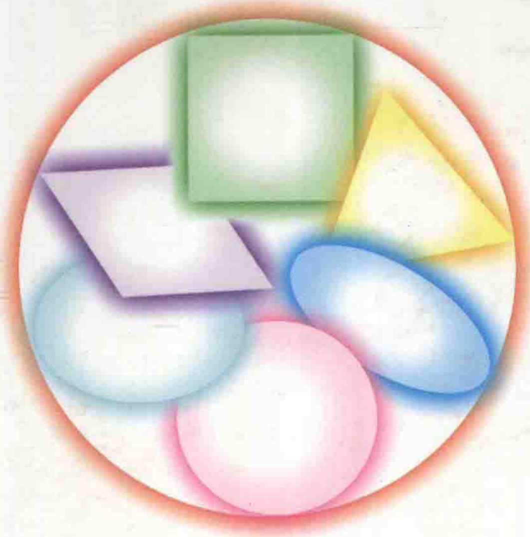
张嘉瑾精彩数学系列丛书



JIEXIJIHE

解析几何

FANGFA.JIQIAO.YOUMEIJIE

方法·技巧·优美解

编著 张嘉瑾

長春出版社

张嘉瑾精彩数学系列丛书

解析几何

方法·技巧·优美解

张嘉瑾 著

长春出版社

图书在版编目 CIP 数据

解析几何方法・技巧・优美解/张嘉瑾著. —长春：长春出版社，2004，5
ISBN7－80664－218－8

Ⅰ. 解… Ⅱ. 张 Ⅲ. 解析几何—解题 Ⅳ. 0182. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 027748 号

责任编辑：杨爱萍　　封面设计：刘　洋

长春出版社出版
（长春市建设街 1377 号・邮编：130061）
网址：http：//www. cccbs. net
业务电话：8563443　发行电话：8561180
长春市新世纪印业有限公司印刷
新华书店经销
880×1230 毫米　32 开本　11 印张　1 插页　260 千字
2004 年 5 月第 2 版　2004 年 7 月第 2 次印刷
印数:170001－22000 册　定价：15.00 元

奇特·优美·独具风格

——评张嘉瑾新著《解析几何方法·技巧·优美解》

◎沈呈民

我早就知道江苏省宜兴中学著名特级教师张嘉瑾，也拜读过他的《高中数学大世界》、《思维·重点·方法》等大作，从他的书里不仅可以看出奇特的解法所反映出的创新意识，而且也可以看出他所具有的独特的个人魅力. 从而我有一个最强烈的感受是：他把数学、文学、美学、哲学有机地联系在一起，探索着中学数学的一个独具风格的崭新天地.

近期长春出版社又推出了他的新作《解析几何方法·技巧·优美解》，又是一部独具风格的好书. 此书好就好在一个“新”字，贯穿于每章每节；一个“美”字，流淌在字里行间.

此书不仅装帧十分讲究，是一部充满美感的精品，而且是一部中学平面几何的新著. 新理念、新思想、新的解题方法、新的编排体例，足见作者匠心独具. 优美的语言、深刻的哲理、丰富的想象力，又使你觉得不是在读数学书，而是在慢慢地欣赏和品味一本别开生面的散文集. 全书熔启发性、知识性、实用性、艺术性于一炉，许多经典题目的创造性的优美解让人大开眼界. 尤其难能可贵的是，它以无可争辩的事实告诉我们，数学中处处是美的陶醉.

全书分九章.

第一章，巧用平几——简单美

往往是一个几何性质的巧问，简化了大量的计算过程. 它告诉我们，相当一部分的解析几何问题在解答时应尽力去挖掘几何性质的真正目的——对精华的提炼，追求简单美. 全书开了一个美的好头. 一开篇，作者就把美的种子巧妙地播进了读者的心田.

第二章,对称美

这是一个古老的美学问题,作者给了它新的活力.对于书中给出的每一道题,作者都把多种解法列出来,分析、比较、总结出规律,突出对称在解题中的特殊作用,一道题,一个兴奋点;一种解法,一次开拓.

第七章,优美解——熟路中的捷径

可以说这一章是全书的高潮,就标题本身而言,就是一种创造.把"优美解"定义为"熟路中的捷径",这六个字,充满了哲理和情趣,作者驾驭文字的能力在此略见一斑.这六个字,是作者对"优美解"透彻理解之后的心领神会.在这一章里,每一题都给出了三种以上不同的解法,一题多解,思维的发散性在此体现得淋漓尽致.许许多多"优美解"给予我的感染力不是用语言所能表达的.我相信,读者在阅读本书之后,对"优美解"的渴求,将会使你在攀登知识高峰的过程中不畏辛劳.

第八章,综合·渗透·方法·思想

这一章把"数"与"形"更好地联系在一起,它让我们站在更高的立足点,从本质上去领略数学中独一无二的"优美".方法与技巧、思维与思想,在这里得到了和谐的统一.

第三章之后的开拓之一:转移法求轨迹方程的新定义;第六章之后的开拓之三:相关题解题方法与技巧;第七章之后的开拓之四:"开放型"题及思维对策,都是作者长年耕耘在教坛上的血汗的结晶.它来之于实践,在实践中提炼,在提炼里进一步升华.它们的独创性,充分体现了作者在教育上的刻苦努力,不断追求.作者活的思想,新的思维,给人深深的启迪.

这是一本新著,又是一本不可多得的教师的参考书,学生的教科书.即使仅从最狭窄的"应付高考"这一点上去考虑的话,它也是无可挑剔的.

佩服张嘉瑾老师不断的创新精神,感谢他给我们带来了对数学书的新的理解.

数学,原来也可以这样写!

(沈呈民,东北师范大学数学系教授)

作者小传

张嘉瑾，男，江苏宜兴人，1982 年毕业于江苏师范学院数学系，1996 年被评为中学数学特级教师.

2001 年出任《高考》杂志主编，以其鲜明的风格，过人的才华将《高考》迅速打造成全国教育杂志中的知名品牌.

多年来致力于初等数学教材教法的研究，颇有心得. 在省级以上杂志上先后发表论文、诗歌、散文一百多篇. 出版数学专著十册近四百万字. 其中《高中数学三部曲》、《高中数学大世界》、《高考试题研究》、《思维 · 重点 · 方法》、《考前精彩 99》等著作深受全国广大师生的欢迎. 论文和著作结构独特，内涵深刻，尤其是散文诗一样的语言在众多数学专著中独树一帜.

课堂教学中善于启发学生的思维，激发学生的学习兴趣，并注重学生心理素质的培养. 良好的美学与文学修养形成了他数学课的特殊风格和魅力.

《解析几何方法 · 技巧 · 优美解》五易其稿，逐字推敲，花费了三年的精力，不断修改和润色，不断完美和深刻，这是他对自己的严格的要求.

现供职于江苏省宜兴中学.

数学家非常重视他们的方法和理论是否优美.那么到底是什么使我们感到一个解答、一个证明优美呢?那就是各个部分之间的和谐、对称、恰到好处的平衡.

——庞加莱

目录

目录

1

简单美是数学美的主要内容之一.

数学家庞加莱说："正因为简单是美的，……因此我们宁可寻求简单的事实."

相当一部分解析几何问题在解答时尽力去挖掘几何性质的真正目的——追求简单美.

简单美

欧几里得（约公元前 300 年）的巨著《几何原本》在将数学形成为一门理论科学中起着杰出的作用，在很长时间内成为知识的源泉和严格数学叙述的典范.

与《几何原本》一样，古希腊大几何家阿波罗尼斯（公元前 262 年—190 年）集前人之大成，所著的《圆锥曲线论》一书，是一个不朽的丰碑. 他首先用一个圆锥统一给出了三种圆锥曲线，他对圆锥曲线的研究达到了登峰造极的地步. 他使用的方法是纯几何的，而非坐标法.

古希腊以来的代数是从属于几何的，代数的问题和方法都受到几何的束缚. 直至笛卡尔在 1637 年出版了《更好的指导推理和寻求真理的方法论》一书，才标志了一个数学新时期的到来. 笛卡尔 1596 年 3 月 31 日生于法国西部拉哈耶城一个贵族家庭，从小身体虚弱，8 岁才上学读书，但他勤奋好学. 他学习了大量的数学、哲学方面的知识. 1616 年他在普瓦蒂埃大学获得法学博士学位后，去巴黎当了律师. 他讨厌巴黎的花花世界，常常在僻静的郊区研究几何问题. 他批判了希腊几何的抽象，认为当时的代数充满了混乱、晦涩，阻碍思想艺术. 他引进坐标思想，让几何、代数互为工具，并努力发展代数来代替希腊的几何方法. 作为《方法论》附录的“几何”即是解析几何. 笛卡尔创始解析几何并不是偶然的，这是他长期钻研、潜心思索的结果. 他每时每刻都在专心致志地思考着数学与哲学的问题. 他明确表示：“应当去寻求另外一种包括这两门科学（代数与几何）的优点而没有它们的缺点的方法.”昼有所思，夜有所悟，笛卡尔在当年 11 月 10 日夜连续做了三个奇妙的梦. 第一个梦境是他自己被风暴从教堂和学校驱逐到风力吹不到的地方，第二个梦境是他找到了打开自然宝库的钥匙，第三个梦境是他在反复背诵奥生尼的诗句：“我应该沿着哪条人生之路走下去?”后来，笛卡尔说：“第二天我懂得了这惊人发现的基本原理.”因此有人说，他梦中的钥匙是建立解析几何，即把代数应用于几何的方法. 他将形与数统一起来，引进了变量，开辟了变量函数的新时期. 恩格斯为此写道：“数学中的转折点是笛卡

尔的变数. 有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且由牛顿和莱布尼兹大体上完成，但不是由他们发明的."①

另一位与笛卡尔分享创始解析几何荣誉的是费马. 他 1601 年 8 月 20 日生于法国南部图卢兹附近一个皮革商的家庭. 他从小受到良好的家庭教育，在大学攻读法律，毕业后当过律师. 他从 30 岁开始迷恋上数学，并把业余时间几乎全部用于钻研数学问题，并取得了许多辉煌的成果. 因此，人们称他为"业余数学家". 他与许多数学家、哲学家都有密切的交往. 费马有个"不动笔墨不读书"的习惯，就是读书时爱在书上勾勾画画，圈点批注，抒发见解. 著名的"费马猜想"就是写在他读过的一本书的空白处的.

费马创始解析几何的契机是：力图把古希腊已失传的关于阿波罗尼轨迹问题的证明方法补齐. 他利用坐标法尝试着把代数法应用于几何，并研究了多种曲线的性质. 从他与其他著名数学家的往来书信以及他 1629 年写成的《平面和立体轨迹引编》一书中可以看出，费马早于笛卡尔至少 8 年时间就相当清晰地掌握了解析几何的一些基本原理，只不过他的成果发表得较晚.

费马在一定程度上掌握了利用移轴或转轴的方法简化方程的技巧，他对解析几何中的圆锥曲线已有初步系统化的研究，他能用三种观点对待圆锥曲线：一是认为圆锥曲线是圆锥被平面截得的平面曲线；二是圆锥曲线是平面上满足一定条件的点的轨迹；三是圆锥曲线是二次方程的图象.

解析几何是用代数方法研究几何图形的，它把解决几何问题化归为数、式的演算. 在这化归的过程中，需要数形结合，并且可以直接应用一切平面几何知识. 作为解析几何解题的一种基本技巧，本章首先就如何适当应用平几知识来简化解题演算过程作一讨论.

① 恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社 1971 年第 1 版，第 236 页.

1.1　解下列各题

(1) 已知定点 $A(-5,0)$ 和圆 $x^2+y^2=9$,则过点 A 且与圆相切的两直线的夹角是________.

(2) A、B 两点坐标为$(-1,0)$、$(5,0)$,P 是圆 $x^2+y^2-4x-5=0$ 上的一点,且和 A、B 不重合,则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=$ ________.

(3) 过$A(4,-1)$且与已知圆 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 切于$B(1,2)$的圆的方程为________.

(4) 已知点 $A(4,2)$,过 A 点作圆 $x^2+y^2=10$ 的两切线,则切点间的劣弧长是________.

(5) 设直线 l 的方程为$\sqrt{3}x+y=2\sqrt{3}$,圆心在坐标原点,截直线 l 所得弦长等于圆半径的圆方程为________.

解　(1) 如图 1—1—A,连接圆心与切点 B,在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中,由勾股定理知 $|AB|=4$.

$\therefore\ \tan\angle BAO=\dfrac{3}{4}$,因此知两切线的夹角为 $2\arctan\dfrac{3}{4}$.

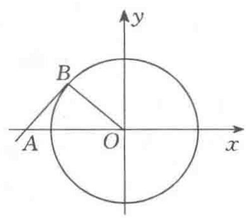


图 1—1—A

注　勾股数组(3,4,5) 为我们构造出一个直角三角形. 经常应用的勾股数组还有(5,12,13)、(7,24,25)、(8,15,17)、(9,40,41) 等.

(2) A、B 两点坐标满足圆方程,所以点 A、B 在圆上.

又 $|AB|=6$,圆的直径 $2R=6$,P 点异于A、B,因此 $PA\perp PB$(半圆上圆周角为直角),

$\therefore\ k_{AP}\cdot k_{BP}=-1$.

注　又解,设 $P(x_0,y_0)$,

则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y_0}{x_0+1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-5}=\dfrac{y_0^2}{{x_0}^2-4x_0-5}$,

P 在圆上,有 $y_0^2=-({x_0}^2-4x_0-5)$,即 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-1$.

(3) $\because$　所求圆过 A、B 两点,

$\therefore$　圆心必在 AB 的中垂线上.

易得 AB 中垂线方程为 $x-y=2$.

又两圆外切,圆心和切点共线,其直线方程为 $x+2y=5$.

解方程即得所求圆的圆心坐标为(3,1).

因此所求圆的半径为$\sqrt{5}$,圆方程$(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

(4) 如图 1—1—B 所示,过点 $A(4,2)$ 的切线为 AB、AC,B、C 为切点.

连 BO、CO、AO,易知

$|AO|=\sqrt{20}$,又 $|BO|=\sqrt{10}$,

$\therefore$　$\angle BOA=45^\circ$,$\angle BOC=90^\circ$,

$\therefore$　$\overset{\frown}{BC}_{(劣)}=\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\pi$.

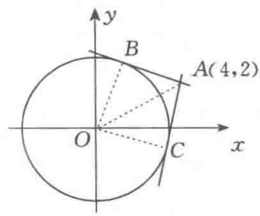


图 1—1—B

注　在各种解法中,应用几何性质比用其它方法简捷.

(5) 直线与 x 轴正向夹角为 120°,因为所求圆截直线所得的弦长为圆半径,设直线与圆交点为 A、B,即 $\triangle AOB$ 为等边三角形.

因此,B 点一定在 x 轴上.

如右图 1—1—C.

令 $y=0$, 则得 $x=2$,

$\therefore$　圆半径 $|OB|=2$,

圆方程为 $x^2+y^2=4$.

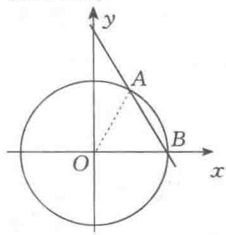


图 1—1—C

注　判断圆与已知直线的一个交点在 x 轴上,用的是几何性质. 求圆半径,在应用距离公式之后,还要应用几何性质.

至此,我们已初步体会到,解题时活用几何性质的真正目的是简化计算. 大凡圆的命题,应用熟知的平面几何中的有关性质定理,不仅自然而且必然.

1.2　巧用几何性质,能心算口答以下各题吗?

(1) 已知圆$(x-4)^2+(y-4)^2=4$与直线 $y=mx$ 的交点为 P、Q,则 $|OP|\cdot|OQ|$ 之值是　(　　)

(A) 28　(B) m^2+1　(C) $2\sqrt{7}$　(D) 不能确定

(2) 圆$(x+1)^2+(y+2)^2=8$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有　(　　)

(A) 1个　(B) 2个　(C) 3个　(D) 4个

(3)A、B是直线$x+y=1$与圆C:$x^2+y^2-x-y=0$的两个交点,点P满足以下三个条件:① 在坐标轴上;② 在圆C上;③$\triangle APB$为直角三角形,则这样的点P有　(　　)

(A)0个　(B)1个　(C)2个　(D)3个

(4) 过圆$(x-2)^2+y^2=2$外的点A作圆的两条切线,当两切线互相垂直时,点A的轨迹方程是________.

分析　(1) 由于$y=mx$是动直线,因此P、Q为相应的动点,似乎选(D)符合情理.但考虑到圆的切割线定理,顿悟!(A)成立.

(2) 圆半径为$2\sqrt{2}$,圆心到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$,故此直线垂直平分圆的一条半径.应选(C).

(3) 机智的读者会立即发现圆心坐标$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$满足直线$x+y=1$,故$AB$为圆之直径,如果能再画一张比较直观的图形,可知同时满足三个条件的点P只有原点,选(B).

(4) 过圆外一点A的两条切线互相垂直,因此圆心、切点与A这四点构成正方形,对角线长为2,动点A到定点$(2,0)$的距离为定长2,其轨迹方程是$(x-2)^2+y^2=4$.

注　一旦出现圆,就去联想圆的有关性质.当我们找到了解题的捷径时,又怎能抑制得住内心深处的兴奋?这正是简单美的陶醉和愉悦.

1.3　解下列各题

(1) 平面上有一半径为r的定圆,A为定圆内一定点,动点P到A的距离等于从它到圆的切线段的长,求P点的轨迹.

(2) 已知$P(1,2)$为圆$x^2+y^2=9$内一定点,过P作两条互相垂直的任意弦交圆于B、C,求BC中点M的轨迹方程.

(3) AB是圆$x^2+y^2=R^2$在x轴上的直径,M是圆上任一点,MT是切线,$AP\perp MT$,AP交BM的延长线于P,求P点的轨迹方程.

(4) 已知定圆的半径为a,一动点P向圆引两条切线,这两条切线

间的夹角 θ 为定值，求动点 P 的轨迹方程.

(5) 已知半圆方程 $x^2+y^2=16(y\geqslant 0)$，一个动圆 P 在这半圆内部与半圆相切并与直径相切，求动圆圆心的轨迹.

解　(1) 如图 1－2—A，建立坐标系，$A(a,0)$，B 为切点.

$|PA|^2=(x-a)^2+y^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OPB$ 中，$|PB|^2=|OP|^2-R^2$，

由题意 $|PA|=|PB|$，

$\therefore\ (x-a)^2+y^2=(x^2+y^2)-R^2$，

$\therefore\ x=\dfrac{a^2+R^2}{2a}$，

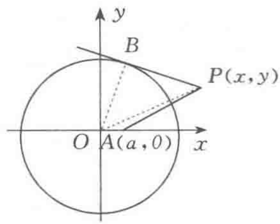


图 1－2－A

P 点的轨迹是与 y 轴平行且相距 $\dfrac{a^2+R^2}{2a}$ 的一条直线.

注　出现了圆的切线，于是出现了一个直角三角形. 已知条件也就集中到了这个焦点上.

(2) 如图 1—2—B，连 PM、OM、OC. 设 $M(x,y)$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中，$OC^2=OM^2+MC^2$，

又 $|MC|=|PM|$，

$\therefore\ 9=(x^2+y^2)+(x-1)^2+(y-2)^2$.

整理即得 M 的轨迹方程为

$$x^2+y^2-x-2y-2=0.$$

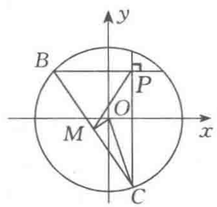


图 1－2－B

注　几何性质：弦心距垂直平分该弦；直角三角形斜边的中线长是斜边的一半.

(3) 如图 1—2—C，连 OM.

$\because\ M$ 为切点，

$\therefore\ OM\perp MT$，则 $OM\parallel AP$.

在 $\triangle BPA$ 中，O 为 AB 中点.

$\therefore\ OM$ 为 $\triangle BPA$ 的一条中位线，

$|AP|=2\,|OM|=2r$.

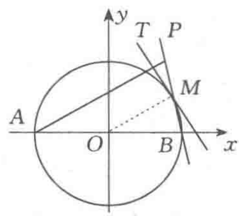


图 1－2－C

P 到定点 A 的距离等于定长 $2r$，P 的轨迹为以 A 为圆心，$2r$ 为半径的圆，其方程为 $(x+r)^2+y^2=4r^2$.

注　几何性质：圆的切线、三角形中位线、圆轨迹的平几定义.

(4) 如图 1—2—D，连接 OP、OA、OB，则 OP 平分 $\angle APB$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，

$$|OP|=\frac{|OA|}{\sin\angle APO},$$

$$\therefore\quad |OP|=\frac{a}{\sin\frac{\theta}{2}}\text{（定值）}.$$

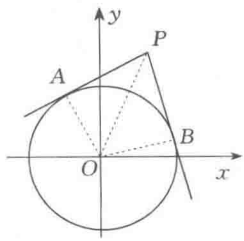


图 1—2—D

动点 P 的轨迹方程为：

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{\sin(\theta/2)}\right)^2.$$

注　几何性质：圆心与圆外一点连线平分这点向圆作的两条切线的夹角；平几中圆的轨迹定义.

(5) 如图 1—2—E，设圆与 x 轴的切点为 D，$P(x,y)$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PDO$ 中，

$|OP|^2=|PD|^2+|DO|^2$，$|OP|=4-y$，

$\therefore\quad x^2+y^2=(4-y)^2$

$\Rightarrow\quad x^2=-8(y-2)\ (y>0)$.

动圆圆心 P 的轨迹为以 $(0,2)$ 为顶点，$y=4$ 为准线的抛物线的 x 轴上方的部分.

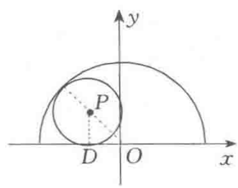


图 1—2—E

注　几何性质：两圆相切，圆心与切点共线；直角三角形勾股定理.

许多问题中几何性质并不明显，需要我们去认真推敲，仔细挖掘，方能获得理想的简捷解.

1.4　已知圆的内接四边形 $ABCD$ 中两对角线 AC、BD 互相垂直，垂足为 E，又 F 是 BC 中点，用解析法证明 $EF\perp AD$.

分析　解析法证题关键的一步就是建立怎样的坐标系. 同一道题，坐标系不同，繁简程度就有很大的差异.

本题突出的一点是，两对角线互相垂直，如选它们为坐标轴，四个顶点 A、B、C、D 的坐标就十分简单. 同时，这一选择也符合直觉思维的