2013

最新版

专升本入学考试专用教材

ZHUAN SHENG BEN RU XUE KAO SHI
ZHUAN YONG JIAO CAI

高等数学(二)

专科起点升本科

▶ 全国成人高考试题研究组 审定

▶ 北京大学 祝东进 主编

▶ 中国成人教育辅导中心 组织

知识出版社

2013
最新版

专升本入学考试专用教材

ZHUAN SHENG BEN RU XUE KAO SHI
ZHUAN YONG JIAO CAI

高等数学（二）

专科起点升本科

▶ 全国成人高考试题研究组　审定
▶ 北 京 大 学　　祝东进　主编
▶ 中国成人教育辅导中心　组织

知识出版社

社长:龚　莉

图书在版编目(CIP)数据

专升本入学考试专用教材.高等数学(二)/祝东进主编.—北京:知识出版社,2010.1

ISBN 978－7－5015－5880－3

Ⅰ.①专…　Ⅱ.①祝…　Ⅲ.①高等数学－成人教育:高等教育－升学参考资料　Ⅳ.①G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 220223 号

策 划 人:三人行
责任编辑:简菊玲
封面设计:陈　洁

知识出版社出版发行
北京阜成门北大街 17 号　邮编:100037　电话:010－88390774
http://www.ecph.com.cn
合肥杏花印务股份有限公司印刷
新华书店经销
开本:880×1230　1/16　印张:14.5　字数:449 千字
2010 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 3 次印刷
ISBN 978－7－5015－5880－3
定价:30.00 元

前言

preface

知识出版社出版的“专升本入学考试专用教材”是一套为参加成人高考的考生提供复习备考帮助的专用教材。本套教材面世十多年来，历经修订，日臻完美，为考生成考做出了卓越贡献。目前，“三人行图书”成考系列已经成为国内享有很高知名度的成考用书品牌，拥有越来越多的知心读者。

2013 年初，教育部高校学生司和教育部考试中心颁布了最新的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》。为了满足考生对优秀教材的需求，帮助考生按照新考试大纲复习备考，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授和命题研究人员，严格遵照新考试大纲的精神，重新对本套教材进行了修订。

此次修订，充分体现了知识内容和考试动向的完美结合。内容编排合理，讲解深入浅出，有利于考生把握重点、难点和易错点。同时，注重吸收新知识、新信息，具有很强的时效性和新颖性。每一章(单元)内容之后，还精心配置了同步练习题，便于考生及时训练，以巩固所学知识，检测复习效果，提高解题和应试能力。

为了更好地服务广大考生和打击盗版，本书封面上贴有“防伪标签”(无此标签则为盗版)。刮开“防伪标签”后，凭标签上的账号和密码，注册并登录我们的网站(www. srxbook. com)，即可免费下载成人高考学习软件(内含专项练习、模拟试卷、智能组卷、错题本、自动评卷等功能)，并可享受其他增值服务。

本套教材共 10 册，包括：政治、英语、教育理论、大学语文、高等数学(一)、高等数学(二)、艺术概论、民法、生态学基础、医学综合。供 2013 年秋季参加全国成人高考专升本入学考试的考生使用。同时，也可供大专院校的学生、教师及教研人员学习、参考。

由于修订时间仓促，书中难免有不足和疏漏之处，恳请业内人士和广大读者朋友批评指正，以便我们进一步完善本套教材，使之更好地为考生服务。最后，衷心地祝愿各位考生备考顺利，在考试中取得优异成绩！

全国成人高考教材编委会

2013 年 1 月

《三人行成人高考学习软件》使用说明

本软件采用先进的交互式多媒体技术设计完成，功能强大，操作简单，界面友好。

软件主要内容

- 专项练习：本软件拥有按考试题型分类整理出的海量试题，考生可利用本软件强大的检索功能，针对某项题型进行超强度大规模地快速训练。
- 模拟试卷：每科包含 10 份具有较高科学性和前瞻性的模拟试卷供考生测试使用。
- 智能组卷：考生只需轻轻一点，就会自动生成一套符合要求的全新试卷。无穷试卷，套套不同。
- 错 题 本：考生把做错的题保存在错题本里，以供查漏补缺。
- 自动评卷：即时给出检测结果，显示模拟成绩，省去考生的评卷时间。

运行环境

操作系统	中文 Windows9x/2000/XP/2003/Vista 操作系统
CPU	主频 733MHz 以上
内 存	128MB 以上
硬 盘	20GB 以上

软件使用说明

第一步 进入三人行图书网站 www.srxbook.com；

第二步 注册成为网站会员，以会员身份登录；

第三步 单击“激活下载卡”选项，输入防伪标签上的账号和密码，提交；

第四步 单击成人高考学习软件链接进行下载并安装；

第五步 完成后双击桌面快捷图标进入考试学习系统。

高等数学（二）的序列号为：**FKKKK－JJILE－FKLDE－DDGDE－DEDGK**

备注：如果您想增加所安装学习软件中的其他学科，其过程如下：双击所下载的安装文件“setup.exe”进入安装界面，在出现的界面中选择“修改”可增加其他学科考试学习系统，即在一套系统中同时进行多学科的测试、练习。安装完成后，再次运行本软件进入主界面，所装学科图标即被激活，点击便可进行学习和模拟考试。

软件开发：北京世纪春晖文化发展有限公司

技术支持邮箱：srxbook@vip.sina.com

目录

contents

第一章　极限和连续

第一节　极　　限

一、数列的极限

1. 数列的概念

定义　按一定顺序排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为无穷数列，简称为数列，记作$\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的通项. 例如：

$$1^2,2^2,3^2,\cdots,n^2,\cdots$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n+1},\cdots$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

$$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$$

都是数列. 它们的通项分别为 $n^2,\dfrac{1}{n+1},(-1)^{n+1},2n$.

(1) 数列的单调性

定义　对于数列$\{x_n\}$，如果有 $x_n \leqslant x_{n+1}$(即 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$)，$n \geqslant 1$，则称$\{x_n\}$是单调增加的；若有 $x_n \geqslant x_{n+1}$(即 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$)，$n \geqslant 1$，则称数列$\{x_n\}$是单调减少的. 单调增加数列和单调减少数列均称作单调数列.

例如：$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$是单调减少数列，$\{n^2\}$是单调增加数列.

(2) 数列的有界性

定义　如果对于数列$\{x_n\}$，存在正数 M，使得对每一个 x_n 都满足 $|x_n| \leqslant M$，则称数列$\{x_n\}$是有界的；如果这样的数不存在，则称数列$\{x_n\}$是无界的.

例如：$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$，$\left\{\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$都是有界的，而数列$\{n^2\}$是无界的.

2. 数列的极限

定义　对于数列$\{x_n\}$，如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$以常数 A 为极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

否则称数列$\{x_n\}$没有极限. 如果数列$\{x_n\}$没有极限，就称数列$\{x_n\}$是发散的.

数列极限的几何意义是：将数列的每一项 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 和常数 A 标在数轴上，若数列$\{x_n\}$以 A 为极限，则表示当 n 趋于无穷大时，点 x_n 可以无限地靠近点 A，即点 x_n 与点 A 之间的距离 $|x_n - A| \to 0$.

例如：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right]=1$.

3. 数列极限的性质

定理 1(唯一性)　若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限值必定唯一.

定理 2(有界性)　若数列$\{x_n\}$收敛，则它必定有界.

注意:

定理 2 反过来不一定成立,例如:数列$\{(-1)^{n+1}\}$. 当 $n=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 时,$x_n=1$;当 $n=2k(k=1,2,\cdots)$ 时,$x_n=-1$. 所以当 $n\to\infty$ 时,x_n 不趋于一个确定的常数,即$\{x_n\}$发散. 所以有界数列不一定收敛.

4. 数列极限存在准则

定理 3(两边夹定理也称夹逼定理)　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, $n=1,2,\cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,

那么,数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

定理 4　若$\{x_n\}$为单调有界数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

例 1　设 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$,$n=1,2,\cdots$,试判断$\{x_n\}$的单调性,并求其极限.

解　$x_n=\dfrac{n}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}>1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}=x_{n-1}$,所以$\{x_n\}$是单调增加的,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

5. 数列极限的四则运算定理

定理 5　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = AB$;

(3) 若 $B\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\dfrac{A}{B}$.

注意:

由(2)知,对任意常数 a,$\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n)=aA$. 这是因为可设 $y_n=a$,$n=1,2,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n)=aA$.

例 2　求下列数列的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;　　(2) $x_n=\dfrac{1+2n+3n^2}{9+7n+n^2}$;

(3) $x_n=\dfrac{7+n^2}{n(n+1)}+\dfrac{\sin n}{n}$;　　(4) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

解　(1)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n+3n^2}{9+7n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+3}{\frac{9}{n^2}+\frac{7}{n}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n^2}+\frac{7}{n}+1\right)}=\frac{3}{1}=3.$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{7+n^2}{n(n+1)}+\frac{\sin n}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{7+n^2}{n^2+n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1+0=1.$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}.$$

二、函数的极限

1. 函数在一点处的极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义　如果当 x 无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

(2) 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左(或右) 极限

定义　如果当 x 从 x_0 的左边(或右边) 无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限(或右极限) 是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A).$$

定理 6　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

例 3　设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0),\\ 0 & (x=0),\\ x+1 & (x>0),\end{cases}$ 试求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

解　由函数左、右极限定义得

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1.$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

由定理 6 知 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1),\\ 1 & (x=1),\end{cases}$ 试求 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$，并判断 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在；若存在，求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　极限定义中的 $x\to x_0$ 是指 x 无限地趋近于 x_0，但 $x\neq x_0$，故

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2.$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2.$$

且由定理 6 知 $f(1-0)=f(1+0)=2$，故 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在.

所以　$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2.$

注意：

$f(x)$ 在 x_0 点处的极限存在与否只同 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限性态有关，而与 $f(x_0)$ 的值无关，参看例 3 和例 4.

例 5 判定下列函数当 $x\to 0$ 时其极限是否存在：

(1) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0);\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0);\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & (x<0),\\ 0 & (x=0),\\ x+\dfrac{1}{2} & (x>0);\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & (x<0),\\ 3 & (x=0),\\ 2^x & (x>0).\end{cases}$

解 (1) 当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to -\infty$，从而 $e^{\frac{1}{x}}\to 0$，所以 $f(0-0)=0$，

当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to +\infty$，从而 $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$，所以 $f(0+0)=+\infty$，

$f(0-0)\neq f(0+0)$.

故当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，

$f(0-0)\neq f(0+0)$.

故当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

(3) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，

$f(0-0)=f(0+0)=\dfrac{1}{2}$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$.

(4) $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1$，

$f(0-0)\neq f(0+0)$.

故当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

2. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

(1) 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty \text{ 时}).$$

(2) 当 $x\to+\infty$(或 $-\infty$) 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 如果当 $x\to+\infty$(或 $-\infty$) 时，函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A，则称当 $x\to+\infty$(或 $-\infty$) 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或} \lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

定理 7 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 6　判断下列极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|(x+2)}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|(x+2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|(x+2)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{2}{x}\right)=-1,$$

从而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|(x+2)}{x^2}$不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}\neq-\dfrac{\pi}{2}$，从而$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$.

3. 函数极限的性质

定理 8(唯一性定理)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值必唯一.

定理 9(两边夹定理)　设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内(x_0 可除外)满足条件：

(1)$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

注意：

上述定理 8 及定理 9 当 $x\to\infty$ 时也成立. 另外在下面的性质或定理中，不标明 $x\to x_0$ 还是 $x\to\infty$，均表示对 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 都成立.

4. 函数极限的四则运算法则

定理 10　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2)$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

(3) 当 $B\neq0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

上述运算可推广到有限多个函数的代数和及乘积的情况，因此有如下推论：

推论　若$\lim f_i(x)$存在，$1\leqslant i\leqslant n$，C 为常数，n 为正整数，则有

(1) $\lim[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim f_1(x)\pm\lim f_2(x)\pm\cdots\pm\lim f_n(x)$；

(2) $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$；

(3) $\lim[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)]=\lim f_1(x)\cdot\lim f_2(x)\cdot\cdots\cdot\lim f_n(x)$.

例 7　试求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|+1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\dfrac{4+5}{2-3}=-9$.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-x)=0$,所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}\neq\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3-x)}$,

即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x(x+1)}=\dfrac{1-1}{1\times(1+1)}=0$.

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2)-2}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{x-4}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{|x|}}=\dfrac{1}{1}=1$.

(6)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

三、无穷小量和无穷大量

1. 无穷小量(简称无穷小)

定义 如果自变量x在某个变化过程中,函数$f(x)$的极限值为零,则称在该变化过程中,$f(x)$为无穷小量,记作

$$\lim f(x)=0.$$

注意:

(1)"自变量在某个变化过程中"是指$x\to x_0$或$x\to x_0^+$或$x\to x_0^-$或$x\to\infty$或$x\to+\infty$或$x\to-\infty$或数列的自变量$n\to\infty$.

(2) 一个变量是否为无穷小量与它的自变量的变化趋势密切相关. 例如:$\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$,$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$,所以当$x\to 0$时,$x^2$是无穷小量;而当$x\to 1$时,$x^2$不是无穷小量.

(3)"0"是无穷小量,这也是无穷小量中的唯一的一个数,除此之外,任何数均不是无穷小量.

(4) 除"0"外,无穷小量是一个变量,它不表示量的大小,而是表示变量的变化趋势为零.

(5) 很小很小的量不是无穷小量，越变越小的量不一定是无穷小量，例如：当 $x\to+\infty$ 时，$1+\frac{1}{x}$ 越变越小（极限为 1），但它不是无穷小量.

定理 11　x 在某个变化过程中，函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充要条件是：在 x 的同一变化过程中，$f(x)-A$ 为无穷小量.

2. 无穷大量（简称无穷大）

定义　如果自变量 x 在某个变化过程中，$|f(x)|$ 变得充分大（即无限增大），则称在该变化过程中，$f(x)$ 为无穷大量，记作

$$\lim f(x)=\infty.$$

如果 $\lim f(x)=+\infty$，则称在该变化过程中，$f(x)$ 为正无穷大量，同理可定义负无穷大量.

注意：

(1) 无穷大（∞）不是一个数，它只是一个记号，绝不能写成 $x=\infty$ 或 $f(x)=\infty$.

(2) 同无穷小量一样，无穷大量是一个变量，而不是绝对值很大的常数；无穷大量也同它的自变量的变化过程紧密相关.

3. 无穷小量与无穷大量的关系

定理 12　在自变量 x 的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

例如：当 $x\to0$ 时，x^2 为无穷小量，从而当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}$ 为无穷大量；当 $x\to\infty$ 时，x^2 为无穷大量，从而当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$ 为无穷小量.

4. 无穷小量的基本性质

性质 1　若 α 为无穷小量，则 $-\alpha$ 也是无穷小量.

性质 2　若 α,β 为无穷小量，则 $\alpha\beta$ 也为无穷小量. 归纳得，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为无穷小量，则 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 也是无穷小量.

性质 3　若 α 为无穷小量，且 $|\beta|\leqslant M$，则 $\alpha\beta$ 为无穷小量.

性质 4　若 α,β 为无穷小量，则 $\alpha\pm\beta$ 为无穷小量. 归纳得，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为无穷小量，则 $\alpha_1\pm\alpha_2\pm\cdots\pm\alpha_n$ 为无穷小量.

注意：

无穷大量具有性质 1、性质 2，但不具有性质 3 和性质 4.

例 8　判断下列变量在给定的变化过程中哪些是无穷小量，哪些是无穷大量，哪些既不是无穷小量又不是无穷大量？

(1) $\sin\frac{1}{x}\quad(x\to0)$；　(2) $e^{\frac{1}{x}}\quad(x\to0^-)$；

(3) $e^{\frac{1}{x}}\quad(x\to0^+)$；　(4) $\ln(1+x^4)\quad(x\to0)$；

(5) $\frac{x-2}{x^2-4}\quad(x\to2)$；　(6) $2-\frac{1}{x}\quad(x\to0^+)$.

解　(1) 当 $x\to0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ 振荡，从而极限不存在，故 $\sin\frac{1}{x}$ 既不是无穷小量又不是无穷大量.

(2) 当 $x\to0^-$ 时，$\frac{1}{x}\to-\infty$，从而 $e^{\frac{1}{x}}\to0$，所以当 $x\to0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 为无穷小量.

(3) 当 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，从而 $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$，所以当 $x\to0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 为无穷大量（正无穷大量）.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^4)=\ln 1=0$，所以当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^4)$ 为无穷小量.

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$，所以当 $x\to 2$ 时，$\dfrac{x-2}{x^2-4}$ 既不是无穷小量又不是无穷大量.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$，所以当 $x\to 0^+$ 时，$2-\dfrac{1}{x}$ 为负无穷大量.

5. 无穷小量的比较

定义 设 α 和 β 是同一变化过程中的无穷小量.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小量，记作 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$，则称 α 是与 β 同阶的无穷小量；特别地，若 $C=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小量.

例如：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^3 是比 x 高阶的无穷小量；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2}{x}=2$，所以当 $x\to 0$ 时，$2x+x^2$ 是与 x 同阶的无穷小量；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，所以当 $x\to 0$ 时，$x+x^2$ 是比 x^2 低阶的无穷小量.

注意：

对无穷大量完全类似地可定义高阶、同阶、等价、低阶无穷大量.

两个等价无穷小量可以互相代换，且有下列性质：

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 均为无穷小量，又 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

这个性质常常应用在极限运算中，它能起到简化运算的作用. 但是等价无穷小量可以在极限的乘除运算中应用，由于知识面的限制，不能在加减法中应用.

常用的等价无穷小量代换有（当 $x\to 0$ 时）：

$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$e^x-1\sim x$；$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^4-1)}{x^4-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x+x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+4x^4}$.

解 (1) 因为 $x\to 1$ 时，$x^4-1\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^4-1)}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^4-1}=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2+4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+8x^2}=\dfrac{1}{2}$.

从例 9 可以看出，利用等价无穷小量等价替换求极限非常实用，要灵活运用等价替换，例如：当 $x \to 1$ 时，$x-1 \to 0$，$\ln x$ 可写成 $\ln[1+(x-1)]$，当 $x \to 1$ 时，$\ln x = \ln[1+(x-1)] \sim x-1$ 等.

四、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

上述极限的推广是

定理 13　$\lim\limits_{f(x) \to 0} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$.

利用这个重要极限可求某些函数的极限.

例如：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x} \times \dfrac{3x}{2x} \times \dfrac{2x}{\sin 2x}\right) = \dfrac{3}{2} \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) \cdot \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{2x}{\sin 2x}\right) = \dfrac{3}{2}$.

又如：
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \to 1}\left[\frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}\right] \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，特别地 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 等价于 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，这个极限在形式上有如下特征：

(1) 指数的绝对值趋于无穷大；

(2) 括号内是两项之和，第一项是 1，第二项是括号外指数的倒数.

$\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ 的推广是

定理 14　$\lim\limits_{f(x) \to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}$.

推论　若 $\lim f(x) = 0$，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$，则 $\lim[1+f(x)]^{\frac{1}{g(x)}} = \mathrm{e}^{\lim\frac{f(x)}{g(x)}} = \mathrm{e}^C$.

利用这个重要极限可求某些函数的极限.

例如：$\lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2} = \mathrm{e}^2$.

又如：$\lim\limits_{x \to 0}(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{4x+5x^3}} = \lim\limits_{x \to 0}[1+(2x+3x^2)]^{\frac{1}{2x+3x^2}\cdot\frac{2x+3x^2}{4x+5x^3}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{2x+3x^2}{4x+5x^3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

上述两个重要极限在极限的计算中起着重要的作用，熟练掌握它们及变形是非常必要的. 第 1 个重要极限属于“$\dfrac{0}{0}$”型，第 2 个重要极限属于“1^∞”型. 如果极限中含有三角函数或反三角函数，应优先考虑应用 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；如果极限式是“$1^\infty$”型的未定式时，应优先考虑应用 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$）.

例 10　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\arcsin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^x$；　　(4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}$.

解　(1) 利用等价无穷小量的等价代换
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

或利用重要极限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1.$$

(2) 利用等价无穷小量代换

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

反三角函数的极限可通过变量代换转化为三角函数式，从而可以利用重要极限公式来求其极限. 令 $\arcsin 2x=t$，则 $2x=\sin t$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin t}{t}=\frac{1}{2}.$$

(3) 利用重要极限公式

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+2}\right)\right]^{\left(-\frac{x+2}{2}\right)\times\frac{-2x}{x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+2}}=e^{-2}.$$

(4) 利用重要极限公式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^{\left(-\frac{x+1}{2}\right)\cdot\frac{2\left(\frac{x}{2}+4\right)}{-(x+1)}}\\&=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right]^{\left(-\frac{x+1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{x+8}{x+1}\right)}\\&=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x+8}{x+1}\right)}=e^{-1}.\end{aligned}$$

例 11 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-2a}\right)^{x}=8$，求常数 a.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-2a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{2a}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}}{\left(1+\frac{-2a}{x}\right)^{\frac{x}{-2a}\cdot(-2a)}}=\frac{e^{a}}{e^{-2a}}=e^{3a},$$

由题条件得 $e^{3a}=8$，解得 $a=\ln 2$.

五、求极限的方法

1. 利用极限的四则运算通过通分、约分等形式来求极限.

2. 利用无穷小量的性质来求极限.

3. 利用等价无穷小量(或无穷大量)求极限.

4. 利用两个重要极限求极限.

其他求极限的方法(如洛必达法则)，将在第二章的内容中介绍.

例 12 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+1)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+x+2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+3x^2+4x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+3x^2+4x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+1)=2+1+1=4.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2+x+2}=\dfrac{0+1}{0^2+0+2}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 因为 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x$ 为有界变量.

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为无穷小量(当 $x\to\infty$ 时)，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+3x^2+4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+3x}{2x^3+3x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\dfrac{3}{4}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x}{2x}=-\dfrac{3}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)-1}{\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)}\right]=1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

注意：

分式中含有根式的零因子通常是分子、分母有理化后化简，如例 12 中的(4) 和(8)；分式中分子、分母均为无穷大量时，通常是提取最高阶的无穷因子，即所谓的“看高不管低”，如例 12 中的(5)；若分式中分子、分母均为无穷小量时，则是“看低不管高”，如例 12 中的(6).

下面通过举例来看看几种未定式的极限求法.

1. “$\dfrac{0}{0}$”型未定式

分析　对“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，商的极限运算法则不适用，因为分母出现了 0. 所以必须想办法消去分子与分母的零因子而运用商的极限运算法则求得极限. 此法通常称作消去零因子法.

例 13　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式

分析　对“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，它的基本解法之一是消去“∞”因子，这也就是所谓的“看高不管低”.

例 14　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+7n-8}{3n^2+2n+2}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+7n-8}{3n^2+2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{7}{n}-\dfrac{8}{n^2}}{3+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{6}{3}=2$.

3. “$\infty-\infty$”型未定式

分析　对“$\infty-\infty$”型未定式必须化成为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式求解. 常用的方法有通分化简或根式有理化等.

例 15　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$.