

民國二十一年出版

初級中學教員及學生用

初中三角指導書

編輯者 王剛森

上海世界書局印行

初中三角術指導書

第一章 角的測法

§1. 總論 三角術的英文原文“Trigonometry”一字，是從希臘文二字蛻化而來，一意“三角形”（Trigon），一意“量法”（Metrein），是研究三角形內角度與邊的關係之一種學科，為學習測量學，工程學，力學，大地測量，和天文學等的基本科學，三角術分為二種：研究平面三角形內角度與邊的關係者，叫做平面三角術（Plane trigonometry）；研究球面三角形內角度與邊的關係者，叫做球面三角術（Spherical trigonometry）。

三角術的起源甚早，大概在古代阿拉伯及埃及已有研究者，不過那時所討論的範圍，只限於某種特殊的三角形，有時又和幾何學混淆不清，到了十六七世紀以後，三角術的定理和公式，發見日多，始漸專門而成獨立之學科。現在的平面三角術之領域，更形擴張，不僅限於討論平面三角形內角度與邊的關係之嚴密，和計算應用時之便利，尤其於原理方面，有不少的貢獻，為習高等數理的進階；所以現在成為中等學生必須學習的一種學科。本書所論的範圍，只限於平面三角術，至於球面三角術則其應用較狹，而理論亦簡，將來如志願學習天文，航海，大地測量等科，則於高中修業時，皆有球面三角術選課，可供選擇。

在學習平面三角術以前，對於算術、代數、幾何三種學科，必需先能澈底了解，因為在平面三角術內，數字的計算，方程式的運用，直界形和圓的性質，都要用着的。學習的時候，須預備簡單作圖器一副，至少須有直尺、圓規、量度器三種，和對數表一冊。本書附有四位小數之三角函數表、對數表和三角函數對數表多頁；但是最好能預備本局出版著者所譯之溫施二氏對數表一冊，則計算時可得較精密之結果。

§2. 測角的單位 長度的計量單位，因各國度制之不同，而有各種單位如尺、呎、公尺等，在研究三角術以前，必先定量角的單位。角的單位，一樣也有不同的三種：一為六十分制 (Sexagesimal system)，為現在各國實用測量時所用的單位制，故又稱常用制 (Common system)；二為百分制 (Centesimal system)，為十八世紀末年法國所擬定者，故又稱法國制 (French system)，惟不甚通用；三為弧度制 (Circular system)，為研究理論和高等算學中所應用的單位。

§3. 六十分制 幾何學內常以四分之一圓弧所立之圓心角定為角之單位，謂之直角；但是用直角做單位，不能測量微小的角度，所以三角術內以一直角之九十分之一做量角的單位，謂之度 (Degree)；每度分為六十分 (Minute)；每分分為六十秒 (Second)。其符號為 $^{\circ}$, $'$, $''$ ，書於數字之右上角。

例如：五度三十七分三十秒則可書為 $5^{\circ}37'30''$ 。

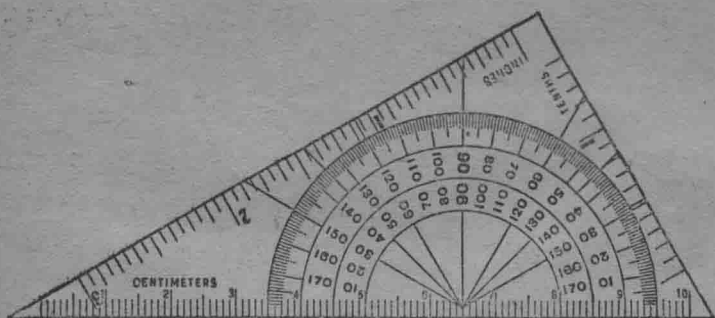
六十分制之歷史甚早，古代巴比倫之天文學家以三百

六十日爲一年，所以把圓周三百六十分之一的弧，做爲單位，即今之一度，並且在古代十進小數法還沒有發明應用，所有的分數，都用六十分之一，三千六百分之一，……等作爲小數，如 $1\frac{7}{15}$ 在當時寫作 $1.28'$ 即 $1\frac{28}{60}$ ， 1.51 寫作 $1^{\circ}30'36''$ 即 $1\frac{30}{60} + \frac{36}{3600}$ 。自十進小數法通行後，上面的記數法，已漸漸廢棄不用，惟量角和量時，則因習慣的關係，至今仍沿用之。

自十七世紀開始時，十進位法漸代六十進位法，因爲在計算上要便利得多，現在角之量法亦漸有改成十進小數法之趨勢，角之分秒部分化成角之小數，書坊出版之三角表，亦漸有用十進小數者，例如 $12^{\circ}15'36''$ 可改成 12.26° 。不過新的方法現在還不甚通用，將來或可漸漸推廣，以代舊制，度分秒化爲度數和小數，或度數和小數化爲度分秒，只須應用算術之諸等化法，在溫施二氏對數表內有度分秒與度數和小數之互化表，檢查即得。

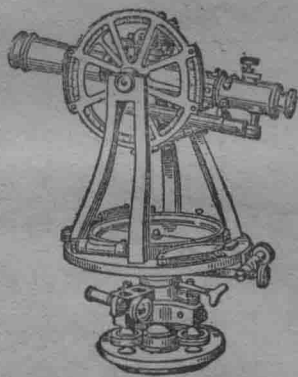
在十八世紀末年，法國的權量衡制漸興，曾擬以一直角之百分之一爲單位，稱爲法度 (Grade)，每法度分爲一百法分 (Minute)，每法分分爲一百法秒，以 $g, ', ''$ 記之。例如五法度三十七法分三十法秒則可書爲 $5^g37'30''$ 。所以百分制又稱爲法國制，而常用制又稱爲英國制，但法國制現在不甚通用。

量圖形上的角度，或作一相當之角度，須用量角器 (Protractor)，量角器可量至 $30'$ 。其形狀爲金屬或透明角質所製成半圓或三角形而刻有度數者，如下圖：



野外測量時所用之量角器爲經緯儀 (Transit)，可量至一分的角度，如右圖。經緯儀上的望遠鏡，可向水平方向左右移動，而於水平盤上觀察其角度；又可向垂直方向上下移動，而於垂直圓輪上觀察仰角及俯角之角度。

天文測量時所量之角，須比普通測量爲精密，大概須量出秒數，故所用之經緯儀須更精細，而其水平盤及垂直圓輪亦較大。



§4. 半徑角 上述的常用制及法國制兩種量角的方法，都屬任意選定以便實用，而非自然的方法，所以不適於理論的研究。今於一圓的本身取其半徑，量弧之長，使弧長與其半徑相等之弧所立之圓心角，作角之單位謂之半徑角 (Radian)。在討論半徑角以前，須先解釋下面幾條幾何命題。

§5. 圓周率 平面幾何學內，證明任意圓周與其直徑

之長，其比值爲一常數，但此常數，爲一不盡數，不能用一有理分數表之，不過可以算出任意位數之近似值，其值約等於 $\frac{22}{7}$ ，如須較精密，則約等於 $\frac{355}{113}$ ，如以小數寫至八位則爲 3.14159265……此值謂之圓周率，用希臘字母 π (π) 表之，即 $\pi = 3.14159\cdots$ 。⑤

§6 圓周、半徑和 π 的關係 由上節知圓周與其直徑之比值爲一常數，即等於 π ，故已知圓周之長，即可求其半徑；或已知半徑之長，即可求其圓周以公式表之：

設 圓周 $= C$, 半徑 $= r$,

則 直徑 $= 2r$,

$$\frac{\text{圓周}}{\text{直徑}} = \frac{C}{2r} = \pi,$$

$$\underline{\underline{C = 2\pi r,}}$$

$$\underline{\underline{r = \frac{C}{2\pi}.}}$$

§7. 半徑角爲不變角 第 4 節所論之半徑角，不論其圓之半徑如何大小，常爲一定不變之角度，其證明如下：

設以 O 爲圓心，以任意之半徑 OA 作圓，自 A 點取 $\widehat{AB}$ 弧，使等於 $\overline{OA}$ 之長，則依第 4 節， $\angle AOB$ 爲一半徑角，依幾何學定理：

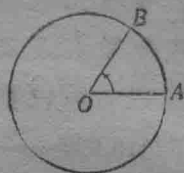
$$\frac{\angle AOB}{\text{四直角}} = \frac{\widehat{AB}}{\text{圓周}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}.$$

⑤ 我國古代常以徑一周三表明圓周率之值，三國魏時劉徽算出圓周率之值約等於 $\frac{177}{50}$ ，謂之徽率，南朝宋時祖冲之算出圓周率之約率爲 $\frac{22}{7}$ ，密率爲 $\frac{355}{113}$ ，現代英人 (Shanks) 曾算到 707 位。

即 $\angle AOB = \frac{\text{四直角}}{2\pi} = \frac{2\angle R}{\pi}$.

但 $\frac{2\angle R}{\pi}$ 爲一常數，故半徑角爲

一不變的角。



§8 弧度制 半徑角既爲不變角，所以也可以用來作量角的單位，稱爲弧度制，又名圓量法 (Circular measure)，因爲弧度制是自然的方法，所以在理論和高等算學中都用之。

§9. 六十分制與弧度制的關係 既知圓周爲半徑之 2π 倍，故一圓周所含之半徑角數爲 2π 半徑角，而一圓周所含之度數爲 360°

故 2π 半徑角 $= 360^\circ$ ，而 π 半徑角 $= 180^\circ$ 。

即 $1 \text{ 半徑角} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.29578^\circ = 57^\circ 17' 45''$,

$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} \text{ 半徑角} = 0.017453 \text{ 半徑角}.$

從上式得六十分制與弧度制的互化方法如下：

1. 化半徑角爲度數，則以 $57^\circ 17' 45''$ 或 57.29578° 乘其半徑角數即得。

2. 化度爲半徑角數，則以 0.017453 乘其度數即得。

因圓周所含之半徑角數爲 2π 半徑角，約等於 6.28318 …… 半徑角，爲一不盡小數，在記憶及應用時都感不便，故事實上只要記好下列各式的關係：

$$360^\circ = 2\pi \text{ 半徑角}, \quad 60^\circ = \frac{1}{3}\pi \text{ 半徑角},$$

$$180^\circ = \pi \text{ 半徑角}, \quad 30^\circ = \frac{1}{6}\pi \text{ 半徑角},$$

$$90^\circ = \frac{1}{2} \pi \text{ 半徑角}, \quad 15^\circ = \frac{1}{12} \pi \text{ 半徑角},$$

$$45^\circ = \frac{1}{4} \pi \text{ 半徑角}, \quad 22.5^\circ = \frac{1}{8} \pi \text{ 半徑角}$$

以上諸式，學者必需熟記，須能一索即得，不必另行推算。●

例題 1. 化 $82^\circ 40'$ 爲半徑角。

〔解〕 $82^\circ 40' = 82\frac{2}{3}^\circ$ 而 $1^\circ = \frac{\pi}{185}$ 半徑角 $= 0.01745$
半徑角

$$\begin{aligned} \therefore 82^\circ 40' &= 82\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{180} = \frac{62\pi}{135} \text{ 半徑角} \\ &= 82\frac{2}{3} \times 0.01745 = 1.4428\cdots \text{ 半徑角} \end{aligned}$$

例題 2. 化 $\frac{5}{24} \pi$ 半徑角爲度。

〔解〕 因 $1 \text{ 半徑角} = \frac{180^\circ}{\pi}$

$$\therefore \frac{5}{24} \pi \text{ 半徑角} = \frac{5}{24} \pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$$

例題 3. 化 1.5 半徑角爲度。

〔解〕 因 $1.5 \text{ 半徑} = 57^\circ 17' 45''$

$$\therefore 1.5 \text{ 半徑角} = 1.5 \times 57^\circ 17' 45'' = 85^\circ 56' 37''$$

習 題

● 六十分制，百分制，弧度制，相互之關係，可以下式表之。

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2C}{\pi}$$

D 表度數， G 表法度數， C 表半徑角數，

1. 把下列度數化成半徑角:

18° , 105° , $57^\circ 30'$, $73^\circ 20'$, 7.5° , 11.25° , 158° , 200° .

[略解] 以上各數以 $\frac{\pi}{180}$ 或 0.017453 乘之即得半徑角數惟題中含有分者須先化為度之小數或分數.

2. 把下列半徑角化成度數:

$\frac{3\pi}{4}$ 半徑角, $\frac{7\pi}{45}$ 半徑角, $\frac{5\pi}{27}$ 半徑角,

$1\frac{1}{2}\pi$ 半徑角, 3π 半徑角, 10π 半徑角.

[略解] 以上各數以 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 乘之, 即得所求之度數.

3. 地球半徑約為 4000 英里, 今有同在赤道上的兩地, 其經差為 $31^\circ 45'$, 問兩地相距若干英里?

[詳解] 地球半徑 = 4000 英里,

故赤道周圍 = $2\pi \times 4000 = 8000\pi$ 英里,

設 x 為所求之距離, 依比例法得

$$360^\circ : 31^\circ 45' = 8000\pi : x$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{31^\circ 45' \times 8000\pi}{360} = \frac{31\frac{3}{4} \times 8000 \times 3.1416}{360} \\ &= \frac{127 \times 2000 \times 3.1416}{360} \\ &= \frac{127 \times 50 \times 3.1416}{9} \\ &= 2216 \text{ 英里強.} \end{aligned}$$

4. 若一車輪於一秒鐘時旋轉十二次, 則其轉一半徑角時需時若干? 又如此輪之半徑為十英寸, 則此車每小

時行幾英里？

〔詳解〕 一半徑角爲一周之 $\frac{1}{2\pi}$ 倍，

$$\begin{aligned}\text{故轉一半徑角所需時間} &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{7}{528} \text{ 秒.}\end{aligned}$$

又輪之周圍 $= 2\pi \times 10 = 20\pi$ 英寸，

車每秒行 $20\pi \times 12 = 240\pi$ 英寸，

車每小時行 $240\pi \times 3600$ 英寸 $= 240\pi \times 300$ 英尺，

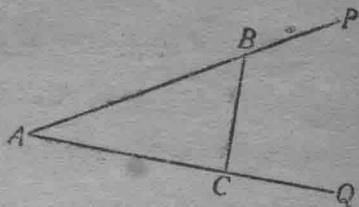
$$= \frac{240 \times 3.1416 \times 300}{5180} \text{ 英里}$$

$$= \underline{\underline{43.67 \text{ 英里.}}}$$

第二章 銳角的三角函數

§10 三角函數 設 $\angle PAQ$ 為任意之銳角，

於 AP 邊上取任意一點 B ，作 BC 線與 AQ 邊垂直，則成一直角三角形 ABC 。於其三邊中任取二邊作比，可得六比。



此六比對於 $\angle A$ 而言，則：

對邊與斜邊的比，叫做 $\angle A$ 的正弦 (Sine)，寫作 $\sin A$ ；

鄰邊與斜邊的比，叫做 $\angle A$ 的餘弦 (Cosine)，寫作 $\cos A$ ；

對邊與鄰邊的比，叫做 $\angle A$ 的正切 (Tangent)，寫作 $\tan A$ ；

鄰邊與對邊的比，叫做 $\angle A$ 的餘切 (Cotangent)，寫作 $\cot A$ ；

斜邊與鄰邊的比，叫做 $\angle A$ 的正割 (Secant)，寫作 $\sec A$ ；

斜邊與對邊的比，叫做 $\angle A$ 的餘割 (Cosecant)，寫作 $\csc A$ ；

設以 a, b, c 表 $\angle A, \angle B, \angle C$ 三角對邊之長，則可以下式表之：

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c};$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c};$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b};$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a};$$

$$\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

又 1 減 $\angle A$ 的餘弦之值,叫做 $\angle A$ 的正矢(Versed sine),寫作 $\text{vers } A$;

1 減 $\angle A$ 的正弦之值,叫做 $\angle A$ 的餘矢(Coversed sine),寫作 $\text{covers } A$, 以式表之如下:

$$\text{vers } A = 1 - \cos A = 1 - \frac{b}{c} = \frac{c-b}{c},$$

$$\text{covers } A = 1 - \sin A = 1 - \frac{a}{c} = \frac{c-a}{c},$$

以上二函數現代算學書中極少用到,餘矢則用時更少。

上述之六比及正矢餘矢稱為三角函數 (Trigonometric functions) ⑤

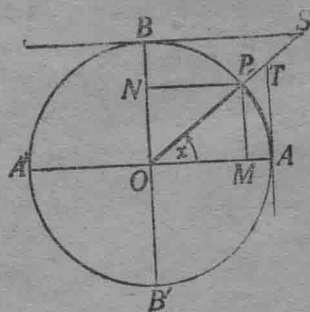
⑤ 從上述的定義知道三角函數為二線之比值但是以前三角函數都以直線表之,其方法如下,

如圖,以 O 為圓心,以 1 為半徑作圓,此圓稱為單位圓 (Unit circle),

作二垂直直徑 OA, OB , 二垂線 PM, PN , 和二切線 AT, BS , 如圖

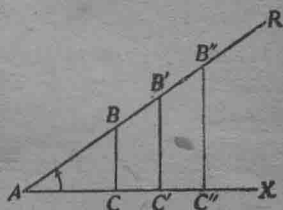
則 $OA = OP = OB = 1$,

由三角函數的定義,得



§11. 三角函數和邊長 設 AR 線自 AX 之位置依矢向轉至 AR 之位置時,成一銳角 A .

於 AR 線上取任意諸點 $B, B', B'', \dots$ 作 AX 之垂線 $BC, B'C', B''C'', \dots$, 成 $ACB, AC'B', AC''B'', \dots$ 諸相似三角形,依幾何定理知:



$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} \dots;$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'} = \frac{B''C''}{AC''} \dots;$$

其餘各比亦同.

$$\text{但 } \frac{BC}{AB} = \sin A; \quad \frac{BC}{AC} = \tan A;$$

.....

故 $\angle A$ 之三角函數,如 $\angle A$ 爲定角時,不依所作直角三角形之大小而變,惟 $\angle A$ 變化時,則 $\angle A$ 之三角函數的值,亦依之而變三角函數之名,即由此而得.e

$$\sin x = \frac{MP}{OP} = MP,$$

$$\cos x = \frac{OM}{OP} = OM,$$

$$\tan x = \frac{AT}{OT} = AT,$$

$$\cot x = \frac{BS}{OB} = BS,$$

$$\sec x = \frac{OT}{OA} = OT,$$

$$\csc x = \frac{OS}{OB} = OS,$$

$$\text{vers } x = 1 - OM = MA,$$

$$\text{covers } x = 1 - MP = NB$$

正弦,正切,正割之意義,由此得來,而我國舊稱三角術爲八線術,亦從此得名.

§12 函數值的極限 直角三角形三邊中以斜邊為最長，所以以斜邊為分母的三角函數，其值必不能大於 1；即一角的正弦和餘弦，其值不能大於 1，以 1 為其最大之極限。

以斜邊為分子的三角函數，其值必不能小於 1；即一角的正割和餘割，其值不能小於 1 以 1 為其最小之極限。

又對邊與鄰邊之相互長短不定，須視其銳角之大小而定，所以

一角的正切和餘切其值可為任意數。

在討論各角度之三角函數值以前，可用作圖法求出任意銳角的三角函數之近似值；或已知三角函數的值，而求其相當各度的近似值。

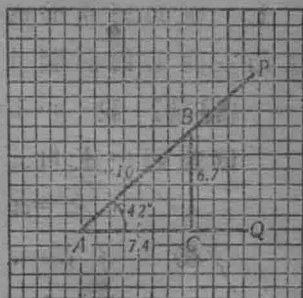
例題 1. 畫 42° 的角，求其正弦及餘弦的值。

用量角器作 $\angle PAQ$ ，使等於 42° ，又在 AP 邊上取 $AB=10$ ，自 B 點作 AQ 的垂線 BC ，量 BC 之長約得 6.7 量 AC 之長約得 7.4。

⊙ 算學中一值之大小，係他值而變化者，則此值謂之他值的函數，例如 $y=x^2+3x+2$ ， x 變化時， y 亦依之而相當變化，故 y 為 x 的函數，函數的記號，以 $f(x)$ ， $F(x)$ ， $\phi(x)$ ，等表之。

直角三角形任意二邊之比值，依其所含之 A 角而變，所以上述之六比相為 $\angle A$ 之函數，因其應用甚繁，所以另用 $\sin A$ ， $\cos A$ ，……等專有函數記號表之。

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin 42^\circ &= \frac{BC}{AB} \\
 &= \frac{6.7}{10} \\
 &= 0.67 \\
 \cos 42^\circ &= \frac{AC}{AB} \\
 &= \frac{7.4}{10} \\
 &= 0.74
 \end{aligned}$$



例題 2 作正切等於 0.96 的角。

〔解〕 因 $0.96 = \frac{9.6}{10}$,

作水平線 AB , 使 $AB = 10$

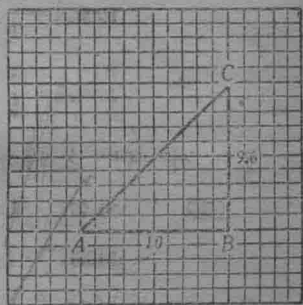
自 B 作 BC 垂直於 AB ,
使 $BC = 9.6$

連結 AC , 則 $\angle CAB$ 即為
所求之角。

$$\text{因 } \tan CAB = \frac{BC}{AB}$$

$$= \frac{9.6}{10} = 0.96$$

用量角器量之得 $\angle CAB = 44^\circ$ 強。●



習 題

● 用作圖法作厘,最好用方格紙,如上二圖則可免去用尺計量之勞,如不用方格紙則作三角函數分母之線須為一單位長或十單位長,如是則免可去計算他邊長度之繁。

1. 直角三角形的斜邊的長爲15寸,一腰的長爲9寸
求此三角形的一腰及對此腰的銳角的三角函數.

[詳解] 設 $c=15$ 寸, $b=9$ 寸,

依幾何中直角三角形三邊的定理:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

得

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 9^2}$$

$$= \sqrt{144} = 12 \text{寸};$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \quad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}; \quad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}; \quad \csc A = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

2. 作 87° 之角,求其餘弦,餘割的值.

[答] $\cos 87^\circ = 0.05;$

$\csc 87^\circ = 1.00.$

3. 依下列已知的條件作角,并且用量角器量其近似的度數.

(1) $\tan A = 0.6$ (2) $\sin B = 0.87$

(3) $\cos C = 0.7$

[答] $\angle A = 31^\circ; \quad \angle B = 60.5^\circ; \quad \angle C = 44.5^\circ.$

4. 依下列的條件,作直角三角形 ABC ,求 c 及 $\angle A$ 的值:

$\tan A = 0.7, \quad \angle C = 90^\circ, \quad b = 2.8 \text{cm}.$

[詳解] 作 $AB = 2.8 \text{ m}$, 自 B 點作 AB 之垂線 AC , 使