优质的技术咨询服务。多年来，海岸河口工程研究中心科研人员的足迹遍布我国大江南北及亚洲的印尼、马来西亚、菲律宾、缅甸、越南、柬埔寨、伊朗和非洲的几内亚等国家，研究范围基本覆盖了我国海岸线上大中型港口及各种海岸河口工程及亚洲、非洲一些国家的海岸河口工程，承担了许多国家重大科技攻关项目和863项目，多项成果达到国际先进水平和国际领先水平并获国家及省部级科技进步奖。海岸河口工程研究中心对淤泥质海岸泥沙运动规律、粉沙质海岸泥沙运动规律和沙质海岸泥沙运动规律有深刻的认识，淤泥质海岸适航水深应用技术、水动力泥沙模拟技术、悬沙及浅滩出露面积卫星遥感分析技术等方面无论在理论上还是在实践经验上均有很高的水平和独到的见解。中心的一代代专家们为大型的复杂的项目上给出正确的技

术论证和指导，使经优化论证的工程方案得以实施，如珠江口伶仃洋航道选线研究、上海洋山港选址及方案论证研究、河北黄骅港的治理研究、江苏如东辐射沙洲西太阳沙人工岛可行性及建设方案论证、瓯江口温州浅滩围涂工程可行性研究、港珠澳大桥对珠江口港口航道影响研究论证、天津港各阶段建设回淤研究、田湾核电站取排水工程研究等等，事实证明这些工程是成功的。在积累的成熟技术基础上，主编了《淤泥质海港适航水深应用技术规范》、《海岸与河口潮流泥沙模拟技术规程》、《海港水文规范》泥沙章节、参编《海港总体设计规范》和《核电厂海工构筑物设计规范》等。

本论丛是交通运输部天津水运工程科学研究所海岸河口工程研究中心老一辈少一辈专家学者多年来的水动力泥沙理论研究成果、实用技术和实践经验的总结，内容丰富、水平先进、科学性强、技术实用、经验珍贵，涵盖了水动力泥沙理论研究，物理数学模型试验模拟技术研究，水沙研究新技术、水运工程建设、河口治理、人工岛开发建设实例介绍等海岸河口工程研究的方方面面，对从事本行业的技术人员学习和拓展思路具有很好的参考价值，是海岸河口工程研究领域的宝贵财富。

本人在交通运输部天津水运工程科学研究院工作20年(1990－2009)，曾经是海岸河口工程研究中心的一员，我深得老一代专家的指导，同辈人的鼓励和青年人的支持，我深得严谨治学、求真务实氛围的熏陶，留恋之情与日俱增。今天，非常乐见同事们把他们丰富的研究成果、实践经验、成功的工程范例著书发表，分享给广大读者。相信本论丛的出版将会进一步丰富海岸河口水动力泥沙学科内容，对提高水动力泥沙研究水平，促使海岸河口工程研究再上新台阶有推动作用。希望海岸河口工程研究中心的专家们有更多的成果出版发行，使本论丛的内容越来越丰富，也使广大读者能大受裨益。

交通运输部科技司司长

2013年6月

# Contents 目录

# 1　绪　　论

## 1.1　研究意义和目的

波浪是深水及近岸区域最为活跃、最为重要的环境动力因素之一，它与人类的生产和社会活动密切相关。随着社会的进步、经济的发展、陆地资源的匮乏、人类对海洋资源需求的不断增加，人类活动涉及的范围已包括深海及近岸区域。波浪问题已成为海洋科学、水利工程、环境科学等多学科共同关注的问题[1]。

非线性波浪理论研究是流体力学中一个重要而又十分困难的课题，一直引起力学、应用数学及海洋工作者的广泛注意[2]，该研究可以更有效地解释和预测波浪传播现象，而非线性薛定谔方程在波浪传播研究上的作用越来越突出[3]。深水波浪的非线性作用和近岸地形变化导致的波浪变形一直是波浪研究的关键问题。基于非线性薛定谔波浪方程，对深水及近岸波浪的传播特性进行研究，从推导过程出发分析各类形式方程的特点、适用性及其与其他类型方程的关系，探讨深水波浪的非线性传播演变和近岸波浪变形规律，得出一些新的研究方法和思路。通过此研究，指导相关的生产实践，同时此研究结果将有利于加深理解波浪传播机制，具有明显的理论意义和实用价值。

非线性薛定谔波浪方程在深水波浪传播的理论及应用研究，已取得了显著的成果，其在近岸海域波浪传播的应用也进行了一系列的研究。但由于深水非线性薛定谔波浪方程种类众多，导致对深水波浪的传播研究的结果存在很多差异。近岸非线性薛定谔波浪方程的局限性，为其在近岸海域的广泛应用带来一定的困难。本书基于非线性薛定谔波浪方程，从深水及近岸两个方面探讨波浪传播规律，力图得到波浪传播研究的一些新的思路和方法。

## 1.2 波浪传播研究回顾与总结

现有的非线性波浪理论方程[4]主要包括非线性缓坡方程、Boussinesq 方程、Navier – Stokes 方程、Forced Korteweg – De Vries 方程及非线性薛定谔方程等。

### 1.2.1 缓坡方程研究

经典的缓坡方程是由 Berkhoff[5]于 1972 年提出来的,他把 Laplace 方程与满足海底缓变假设条件的水深函数相乘,通过小参数展开法,将三维的 Laplace 方程沿垂向积分转化为平面二维方程,即:

$$\nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + k^2 CC_g \Phi = 0 \tag{1.1}$$

式中:$\Phi$——速度势函数;

$k$——波数;

$C_g$——群速度;

$C$——相速度;

$\nabla_h$——水平梯度因子。

速度势函数 $\Phi$ 与波面函数 $\zeta$ 有如下关系[6]:

$$\Phi = -i\frac{g}{\omega}f_h\zeta \tag{1.2}$$

式(1.1)可由 $\zeta$ 表示为:

$$\nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \zeta) + k^2 CC_g \zeta = 0 \tag{1.3}$$

式中:$f_h$——水深函数;

$g$——重力加速度;

$\omega$——角速度;

$i$——$i = \sqrt{-1}$。

在空间上,式(1.1)和式(1.3)为椭圆型偏微分方程,因此又称为椭圆型缓坡方程,直接求解此类方程非常困难,于是在一些假定条件下,得到了椭圆型缓坡方程几种近似形式。

对方程进行抛物近似假定,只考虑波峰线上的波浪绕射,而波向线方向上的绕射被忽略,并且忽略反射波,波浪沿 $x$ 轴方向传播的抛物型缓坡方程[7]为:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[ik - \frac{1}{2kCC_g}\frac{\partial (kCC_g)}{\partial x} + \frac{i}{2kCC_g}\frac{\partial}{\partial y}CC_g\frac{\partial}{\partial y}\right]\Phi \tag{1.4}$$

若假设波面函数为:

$$\zeta = a\mathrm{e}^{iS_1}, S_1 = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t \tag{1.5}$$

式中：$a$——振幅；

$S_1$——位相函数；

$\boldsymbol{r}$——位置向量；

$\boldsymbol{k}$——波数向量。

便有：

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\omega^2 \zeta \tag{1.6}$$

式(1.3)改写为双曲型缓坡方程：

$$\nabla_h\cdot(CC_g\nabla_h\zeta) - \frac{C_g}{C}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0 \tag{1.7}$$

如果直接将波面函数式(1.5)代入式(1.3)，可以得到 RCPWAVE 缓坡方程形式[8]：

$$\frac{1}{aCC_g}\nabla_h\cdot(CC_g\nabla_h a) + k^2 - (\nabla_h S)^2 = 0 \tag{1.8}$$

$$\nabla_h\cdot(a^2CC_g\nabla_h S) = 0 \tag{1.9}$$

由于缓坡方程起初是假定底坡缓变而推导出来的线性波浪折射—绕射联合方程，许多学者对其在波浪的非线性应用进行了研究推广。在线性缓坡波浪方程中考虑波浪的非线性影响，主要通过采用经验的非线性弥散关系来考虑非线性影响[8]，在关于以波振幅为变量的波浪缓坡方程中，根据非线性弥散关系修正方程中非线性影响项也可应用于非线性波浪传播的研究[9]。

Whitman 利用变分原理得到适用于深水和中等水深的二阶 Stokes 波非线性频散关系[10]：

$$\omega^2 = gk(1+\varepsilon^2 D)\tanh(kh) \tag{1.10}$$

$$D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2\tanh^2(kh)}{8\sinh^4(kh)}$$

Hedges 通过整理提出可在浅水使用的经验非线性频散关系[11]：

$$\omega^2 = gk\tanh(kh+\varepsilon) \tag{1.11}$$

为了得到一个在深水和浅水区域都能使用的非线性频散关系，Kirby 和 Dalrymple 基于式(1.10)和式(1.11)给出下式[12]：

$$\omega^2 = gk(1+g_1\varepsilon^2 D)\tanh(kh+g_2\varepsilon) \tag{1.12}$$

$$g_1 = \tanh^5(kh)$$

$$g_2 = \left[\frac{kh}{\sinh(kh)}\right]^4$$

虽然式(1.12)既可适用于深水区域,也适用于浅水区域,但与实际情况不符的是,在中等水深时波速存在最小值,于是 Hedges 提出一个非线性频散关系的改进形式[13]:

$$\omega^2 = gk(1+\varepsilon^2)\tanh\left(\frac{kh+\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right) \tag{1.13}$$

Kirby 等也提出可避免该缺陷的改进形式[14]:

$$\omega^2 = gk(1+\sqrt{g_1}D\varepsilon^2)\tanh\left(\frac{kh+\varepsilon}{1+\sqrt{g_1}D\varepsilon^2}\right) \tag{1.14}$$

式(1.13)和式(1.14)虽然避免中等水深存在最小值的问题,但当 $\varepsilon$ 较小且水深范围在 $1<kh<1.5$ 时与式(1.10)偏差较大,Kirby 另外提出一个复杂的非线性频散公式进行改进[15]:

$$\omega^2 = gk(1+\sqrt{g_1}D\varepsilon^2)\tanh\left(\frac{kh+g_2^{\frac{1}{4}}\varepsilon}{1+\sqrt{g_1}D\varepsilon^2}\right) \tag{1.15}$$

上式改善了当 $\varepsilon$ 较小且水深范围在 $1<kh<1.5$ 时与式(1.10)的偏差程度,但又破坏了 $\varepsilon$ 较大时的单调性。而李瑞杰给出了既能减小当 $\varepsilon$ 较小且水深范围在 $1<kh<1.5$ 时与式(1.10)的偏差程度,又能保持 $\varepsilon$ 较大时的单调性,并在整个水深范围内反映波浪非线性效应的非线性频散关系公式[16,17]:

$$\omega^2 = gk(1+p\varepsilon^2)\tanh(kh+q\varepsilon) \tag{1.16}$$

$$p = \tanh^2(kh)$$

$$q = \frac{kh}{\sinh(kh)}$$

式中:$\omega$——角频率;

$g$——重力加速度;

$k$——波数;

$h$——水深;

$\varepsilon$——$\varepsilon = ka$;

$a$——振幅。

### 1.2.2 Boussinesq 方程研究

1872 年,Boussinesq 通过假定水平速度在垂直方向上均匀分布、垂向速度呈线性分布,得到一维 Boussinesq 方程。Peregrine 于 1967 年通过假定反映波浪色散性和非线性的小参数推导出经典的 Boussinesq 方程。Boussinesq 方程用于波浪的研究会受到弱色散性和非线性的限制,众多学者对此方程进行了改进。Boussinesq 方

程的改进大致分为非线性和色散性的改进等方面,非线性方面的改进以“完全非线性”方程为代表,此类方程本质上都是 Nwogu 方程。Wei 等[18]保留了所有 $O(\mu^2)$ 阶的非线性项,通过加入这些扩展项,对非线性波浪的研究得到了显著改善。Gobbi 等[19]、Madsen 和 Schäffe[20]通过将扩展项的阶数从 $O(\mu^2)$ 提高到 $O(\mu^4)$,得到了更高阶的 Boussinesq 方程。Zou[21]推导的三阶 Boussinesq 方程的非线性精度为 $O(\varepsilon\mu^2)$。Agnon 等[22]在非线性方面获得了与线性相同的精度。张洪生[23]在 Boussinesq 方程中引入变换速度变量建立的数值模拟可以模拟 $\varepsilon=0.375$ 的强非线性波浪的传播,计算精度高于传统 Boussinesq 方程的数学模型。研究表明,高阶非线性项和高阶色散项对波浪传播影响较大,因此,高阶的 Boussinesq 方程数值计算结果比经典 Boussinesq 方程更精确,非线性精度越高,相同的 Boussinesq 模型计算结果越准确[24-26]。Witting[27]提出了一个新的 Boussinesq 类方程,可有效地应用于一维水平情况,他将相速度 Taylor 级数展开项里的系数用一个自由参数来替代,通过方程的色散关系与 Pade 展开项里的 Stokes 一阶色散关系相逼近来确定该自由参数。Madsen[28]和 Soresen[29]在动量方程里加进了一个长波方程里的三阶项,并且该项在浅水时减小为 0,色散关系通过与 Stokes 一阶色散关系相逼近得到,可以精确到四阶,并且方程的变浅作用与 Stokes 一阶理论一致。Nwogu[30]将任意层的速度作为方程里的速度变量,得到一个 Boussinesq 方程的新形式,并可以通过选择合适的速度变量使方程的色散性能达到最佳。Chen 和 Liu[31]将 Nwogu 的方程以波面函数形式表示速度势,根据色散性和变浅性给出选择合适波面函数的新方法,并基于此方程建立了一个波浪传播变形的抛物型模型。Schaffer 和 Madsen[32]在动量方程和连续方程里加入了三阶项,并将这些三阶项的系数与 Stokes 一阶理论色散关系的 Pade 展开逼近,使色散性可以精确到 $O(\mu^8)$。参照 Beji 和 Nadaoka 的方法,刘忠波等在推导过程中引入可改善色散性和非线性的两个参数,对照 Schaffer 和 Madsen 模型得到两个参数的取值:$\alpha=0.1306$,$\gamma=-0.0076$,改善了 Beji 模型变浅系数,并扩大了方程接近 1 倍的适用水深范围[33]。马小舟等参照 Nwogu 的推导方法[34],从欧拉方程推导出保留了所有 $O(\mu^2)$ 量级的非线性项的完全非线性 Boussinesq 方程,通过改进动量方程和连续方程得到的色散关系与一阶 Stokes 波色散关系 Padé[4/4]展开配比,使改进色散关系后的 Boussinesq 方程能提高色散精度。刘忠波用变换速度代替原方程中的垂向平均速度继续改进色散关系和浅化效应,色散关系与 Stokes 波色散关系 Padé[4/4]展开式一致,浅化效应在相对水深小于 1.0 的整个范围都与精确解相吻合[35]。胡金鹏通过 4 个参数改进二阶完全非线性 Boussinesq 方程的色散项,在改进方程色散性的同时优化了浅化性,方程在相对水深小于 1 的水深范围内浅化性与精确解误差非常小[36]。王诺等[37]根据邹志利推

导的二阶 Boussinesq 方程,通过线性 Stokes 波与方程的色散关系对比和应用发现,将原式中 $B_1+B_2=\frac{1}{15}$改为 $B_1+B_2=0.05667$ 后,中等水深的方程相速度和群速误差减小至 5%,能准确描述波浪传播过程中的次峰现象。

### 1.2.3 Navier-Stokes 方程研究

Navier-Stokes 方程(N-S 方程)可用来描述流体运动,也常常用来研究波动,属于非线性对流扩散偏微分方程[38]。方法分为网格数值模拟方法和无网格模拟方法,前者又分为欧拉网格和拉格朗日网格;后者多以 MPS 和 SPH 两种方法用于水动力研究中,因其比有网格法更容易追踪自由表面,在解决一些特定问题中具有优势。对 N-S 方程的研究主要方法有直接数值模拟、雷诺平均数值模拟和大涡数值模拟。刘应中[39]基于黏性的 N-S 方程,将时变水域用 $\sigma$ 变换成固定的矩形计算域,指出减小时间步长与波周期比值可有效减小数值耗散,改变网格空间步长和时间格式精度对数值耗散影响较小。滕爱国修正了封闭雷诺方程的 $k$-$\varepsilon$ 模型,采用迎风差分格式离散,并通过通度概念处理不规则边界,壁函数技术描述壁面效应[40]。白志刚[41]以 N-S 方程、$k$-$\varepsilon$ 模型封闭雷诺方程和 spatially-averaged 方程作为控制方程建立了 U 形防波堤与波浪相互作用的数学模型。刘海青建立了N-S 方程的有限元模型,开边界上和入射边界通过速度衰减层,消除传播至边界上的反射波以使模型稳定[42]。李凌[43]与董志[44]将 N-S 方程和 VOF 法结合建立数学模型,通过把不同附加动量源项引入动量方程实现数值造波和消波,当相对水深小于 0.05、波陡小于 0.1 时,造波效果与理论解一致,将动量衰减源项引入动量方程,以模仿多孔介质结构消波原理的多孔介质消波方法,认为源项造波法的造波质量好于造波边界法,收敛性优于设置造波区域法。

### 1.2.4 FKDV 方程研究

强迫的 Forced Korteweg-De Vries 方程(FKDV 方程)首先由 Akylas[45]在临界流速假设下考虑表面压力场共振产生水波导出,通过方程对孤立子进行数值模拟,并与 Huang[46]得到的实验结果比较,被认为是流体流过地形障碍物共振产生非线性波的典型方程。Cole[47]、Miles[48]、Wu[49]在研究流体流过障碍物时也导出过形式一致的方程。Mei[50]在讨论移动的细长体在水中运动时也得到了相同的方程。朱勇[51]在考虑表面张力的作用下,采用摄动法,导出了具有负色散的 FKDV 方程,并对方程进行数值求解,表明其解由下游下凹的孤立波串、一个上凸以及上游色散波串组成。得到了与通常 FKDV 方程解完全不同的结果。徐肇廷[52]导出了平均 FK-

DV 方程(AFKDV 方程),并求得了局部强迫先锋孤立子生成问题中的物理常数,根据方程对结果进行了数值检验,说明了此方程可用来解决局部强迫先锋孤立子生成问题。FKP 方程首先由 Katsis[53] 导出,Debnath[4] 指出其实质为 Akylas 所导出的 FKDV 方程的三维形式,卢志明[54] 采用强迫的 FKP 方程,研究了受限槽道中三维底部障碍物产生的上游内波的二维化问题,进一步说明了 FKP 方程与 FKDV 方程的关系。

## 1.3 非线性薛定谔方程研究

近年来,非线性薛定谔方程在对深水波列非线性演化及近岸波浪传播变形的研究上的作用越来越突出。

### 1.3.1 深水非线性薛定谔波浪方程研究

Benjamin-Feir 关于二维波在边带扰动情况下,当 $kh>1.363$ 时不稳定的结论,在两个方面推动了非线性波的研究:①Stokes 波是对时间变量进行调制而得的非线性波,而 Benjamin-Feir 关于边带扰动的理论是基于对振幅进行调制。因此,能否对频率和振幅同时进行调制而得到新的调制方程,从新的方程出发研究波的稳定性。②波浪在斜向和横向扰动情况下稳定性如何。这些问题的研究拓展了有限水深的非线性波浪调制理论的发展。

Zakharov[55] 和 Benney、Roskes[56] 通过非线性和色散性采用多重尺度方法推出了描述表面振幅包络波演化的二维深水非线性薛定谔方程。Hasimoto 和 Ono[57] 用同样的方法处理了一维波列问题,指出其波包满足非线性薛定谔方程(NLS),并通过此方程研究了 Stokes 波的稳定性,得到了与 Benjamin 和 Feir 相同的结果,同时指出沿此途径研究稳定性问题的优点。Davey 和 Stewartson[58] 研究了在有限水深下,其波包发展方程为两个非线性偏微分方程,其在形式上与立方非线性薛定谔方程相似,同时得到了不同于一维情形的新的不稳定性判别准则。Lo 和 Mei[59] 指出,在参数 $\varepsilon<0.1$ 的情况下 NLS 方程得到较好的结果,在参数 $\varepsilon$ 较大的情况下,NLS 方程得到的计算结果与实际出现偏差,并且 D. Martin[60] 发现,采用 NLS 方程的计算结果无法满足波浪传播过程中的能量守恒定律,会出现衰减现象。为了克服 NLS 方程适用范围的不足,Dysthe[61] 利用摄动展开法得到了考虑辐射应力引起的平流项的改进的非线性薛定谔方程(MNLS)。Lo 和 Mei [62] 对 MNLS 方程在移动坐标系下进行了变换,并给出了适用于非线性薛定谔方程的数值解法,通过 MNLS 方程模拟发现,深水波列在长期演化中不再具备完美的再现性,且其对应边带演化

也不再具有对称性。Karsten Trulsen[63]对 MNLS 方程进行了修正,扩展了原方程适用的波浪频带宽度,得到扩展频宽的非线性薛定谔方程(BMNLS)。Trulsen[64]进一步得到了精确线性弥散条件下的非线性薛定谔方程,并且引入了拟微分算子来表示线性部分,通过一定条件下展开此线性拟微分算子可以分别得到 MNLS 和 BMNLS 方程,同时,若在此方程中只保留低阶非线性项,也可以得到 NLS 方程的形式。Lo 和 Mei[62]首次采用离散步长的伪谱方法在深水情况下对二维 MNLS 方程进行了数值模拟,并与 Su 试验数据和 NLS 方程的计算结果进行了比较,得到较好的结果。Trulsen[65,66]得到了在有限水深下求解不规则波浪流速和加速度的非线性薛定谔方法,将其与试验和实测数据进行了比较分析,根据二维双色波波浪长水槽试验比较了 MNLS、NLS 与线性方程的数值模拟结果,指出 MNLS 比线性方程和 NLS 方程模拟波浪能更加准确地反映实际波浪传播的相位和波包情况;同时也得出了关于波动中速度与加速度的非线性薛定谔方程,并与试验和实测数据进行了应用比较。L. Shemer[67]在深水波浪长水槽进行了不同相位、振幅和谱成分的多组波包传播试验,并应用空间 Zakharov 方程对其进行模拟。Kit[68]就 Zakharov 方程与 MNLS 方程的数值模拟结果进行了比较,证明了两者的统一适用性。Dysthe[69]在二维和三维情况下,应用 NLS 方程对满足窄谱假设的随机波浪进行了分析,验证了 Alber 的二维稳定性准则,并说明了波包传播过程中的频率下移现象。Canney[70]通过在 NLS、MNLS 和 BMNLS 方程中加入线性耗散项,分析了波列传播的边带稳定性,比较了三方程在描述稳定性上的差异。

深水非线性薛定谔波浪方程的应用主要包括在畸形波(freakwave)及波列的不稳定性研究。畸形波对人类在深水区域的活动有重要的影响,海洋中的畸形波是一类比较特殊的灾害性波浪[71],又被称为异常波(rogue waves, abnormal waves, exceptional waves)、巨波(giant waves)、杀人波(killer waves)、怪波(monster waves)、极端风浪(extreme storm waves)、疯狗浪(rabid-dog waves)。世界各大海域均有畸形波出现,它可以在深水浅水、有流无流、天气好坏等多种情况下生成,一些统计数据表明,它出现的频率不是稀少而是相对比较频繁的。目前畸形波得到了越来越多的关注,国外许多专家学者及研究机构正致力于畸形波的研究。

2006 年,Physorg 网站报道了标题为“新理论(旧方程——非线性薛定谔方程)可以解答导致沉船的畸形波的成因”的评论,指出非线性薛定谔方程可以用来模拟研究畸形波现象。近年采用非线性薛定谔方程研究畸形波的工作明显增多。Osborne[72,73]等人使用 NLS 方程的解来研究畸形波的运动过程,认为畸形波是以 Benjamin-Feir 不稳定性控制的不稳定模式形式存在的,该不稳定模式在大部分生存期内和稳定模式并无太大区别,但不稳定模式波高偶尔会以指数形式增大到 3 ~ 4

倍有效波高，并在片刻后消失，同时指出一个典型的波浪区域是由稳定的波成分所形成的载波与间歇出现的不稳定畸形波所共同组成的。Trulsen[74]根据其含伪微分算子的 MNLS 方程模拟了著名的“新年波”，认为畸形波是可以通过有效的理论方程模拟和预测的。

随机波浪理论能更有效地研究复杂而随机的海浪。20 世纪 50 年代初，Pierson 最先将 Rice 关于无线电噪声的理论应用于海浪，从此利用谱以随机过程描述海浪成为主要的研究途径，已提出了多种描述海浪的海浪谱形式。如 JONSWAP 谱、Pierson-Moscowitz 谱（P-M 谱）、Bretschneider 谱（布氏谱）、Wallops 谱等。我国对海浪谱的研究亦始于 20 世纪 50 年代，同样提出了多个适用于中国海域的波浪谱形式，如 1966 年，国家科委海洋组预报方法研究组得到的会战谱；以及各单位先后在沿海海区和太平洋海区进行连续的海浪监测，利用洪广文等提出的无因次公式，得到了莆田谱；文圣常等通过分析各种谱形式的优缺点，提出了文圣常谱。Onorato[75]应用二维 NLS 方程对 JONSWAP 波浪谱条件下的随机波浪进行了模拟，指出两个关于谱分布的参数对于非线性的影响，通过此两个参数取值的变化，分析了随机波况下畸形波的发生。张运秋[76]基于二维 MNLS 方程从波陡、尺度因子、边带数目等多个因素出发，分析了畸形波的生成情况。陶爱峰[77]采用高阶谱方法对深水波列的演变特征及畸形波生成机制进行了数值模拟研究，讨论了耗散机制对深水波列演化及畸形波产生的影响。

深水均匀波列的稳定性和演变问题一直是研究人员所关注的焦点之一。目前已为大多数研究人员所熟知并接受的是，周期深水均匀波列会发生 B-F 不稳定性现象。B-F 不稳定性又称为调制不稳定性或边带不稳定性，是指有限振幅均匀波列在演变过程中，对边带扰动是不稳定的，在一定时间尺度后载波能量下降，边带能量呈指数增加，即能量由载波转移到边带，发生非线性自聚焦现象。不稳定性可引起波列振幅局部以指数增长，产生具有某种周期性的波群，而每个波群由于自聚焦作用都可能产生符合畸形波定义的极端波现象。

20 世纪前半叶，一个让很多海岸海洋工程师们困惑的问题是，很难在一个长水槽里生成一个稳定的均匀波列。Lighthill[78]利用平均拉格朗日理论对波包演变进行研究时，指出水波的非线性可能导致能量向波包的中心子波集中，受这一思想的启发，Benjamin 和 Feir[79,80]对 Stokes 波进行了稳定性分析，他们发现原来 Stokes 波列对与载波频率接近的扰动是不稳定的，由此发现了非线性自聚焦现象，Feir 进行了水槽试验证实了该现象，称为“B-F 不稳定现象”。Zakharov 首次将哈密顿系统引入水波范畴，以全能量为哈密顿函数，以表面势函数和表面高程为共轭正则变量，将水波控制方程进行了哈密顿描述，推导了 Zakharov 方程，但因该方程过于复

杂,对于解析研究和数值研究都很难直接利用,后人所用的波列演变控制方程大多是 Zakharov 方程的简化版。其还证明了弱非线性窄谱波列调制波幅满足非线性薛定谔方程(NLS 方程)。基于 NLS 方程对 B-F 不稳定性进行了探讨,指出波列的初始状态可能会重现,不同于 B-F 关于波列最后因能量转移不可恢复而将最终瓦解的结论,但对于边带增长的认识与 B-F 相同,即认为边带对称增长。针对这一现象首先进行试验研究的是 Yuen 和 Lake[81,82],他们在水槽试验中再次证实了 B-F 不稳定性的存在,同时还发现在边带数目、边带与载波波数差、初始载波波陡等满足一定条件下,一段时间后,载波和边带确实几乎恢复到初始状态。从外观上看,深水波列将以某一尺度为周期发生一系列的调制—解调过程,即 Fermi-Pasta-Ulam (FPU)重现现象,证实了 Zakharov 的结论,还通过波谱分析发现,随着波列演变出现了主频下移现象,即载波频率随传播距离增大而趋向于减小,并且推测:海浪频谱的峰值随着行程向下漂移的原因可能与非线性有关而与风本身不完全相关,但因水槽条件有限,对于重现周期和主频下移的具体情况没有深入研究。边带并非对称增长,而是呈现初期上边带增长较快,后期下边带增长超过上边带的趋势,这一新的现象更加吸引了研究人员的注意。

Dysthe 通过引入平均流(由调制波列辐射应力引起),推导出四阶 NLS 方程,并基于该方程指出边带增长是不对称的。Crawford[83] 等基于 Zakharov 方程的另外一种改进简化版,即基于 Zakharov 方程的积分—微分方程(Integro-differential equation),在对初始波陡 $\varepsilon = 0.2$ 的波列进行数值模拟时,发现 B-F 指出的最不稳定时所对应的条件以及最不稳定时边带增长率都与其发现的现象不同,B-F 所指的最不稳定条件中的初始波列载波与边带波数差及边带增长率超过了 Crawford 模拟时情况的 30%。Melville[84] 在试验室中对初始波陡较大的波列演变进行研究时,证实了 Dysthe 关于边带不对称增长的理论,发现两个边带在初期短暂的同步增长后,下边带增长速度较下边带增大,还发现 B-F 不稳定性引起波列破碎后,有明显的主频下移现象,推测波列演变的结果不是能量在离散子波上的分布而是整个连续波谱的响应变化。Stiassnie[85] 基于立方非线性薛定谔方程(CSE 方程)给出了重现周期与几个重要参数的明确关系式,虽因其理论基础的实用性不强,该公式不能完全适用,但仍具有一定的参考价值。

随着对 B-F 不稳定现象的不断研究,普遍认为,边带是以一种不对称的形式增长;波列演变的结果不是如 B-F 所设想的那样会因为调制而瓦解,而是在最大调制后,波列还会向初始状态恢复,进而出现调制—解调的周期性现象;同时在研究中有一个很明显的特点,方程适用性的不同对波列的不稳定性分析也不同,即影响不稳定性的关键因素初始波列波陡及频差之间的关系不同,导致了对边带扰动稳定

性的研究方面还存在很多差异。

### 1.3.2 近岸非线性薛定谔波浪方程研究

Turpin 等[86]在缓变地形和恒定流的假设下,用多重尺度法导出了二维空间上的三阶变系数薛定谔方程,推广了 Djorajevic 等[87]关于变深度无流的结果,研究了流和地形变化对波包演化的影响;Kirby 等[88]通过 WKB 展开方法得到了低阶非线性抛物型缓坡方程,并且分析了此方程在特定条件下可以转换为无时间项的非线性薛定谔方程;Lo 和 Mei [89]对 MNLS 方程在缓变地形条件下进行了扩展,但其只适用于较大水深的情况;U. Brinch-Nielsen 等[90]应用 WKB 展开方法,把 MNLS 方程进一步推广到常深度任意水深无流的情况,研究了均匀 Stokes 波列的边带稳定性,指出基于任意水深假设的波包演化方程优于有限水深的结果;Suh 等[91]对速度势和波面函数采用摄动展开法,假设水平方向上满足周期性边界条件,并对其在此方向上进行离散傅里叶变换,得到属于薛定谔方程形式角谱波浪方程,与 Djorajevic 的 NLS 方程进行比较并指出其表达式的问题,在试验地形的基础上,说明了方程的有效性及非线性项在波浪传播中的影响。陈延盛等[93]同样采用 WKB 展开方法在二维缓变水深和非均匀流情况下对方程进行了扩展,并研究了二维变地形和流对孤立波包演化的影响;Suh 等[92]把线性角谱波浪方程推广并得到基于不规则波的角谱波浪方程;俞聿修等[94]也对角谱波浪方程在规则波和不规则波的情况下进行了应用,由于角谱波浪方程推导中傅里叶变换的应用及方程本身的特点,在应用上对波浪计算区域的限制比较大;Jorgen H. Pihl 和 Mei[95]在缓变地形条件下,得到三维非线性薛定谔方程,推广了 Mei[96]得到的常水深下的方程,并且方程中含有一个地形变化引起的项,指出此参数的确定方法,但由于其确定和求解的困难性,只在特定的地形及波高假设条件下简化方程并对复波包进行了数值求解;Grataloup[97]在二维情况下指出方程中除了 Mei[96]推出的地形相关项 $\beta$ 外还应包含关于地形变化的$\dfrac{\partial C_g}{2\partial x}A$ 项;Xiao[98]在参数 $\mu=\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ 的条件下,得到一般水深缓变地形下的三维非线性薛定谔方程,同时也说明了$\dfrac{\partial C_g}{2\partial x}A$ 项的存在,并根据方程对波浪传播的稳定性进行了分析。

### 1.3.3 非线性波浪方程的数值解法

非线性偏微分方程的数值求解方法对于研究非线性波浪具有重要意义。Lo 和 Mei[59]采用离散步长的伪谱方法在深水情况下对二维 MNLS 方程进行了数值模