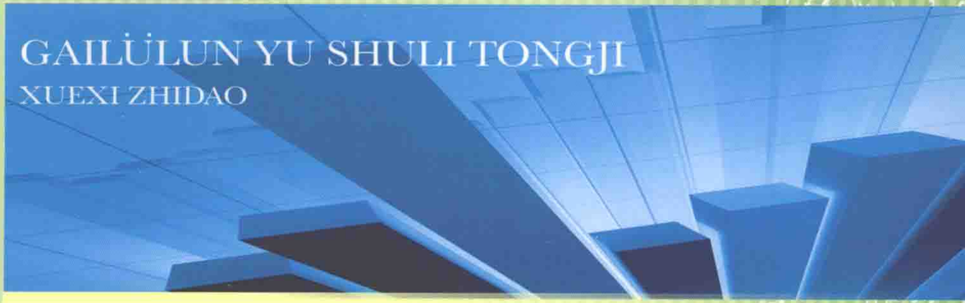
全国高等农林院校"十二五"规划教材

概率论与数理统计学习指导



李　炜　吴志松◎主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十二五”规划教材

概率论与数理统计

学习指导

李　炜　吴志松　主编

中　国　农　业　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导 / 李炜，吴志松主编．—北京：中国农业出版社，2011.8

全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-15728-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李…②吴… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 146639 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

[redacted]雷 魏明龙

[redacted]朱 雷

[redacted]新华书店北京发行所发行

[redacted]年 8 月北京第 1 次印刷

[redacted]/16 印张：13.75

[redacted]千字

定价：19.00 元

内 容 提 要

本书是全国高等农业院校“十二五”规划教材，是与《概率论与数理统计》（李炜　吴志松主编）配套的学习指导教材。内容包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等 10 章。每章分为基本要求、内容提要、例题精选、自测题、自测题解答和习题解答 6 部分。

本书可作为高等农林院校概率论与数理统计课程辅助教材，也可作为其他院校相关课程的教学参考书，还可作为工程技术人员、科技工作者的参考书。

主　编　李　炜　吴志松

编　者　（按姓名笔画排序）

陈传勇　李　炜　吴志松

张超龙　贺建风　顾光同

黄　敏　黄龙生　雷友发

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律的一门核心数学分支，也是高校非数学专业的一门重要的基础课程，同时也是硕士研究生入学考试的必考科目。它正迅速地渗透到很多高新技术的前沿，广泛地应用于气象预报、水文预报、地震预报、航空航天、人工智能、通信网络、医学、生物学、经济学、金融学、心理学、工业和农业生产等众多领域，成为各个学科不可替代的基础分析工具，在许多交叉学科的研究中起着桥梁作用。

本书前五章为概率论部分，后五章为数理统计部分，全书力求突出概率论与数理统计的基本思想和解题方法，及在工程和实践领域中的应用，概念讲述通俗易懂，在例题和习题的选取上注重应用性和趣味性。编写上注意对解题方法和内容的提炼，便于读者自学。通过本书的学习有助于提高读者分析问题的能力，提高读者的数学素养，提高读者利用数学方法解决实际问题的能力。

本书是全国高等农林院校“十二五”规划教材，作者根据目前国内高校各专业《概率论与数理统计教学基本要求》，结合长期从事农林院校概率论与数理统计课程教学研究的经验进行编写。全书共分十章，其中第一章和第五章由雷友发编写，第二章由张超龙编写，第三章由陈传勇编写，第四章由贺建风编写，第六章和第九章由吴志松编写，第七章由顾光同编写，第八章由黄龙生编写，第十章由黄敏编写。全书由李炜、吴志松统稿。本书

可作为高等农林院校各专业及其他院校相关专业的“概率论与数理统计”课程辅助教材或教学参考书，也可供相关科技人员参考。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便不断改进和完善。

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　基本要求

1. 理解随机现象、随机试验、样本空间、随机事件的概念；掌握事件之间的关系与运算．

2. 掌握概率的定义；掌握概率的基本性质；会计算古典概型及简单几何概型的概率．

3. 掌握条件概率的定义；掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式．

4. 理解事件独立性的概念；掌握应用事件独立性进行概率计算的方法．

5. 理解独立重复试验的概念，会计算有关事件的概率．

第二节　内容提要

一、基本概念

1. 随机现象　不能事先准确预知其结果的现象，即在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象．

2. 随机试验　同时具有可重复性、可观察性和不确定性三个特点的试验称为随机试验．

3. 样本点和样本空间　随机试验的每个可能的基本结果称为一个样本点；全体样本点构成的集合称为随机试验的样本空间．

4. 随机事件　试验的样本空间的子集称为随机事件；特别地，样本空间称为必然事件，空集称为不可能事件．

5. 事件的独立性　如果事件 A 发生的可能性不受事件 B 发生与否的影响，即 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立．

6. 试验的独立性　设 E_1 和 E_2 是两个随机试验，如果 E_1 中的任何一个事件与 E_2 中的任何一个事件都相互独立，则称这两个试验相互独立．

7. 独立重复试验　对 n 个试验 E_1，E_2，…，E_n，如果 E_1 中的任一事件、E_2 中的任一事件、……、E_n 中的任一事件都相互独立，则称这 n 个试验相互

独立．如果这 n 个独立试验完全相同，则称其为 n 重独立重复试验.

8. n 重伯努利试验 只有两个基本事件 A 和 $\overline{A}$ 的试验称为伯努利试验；n 重独立重复伯努利试验称为 n 重伯努利试验．

9. 条件概率 在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率称为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，记为 $P(B|A)$.

二、重要性质与公式

1. 古典概型的概率 $P(A)=\dfrac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件数 } k}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含基本事件总数 } n}$.

2. 概率的性质

(1) 对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) 对任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

(4) 若 A_1，A_2，…，A_n，…是互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\text{；}P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(5) 对任意两个事件 A 和 B，若 $A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\text{；}P(A)\geqslant P(B).$$

(6) 对任意两个事件 A 和 B，有加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

从而

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

(7) 三个事件和的概率

对任意的三个事件 A、B、C，有加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

3. 乘法公式
$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)P(B\mid A)\quad (P(A)>0)\\&=P(B)P(A\mid B)\quad (P(B)>0).\end{aligned}$$

三个事件的乘法公式 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$.

n 个事件的乘法公式

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

其中要求 $P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$.

4. 当 A_1，A_2，…，A_n 相互独立时，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\text{；}$$
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

5. 全概率公式 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，A_1，A_2，…，A_n 为 Ω

的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

6. 贝叶斯公式　设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个划分，B 为 E 的事件，且 $P(A_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\ i=1, 2, \cdots, n.$$

7. 伯努利定理　在 n 重伯努利试验中，若每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在这 n 次试验中事件 A 恰好出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ q=1-p,\ k=0, 1, 2, \cdots, n.$$

第三节　例题精选

题型 1　随机事件间的关系与运算、概率的性质与公式

解题思路　常利用集合的维恩图来分析事件间的关系，将复杂事件等价转化为简单事件或简单事件间的运算；熟练掌握概率的性质及公式．

例 1　某人射击三次，若 $A_i=\{$第 i 次射击中靶$\}(i=1, 2, 3)$，则下列事件 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，$\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$ 及 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$ 分别表示什么？

解　$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$：只有第一次中靶；

$\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$：恰有一次不中靶(或恰有两次中靶)；

$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$：至少有一次不中靶(或三枪不全中靶).

例 2　设 A、B 是任意两个事件，则 $P\{(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\}=$ (　　).

解　应填：0.

分析　因为 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}$

$$=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup\varnothing=A;$$

同理　$(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}$，

所以　$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing,$$

所以　$$P\{(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\}=0.$$

例 3　已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率．

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$;

$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$;

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20};$$

$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$;

$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60}$;

$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$.

题型 2 古典概型、几何概型概率的计算

解题思路 (1) 若随机试验 E 只有有限个等可能的基本事件，则此试验属于古典概型，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件数 } k}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含基本事件总数 } n},$$

其中的基本事件数一般要用排列、组合方法计算.

(2) 若样本空间构成一个区域，并且每一个样本点的出现具有等可能性，则此试验属于几何概型，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{构成事件 } A \text{ 的子区域的测度}}{\text{样本空间的测度}}.$$

计算几何概型事件的概率时，首先要画出题目涉及的图形，然后根据几何图形的面积或体积公式及概率计算公式计算.

例 4 将 15 名新生(其中有 3 名优秀生)随机地分配到三个班级中，其中一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，求：

(1) 每个班级各分配到 1 名优秀生的概率；

(2) 3 名优秀生被分配到同一个班的概率.

解 将 15 名新生分别分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名的分法共有

$$n=C_{15}^{4}C_{11}^{5}C_{6}^{6}=\frac{15!}{4!\ 5!\ 6!}\text{(种)}.$$

(1) 将 3 名优秀生分配给三个班各一名，其分法共有

$$C_3^1C_2^1C_1^1=3!\ \text{(种)}.$$

再将剩下的 12 名学生分配到一班 3 名，二班 4 名，三班 5 名，其分法共有

$$C_{12}^{3}C_{9}^{4}C_{5}^{5}=\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}(\text{种}).$$

设事件 A=｛将其中有 3 名优秀生的 15 名学生分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，且各班有一名优秀生｝，则根据乘法原理知，事件 A 所含样本点数为

$$k_A=3!\ \frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}=\frac{12!}{4!\ 5!},$$

根据古典概型概率计算公式得所求概率为

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{\dfrac{12!}{4!\ 5!}}{\dfrac{15!}{4!\ 5!\ 6!}}=\frac{12!\ 6!}{15!}=\frac{24}{91}=0.2637.$$

(2) 3 名优秀生分配到同一个班，即都被分配到三个班的某一个班，共有三种可能．

若 3 名优秀生都分到一班，则剩下 12 名中一班分配 1 名新生，二班分 5 名新生，三班分 6 名新生的分法共有 $C_{12}^{1}C_{11}^{5}C_{6}^{6}=\frac{12!}{5!\ 6!}$种；同理，3 名优秀生都分到二班，有 $C_{12}^{4}C_{8}^{2}C_{6}^{6}=\frac{12!}{2!\ 4!\ 6!}$种；若都分配到三班，有 $C_{12}^{4}C_{8}^{5}C_{3}^{3}=\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}$种．

设事件 B=｛将 15 名学生分配到一班 4 名，二班 5 名，三班 6 名，且其中的 3 名优秀生都分配到同一班｝，则由加法原理，事件 B 所含样本点数为

$$k_B=\frac{12!}{5!\ 6!}+\frac{12!}{2!\ 4!\ 6!}+\frac{12!}{3!\ 4!\ 5!}=\frac{12!\ \times 12\times 4\times 3\times 17}{2!\ 3!\ 4!\ 5!\ 6!}.$$

由古典概型概率计算公式得所求概率为

$$P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{12!\times 12\times 4\times 3\times 17}{2!\ 3!\ 4!\ 5!\ 6!}\times\frac{4!\ 5!\ 6!}{15!}=\frac{17\times 2}{35\times 13}=0.07473.$$

例 5　橱内有 10 双皮鞋，从中任取 4 只．求其中

(1) 恰好成两双；

(2) 只有两只成双；

(3) 没有成双

的概率各为多少?

解　从 10 双皮鞋即 20 只皮鞋中任取 4 只，取法共有 $n=C_{20}^{4}$种．

记 A=｛4 只鞋恰好成两双｝，B=｛4 只鞋中只有 2 只成双｝；C=｛4 只鞋中没有成双｝，下面分别求事件 A、B、C 所含的样本点数 k_1，k_2，k_3 及其概率．

(1) 4 只鞋恰好成两双，即从 10 双鞋里取出 2 双，所以 $k_1=C_{10}^2$，故

$$P(A)=\frac{C_{10}^2}{C_{20}^4}=\frac{3}{323}.$$

(2) 4 只鞋只有两只成双，即先从 10 双鞋里取出 1 双，然后从剩下的 9 双中任取 2 双，再从取出的 2 双中各取一只，所以 $k_2=C_{10}^1C_9^2C_2^1C_2^1$，故

$$P(B)=\frac{C_{10}^1C_9^2 2^2}{C_{20}^4}=\frac{96}{323}.$$

(3) 4 只鞋没有成双，即从 10 双里取出 4 双，然后从这 4 双里各取一只，所以 $k_3=C_{10}^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$，故

$$P(C)=\frac{C_{10}^4 2^4}{C_{20}^4}=\frac{224}{323}.$$

例 6 n 个男孩和 m 个女孩($m\leqslant n+1$)，随机地排成一列，求任意两个女孩都不相邻的概率.

解 设事件 $A=\{$任意两个女孩都不相邻$\}$. 把 $m+n$ 个孩子随机排列，总共有$(m+n)!$ 种不同的排法. A 中基本事件数可按如下求解：先把 n 个男孩排成一列，共有 $n!$ 种不同的排法；排定之后，每 2 个相邻的男孩之间算 1 个空位，共有 $n-1$ 个，再加上头尾 2 个，共有 $n+1$ 个位置，从中取 m 个，共有 C_{n+1}^m种取法；在这抽取的 m 个空位上来放置 m 个女孩，这样任意两个女孩都不相邻；取定 m 个放置女孩的空位后，m 个女孩在这 m 个空位随机排列，有 $m!$ 种排法. 因此，A 中基本事件数为 $n!\ C_{n+1}^m m!$. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{n!\ C_{n+1}^m m!}{(m+n)!}=\frac{C_{n+1}^m}{C_{n+m}^m}.$$

例 7 在区间(0，1)内任取 2 个数，求这 2 个数的乘积小于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设 x，y 是从区间(0，1)内任取的 2 个数，显然样本空间构成一个区域，因此这是一个几何概型. 满足事件 $A=\left\{2\text{个数的乘积小于}\frac{1}{4}\right\}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,xy<\frac{1}{4}\right\}$的样本点构成区域 G(图 1.1 中的阴影部分).

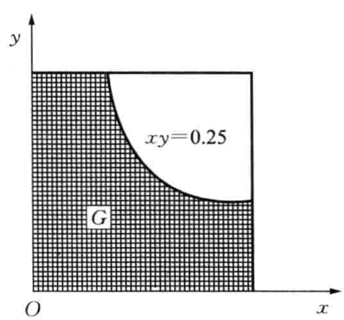


图 1.1

$$P(A)=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

题型 3　利用条件概率、乘法公式及事件的独立性计算概率

解题思路　在这一题型中，(1) 要弄清要求的事件概率是条件概率 $P(B \mid A)$，还是无条件概率 $P(AB)$．一般来讲，凡涉及事件 A 与 B "同时"发生的，即是求 $P(AB)$；凡有"包含"关系、"先后"关系或"主次"关系的，即是求条件概率 $P(B \mid A)$．(2) 要弄清"互不相容"和"相互独立"这两个概念，不要混为一谈．(3) 要记住常用的公式．

例 8　设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，现混合 100 个人的血清，求此血清中有肝炎病毒的概率．

解　设事件 A={混合血清中有肝炎病毒}，A_i={第 i 个人的血清中含有肝炎病毒}，$i=1$，2，…，100，则有

$$A=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}.$$

由于每个人的血清中有没有肝炎病毒是互相没有关系的，即 A_1，A_2，…，A_{100} 相互独立，因此 $\overline{A}_1$，$\overline{A}_2$，…，$\overline{A}_{100}$ 也相互独立，所以

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}}) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{100}) \\ &= P(\overline{A}_1) \cdots P(\overline{A}_{100}) = (1-0.004)^{100}, \end{aligned}$$

故所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-0.004)^{100}=0.33.$$

例 9　设某所学校大一新生都开设"高等数学"和"英语"必修课，第一学期结束后，经统计"高等数学"不及格的学生占 15%，"英语"不及格的学生占 10%，这两门课都不及格的占 5%，问

(1)"高等数学不及格"与"英语不及格"是两个相互独立的事件吗？

(2) 已知一学生"高等数学"不及格，他"英语"不及格的概率是多少？

(3) 已知一学生"英语"不及格，他"高等数学"不及格的概率是多少？

解　设事件 A={一学生高等数学不及格}，B={一学生英语不及格}，则

$$P(A)=0.15, \quad P(B)=0.1, \quad P(AB)=0.05.$$

(1) 因为 $P(AB)=0.05 \neq P(A)P(B)=0.15 \times 0.1=0.015$，
所以"数学不及格"与"英语不及格"不是相互独立的．

(2) 这是已知一事件发生的前提下，考虑另一事件发生的概率问题，故属于条件概率，由条件概率公式得所求概率为

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.05}{0.15}=\frac{1}{3}.$$

(3) 同 (2)，此时所求概率为 $P(A \mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.05}{0.1}=\dfrac{1}{2}$.

例 10　某住宅楼共有三个孩子，已知其中至少有一个是女孩，求至少有