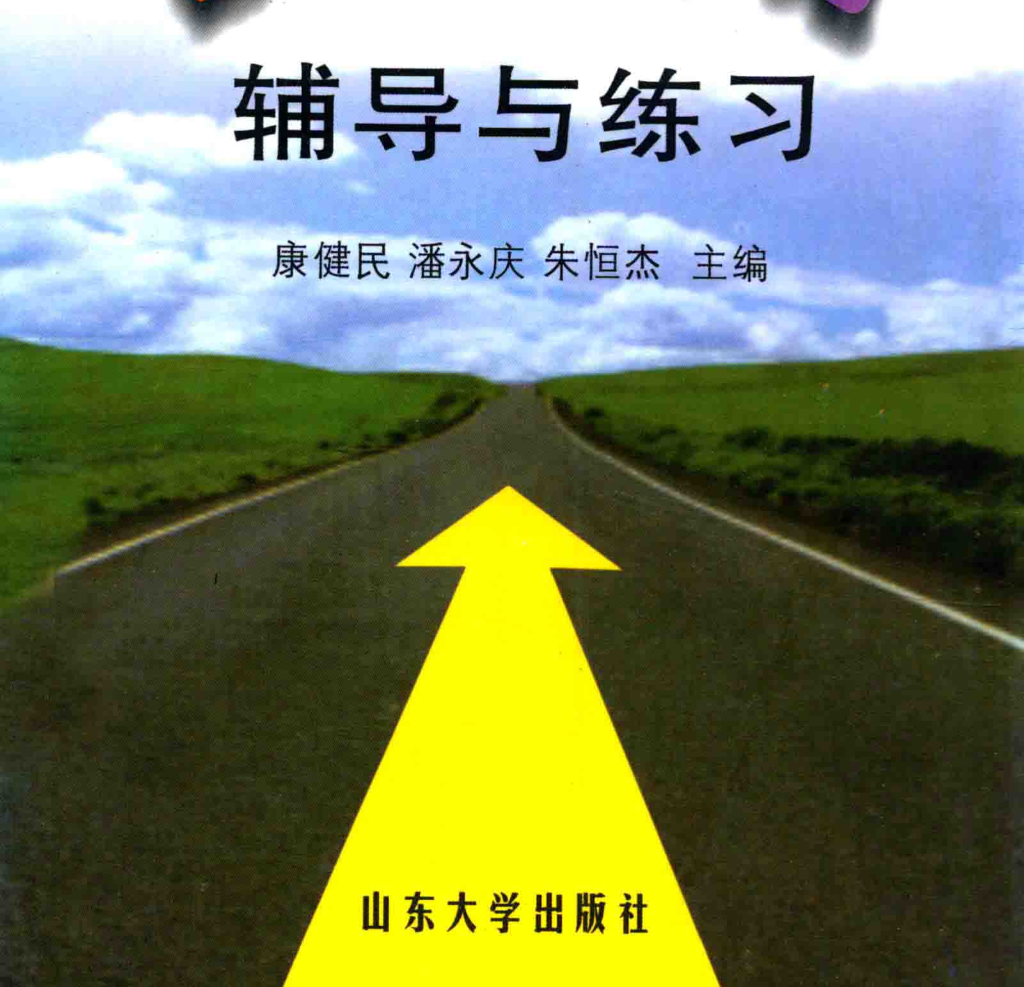
初中版

数学奥林匹克

辅导与练习

康健民 潘永庆 朱恒杰 主编



山东大学出版社

数学奥林匹克辅导与练习

康健民　潘永庆　朱恒杰　主编

山东大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克辅导与练习/康健民，潘永庆，朱恒杰主编.—济南：山东大学出版社，1998.11（2000.11重印）

ISBN 7-5607-1903-1

Ⅰ.数…

Ⅱ.①康…②潘…③朱…

Ⅲ.数学-竞赛-初中-教学参考资料

Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第55060号

山东大学出版社出版发行

（山东省济南市山大南路27号　邮政编码：250100）

山 东 省 新 华 书 店 经 销

山东济阳新华印刷厂印刷

850×1168毫米　1/32　13.75印张　356千字

1998年11月第1版　2000年11月第2次印刷

印数：35001—38000册

定价：13.80元

《数学奥林匹克辅导与练习》

主　编　康健民　潘永庆　朱恒杰
作　者　马德志　赵春东　云　鹏
宋笑梅　毕念淄　张宇清
苗学良　黄继芳　于会祥

前　　言

全国初中数学联赛始于 1984 年，当时由天津市主持试办，并于该年 11 月，中国数学会决定“1985 年起每年举办全国高中数学联赛和初中数学联赛各一次”. 1986 年又决定将竞赛工作日程固定为“初中竞赛在每年 4 月第一个星期日举行”.

随着全国初中数学竞赛的蓬勃发展，山东省初中数学竞赛已由起步时单纯的选拔性阶段，发展到今天普及与选拔相结合的新阶段，初中数学竞赛已被学校、社会所公认，参加竞赛的人数逐年增加，竞赛成绩优异，为全国数学奥林匹克理科实验班招生、选拔输送了较多的具有数学才华的优秀学生，为全国数学奥林匹克做出了应有贡献.

特别是在实施九年义务教育过程中，为尽快地提高学生的数学素质，更好地将初中数学竞赛办成数学教学的第二课堂，给初中学生提供一个适宜施展数学才华的天地，山东大学出版社特邀请本省具有竞赛实践经验和专业特长的学者、专家，编写了适合初中各年级开展数学竞赛活动使用的具有实战意义和系统总结供复习升学之用的良好读物——《数学奥林匹克辅导与练习》.

《数学奥林匹克辅导与练习》是依照初中数学教学大纲和初中数学竞赛大纲内容，按九年义务教育初级中学课本数学教科书顺序，经过概括编写而成的. 全书共包括三篇：第一篇是代数基础知

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

识与方法；第二篇是平面几何基础知识与方法；第三篇是数学专题．第一篇和第二篇是供升学复习之用；第三篇是在初中数学内容的基础上加深拓宽，突出了初等数论、组合数学、图论等竞赛课题，供竞赛之用，全书对常用的数学思想方法，不仅作了深入细致地阐述，而且与每章配备的练习题相吻合，这将对初中学生复习知识、发展能力、开发智力、发展个性，培养创造思维，展现数学才华，颇有益处．

为了使本书更能符合实际需要，我们特邀请了全国奥林匹克高级教练员方祖耀教授对本书进行了审定．

由于时间仓促，水平所限，能否体现我们编者所想，是否适合读者需要，恳请阅后多多指教．

编 者 于 济 南

1998年7月

目　　录

第一篇　代数基础知识与方法

第一章　数　与　式

第一节　实　　数

一、基础知识

1．实数的概念

(1)有理数：整数和分数统称有理数．有时为了研究方便，可以把整数看作分母为 1 的分数，所以又可以把整数包括在分数中，有时把“正、负分数和零统称有理数”作为有理数的定义．

(2)无理数：无限不循环小数叫做无理数．应当注意：用根号形式表示的数并不都是无理数．如 $\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$都不是无理数．无理数并非专指开方开不尽的数．

(3)实数：有理数和无理数统称实数．由于任何一个有理数都可以写成有限小数(整数可以看作小数点后面是 0 的小数)或者循环小数的形式，无理数是无限不循环小数，所以实数集合也叫做小数集合．

我们学过的数的系统如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

(4)数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴. 实数与数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点表示出来. 反过来，数轴上的每一个点都可以用一个实数来表示. 数轴是用数形结合的思想讨论数学问题的重要工具，如方程、不等式的解等方面的具体运用.

(5)相反数：只有符号不同的两个数互称相反数. 即数 a 的相反数是 $-a$. 零的相反数是零. 其几何意义是：在数轴上关于原点对称的两点.

如果数 a 的相反数是 b，那么 $a+b=0$，反之也成立.

(6)绝对值：一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离. 数 a 的绝对值记作 $|a|$.

正数的绝对值是其本身，负数的绝对值是它的相反数. 零的绝对值是零. 即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

(7)方根：若 $x^n=a$（n 为正整数），则 x 叫做 a 的 n 次方根. 在实数中，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数；负数没有偶次方根；零的偶次方根是零. 正数的奇次方根是正数；负数的奇次方根是负数；零的奇次方根是零.

(8)算术根：正数的正的方根叫做算术根.正数的二次方根也叫做算术平方根，如 9 的算术平方根是 3.

2. 实数的大小比较

(1)实数大小的比较规则是：①正数都大于零，零大于负数.②两个正数中，绝对值大的那个较大.③两个负数中，绝对值大的那个较小.

(2)几何意义：数轴上任意两点中，右边的点对应的实数总大于左边的点对应的实数.反之，两数中较大的数对应的点在较小的数对应的点的右侧.运算性质：$a>b\Leftrightarrow a-b>0$.

如果实数 a,b 对应于数轴上两点 A,B，则 A 与 B 两点间的距离为：$|AB|=|a-b|$.

(3)注意的几点：①没有最大的实数，也没有最小的实数.②任何两个实数 a 与 b 之间总存在一个实数$\frac{a+b}{2}$.

3. 实数的运算

(1)加法：①同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加.②绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值，互为相反数的两个数相加得零.③一个数同零相加，仍得这个数.

(2)减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数.

(3)乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘.任何数同零相乘都得零.

几个不等于零的数相乘，积的符号由负因数的个数决定.当负因数有奇数个时，积为负；当负因数有偶数个时，积为正.几个数相乘，有一个因数为零，积就为零.

(4)除法：除以一个数等于乘上这个数的倒数.零不能作除数.

两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除.零除以任何一个不等于零的数都是零.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(5)乘方：求几个相同因数的积的运算.

正数的任何次幂都是正数；负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数. 零的正整数次幂为零.

(6)开方：求一个实数方根的运算叫开方. 开方是乘方的逆运算. 在实数集，负数没有偶次方根，所以运算的结果不一定仍是实数，初中阶段主要学习正数的开方，特别是开平方和开立方.

(7)运算定律：

①交换律：$a+b=b+a$；$ab=ba$

②结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

③分配律：$(a+b)\cdot c=ac+bc$

④幂指数律：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$(a^m)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$

$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}(b\neq 0)$

$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$

4. 近似运算与科学计数法

在实际运算中经常会遇到近似数，注意按要求的精确度进行计算. 对较大的数用科学记数法表示既方便，又容易体现对有效数字的要求.

二、典型例题

例 1 若 $P=\frac{1998}{1999}-\frac{1997}{1998}$，$Q=\frac{1997}{1998}-\frac{1996}{1997}$，$R=\frac{1}{1998}-\frac{1}{1999}$，那么，$P$，$Q$，$R$ 的大小关系为(　　).

A. $P>Q>R$　　B. $P<Q<R$

C. $P<Q=R$　　D. $P=R<Q$

分析：此题若直接运算求得结果再比较，显的较繁. 若用一个

字母代替题中一个数，利用 1996，1997，1998，1999 是连续自然数，则较简捷.

解：设 $a=1998$

则 $P=\frac{a}{a+1}-\frac{a-1}{a}=\frac{1}{a(a+1)}$

$Q=\frac{a-1}{a}-\frac{a-2}{a-1}=\frac{1}{a(a-1)}$，$R=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a(a+1)}$

显然，$P=R<Q$，故选 D.

例 2 计算$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}$.

分析：将分母变形，$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$，…，$\frac{1}{42}=\frac{1}{6\times 7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$

解：
$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}-\frac{1}{4\times 5}-\frac{1}{5\times 6}-\frac{1}{6\times 7}\\
&=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)\\
&=\frac{1}{7}
\end{aligned}$$

例 3 求和 $2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$.

分析：用错位相减求和，设原式$=S$，求得 $2S$，则 $2S-S$ 即所求.

解：设 $S=2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}+2^{100}$

则 $2S=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{100}+2^{101}$

所以 $2S-S=2^{101}-2$

所以 $S=2^{101}-2$

例 4 已知$\frac{\sqrt{x-3y}+|x^2-9|}{(x+3)^2}=0$，求 $x:y$.

分析：本题主要考查算术平方根及绝对值的非负性，即

$\sqrt{x-3y}\geqslant 0$，$|x^2-9|\geqslant 0$.

解：由条件得 $\sqrt{x-3y}+|x^2-9|=0$. 根据非负数的性质，若干个非负数之和为零，则每个非负数必为零，x,y 满足

$$\begin{cases}\sqrt{x-3y}=0\\|x^2-9|=0\\(x+3)^2\neq 0\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x-3y=0\\x=\pm 3\\x+3\neq 0\end{cases}$$

解之得
$$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$$

所以
$$x:y=3:1$$

例 5 如果 $\sqrt[3]{-2}$ 是 a 的立方根，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是 b 的一个平方根，那么 $a^{10}\times(-b)^9$ 等于（　　）.

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

分析：本题主要考查了平方根、立方根及幂的运算性质，解答中要从题目条件入手，根据平方根、立方根的定义得到解题的途径.

解：因为 $\sqrt[3]{-2}$ 是 a 的立方根，所以 $(\sqrt[3]{-2})^3=a$，即 $a=-2$. 又因为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是 b 的一个平方根，所以 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=b$.

即
$$b=\frac{1}{2}$$

所以
$$a^{10}(-b)^9=(-2)^{10}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-2^{10}\times 2^{-9}=-2$$

故选 B.

例 6 已知实数 x,y 满足等式 $(x-y-2-\sqrt{x+y})^2+2(x-\sqrt{x^2-y^2})=0$，求 x,y 的值.

分析：所给等式是关于未知数 x,y 的二元方程，一般情况下要确定两个未知数的值，需要两个方程，因此，只要把已知的一个方程化为两个方程，x,y 的值便可求得，把已知等式左边化为两个非负数之和即可.

解：根据算术平方根的非负性可知，

$$\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ x^2-y^2\geqslant 0 \end{cases}$$

所以 $x-y\geqslant 0$ 也成立.

$$\begin{aligned} 2(x-\sqrt{x^2-y^2}) &= (x+y)+(x-y)-2\sqrt{x^2-y^2} \\ &= (\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2 \end{aligned}$$

已知等式化为

$$(x-y-2-\sqrt{x+y})^2+(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2=0$$

所以

$$\begin{cases} x-y-2-\sqrt{x+y}=0 & (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=0 & (2) \end{cases}$$

由(2)得　$\sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}$

两边平方，得　$x+y=x-y$，所以　$y=0$

把 $y=0$ 代入(1)得

$$x-2=\sqrt{x} \qquad (3)$$

平方整理得　$x^2-5x+4=0$

解之得　$x_1=4$，$x_2=1$（不合题意，舍去）

所以　$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$　检验知符合题意.

故满足等式的 x,y 的值为 $x=4$，$y=0$.

说明：应用非负数的性质："几个非负数之和为零，则这几个非负数均为零."可以把一个等式化为几个等式，从而增加求解的条件.

练 习 题 一

一、选择题(给出的四个选项中只有一项是正确的,请将正确答案的代号填在题后括号内)

1. 下列结论中不正确的是(　　).

A. 小于-1的有理数比它的倒数小

B. 非负数的相反数不一定比它本身小

C. 小于0的有理数的二次幂大于原数

D. 小于0的有理数的立方小于原数

2. 若$a=-b$,$a\neq 0$,n是自然数,则下面结论中正确的是(　　).

A. a^{2n}和b^{2n}互为相反数

B. a^n和b^n互为相反数

C. a^{n+1}和b^{n+1}互为相反数

D. a^{2n+1}和b^{2n+1}互为相反数

3. 下列结论:①$m^2(m\neq 0)$的正的平方根是m,负的平方根是$-m$;②a是$(-a)^2$的平方根;③一个正数的两个平方根的绝对值相等;④$\sqrt{a^2}=\pm a(a\neq 0)$.其中正确的个数是(　　)个.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

4. 当$0<a<1$,且$b=\sqrt{a}$时,a与b的大小关系为(　　).

A. $a>b$　　B. $a<b$

C. $a=b$　　D. 不能确定

5. $(a-b-3)(a-b+3)+9$的算术平方根是(　　).

A. $a-b$　　B. $b-a$

C. $|a-b|$　　D. 不能确定

6. 如果 1968.626 是用四舍五入方法得到的实数 r 的近似值，那么 r 的取值范围是(　　).

A. $1968.6255 \leqslant r < 1968.6265$

B. $1968.6255 < r \leqslant 1968.6264$

C. $1968.6255 \leqslant r \leqslant 1968.6264$

D. $1968.6256 \leqslant r < 1968.6265$

二、填空题

7. 已知 $a<b$ 且 $\frac{a}{b}>0$，则 $|a|-|b|+|a+b|+|ab|$ 等于________.

8. 一个点从数轴原点开始移动，先向左移动一个单位，再向右移动两个单位，又向左移动三个单位，再向右移动四个单位……这样继续左右移动，每次递增一个单位，总共移动 1999 次，结果这个点在数轴上表示的数是______.

9. 若 $a=\frac{19951995}{19961996}$，$b=\frac{19961996}{19971997}$，$c=\frac{19971997}{19981998}$，则 a,b,c 按从小到大的顺序排列为__________.

10. 若 $\sqrt{14.54}=3.813$，$\sqrt{x}=0.3813$，$1.689^3=4.82$，$\sqrt[3]{y}=168.9$，则 $x+y=$________.

三、解答题

11. 一串数 $\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{3}{3},\cdots$

试问：(1) $\frac{1}{15}$ 是第几个数？

(2)其中第 1993 个分数是多少？

12. 用简便方法计算：

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+\frac{1}{45}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com