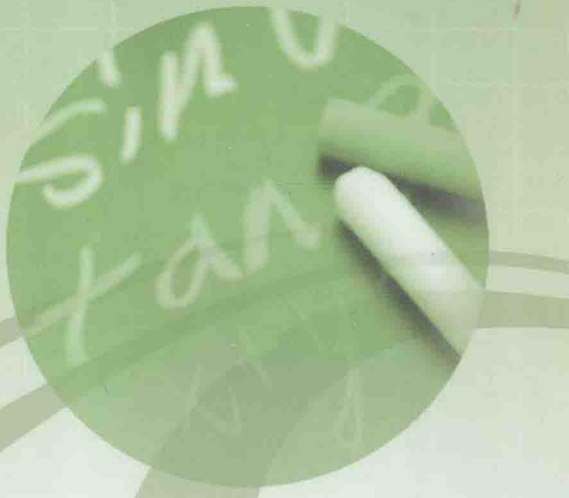
全国高职高专“十二五”规划教材

应用高等数学教程

能力提升篇

主　编　杨　勇　黄庆波
副主编　吴白旺　吴　杰　褚丽娜
主　审　唐艺川



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

全国高职高专“十二五”规划教材

应用高等数学教程

（能力提升篇）

主　编　杨　勇　黄庆波

副主编　吴白旺　吴　杰　褚丽娜

主　审　唐艺川

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书特点：①强化大纲要求，“基础题”侧重对知识点的涵盖、对基础知识和基本技能的考察、对重点知识的强调，旨在夯实基础，提高基本技能；②“提高题”注重综合能力和创新能力的培养，将研究性学习与学科教学活动结合起来，为学生营造探究、体验、创造的开放性平台，激励主动式学习，培养学生的创造性思维；③选题广泛、典型、新颖，注重解题技巧；④“自测题”有助于学生及时检测学习效果，更好地理解所学知识；⑤所有练习题均有参考答案；⑥本书包含了专科升本科所用知识点，是专升本学生的一本很好的指导书。

本书的编写融入了教师多年的教学经验，相信它能对进一步提高高等数学的教学质量，帮助学生较好地理解抽象的数学概念，提高运用数学思维和技巧的能力起到重要的作用。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学教程. 能力提升篇 / 杨勇，黄庆波主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2013.7
全国高职高专“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-1032-6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①杨… ②黄… Ⅲ. ①高等学校一高等职业教育一教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第156856号

策划编辑：寇文杰　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李　佳

书　　名	全国高职高专“十二五”规划教材 **应用高等数学教程（能力提升篇）**
作　　者	主　编　杨　勇　黄庆波 副主编　吴白旺　吴　杰　褚丽娜 主　审　唐艺川
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	三河市鑫金马印装有限公司
规　　格	184mm×240mm　16开本　19.75印张　462千字
版　　次	2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	35.00元

目　　录

第 1 章　函数的极限和连续性

一、学习要点

- 理解函数的概念及基本性质.
- 了解初等函数、基本初等函数的概念.
- 了解复合函数的概念，掌握复合函数的分解.
- 理解极限的概念，了解函数在一点处极限存在的充要条件.
- 了解极限的有关性质，掌握极限的四则运算法则.
- 掌握无穷小量的性质、无穷小量和无穷大量的关系.
- 掌握用等价无穷小代换求极限定理.
- 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.
- 掌握判断函数（特别是分段函数）在一点处的连续性的方法.
- 会求函数的间断点并确定其类型.
- 理解初等函数在其定义域上的连续性，会利用连续性求极限.
- 掌握在闭区间上连续函数的性质，会用介值定理推证一些简单命题.

二、相关知识总结

1. 函数的概念.
2. 函数的性质：单调性、奇偶性、周期性、有界性.
3. 基本初等函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.
4. 复合函数分解成简单函数：采用由外到内的方法逐个分解.
5. 函数极限的求法和运算法则：假定 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 存在（x 是同一种趋向），则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim cf(x)=c\lim f(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad（假定 \lim g(x)\neq 0）$$

6. 应用两个重要公式：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e} 和 \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

当$n>N$时，就有$\left|\underbrace{0.999\cdots9}_{n}-1\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n}=1$.

（3）因为$x\to-\dfrac{1}{2}$，$x\neq-\dfrac{1}{2}$

$\forall\varepsilon>0$，为使$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$，只需$\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<\left|x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|<\delta$时，就有$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

（4）因为$x\to-\infty$，所以$x<0$. 又$\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{1}{-x}$，为使$\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}-0\right|<\varepsilon$，只需$x<-\dfrac{1}{\varepsilon}$. 所以$\forall\varepsilon>0$，取$X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当$x<-X$时，就有$\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

7．设$f(x)=x^2$，求$\lim\limits_{x\to2}f(x)$，并证明当$|x-2|<\delta$时$f(x)$与其极限之差的绝对值小于ε. 当$\varepsilon=0.001$时，求出δ.

解 $\lim\limits_{x\to2}x^2=4$. 我们给出如下证明：

$\forall\varepsilon>0$，由于$x\to2$，不妨设$1<x<3$.

为使$|f(x)-4|=|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|\leqslant5|x-2|<\varepsilon$，只需$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$. 取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，则当$|x-2|<\delta$时，就有$|f(x)-4|<\varepsilon$.

当$\varepsilon=0.001$时，取$\delta=0.0002$，此时只要$|x-2|<0.0002$，就有$|f(x)-4|<0.001$.

8．证明函数$f(x)=|x|$当$x\to0$时极限为零.

证 $\forall\varepsilon>0$，为使$|f(x)-0|=||x|-0|=|x|=|x-0|<\varepsilon$，只需取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，则当$|x-0|<\delta$时，就有$||x|-0|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

9．求$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to0$时的左、右极限，并说明它们的极限是存在的.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$. 由$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$知$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-1=-1$. 由$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=1$知$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在.

10．根据定义证明：

（1）$y=(x-1)\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小；

（2）$y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大，问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$.

证　（1）$\forall\varepsilon>0$，为使 $|y-0|=\left|(x-1)\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}-0\right|=\left|(x-1)\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}\right|\leqslant|x-1|<\varepsilon$，只需取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有 $\left|(x-1)\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}-0\right|<\varepsilon$，即 $y=(x-1)\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

（2）$\forall M>0$，为使 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+2\right|\geqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|-2>M$，只要 $\left|\dfrac{1}{x}\right|-2>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M+2}$.

因此，取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>M$，故 $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷大.

当 $M=10^4$，取 $\delta=\dfrac{1}{M+2}=\dfrac{1}{10^4+2}$ 时，就能使 $|y|=\left|\dfrac{1+2x}{x}\right|>10^4$.

11．求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$ 并说明理由.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

理由：令 $f(x)=2+\alpha$，其中 $\alpha=\dfrac{1}{x}$. 因为 $x\to\infty$ 时，x 是无穷大，由无穷大与无穷小的关系知 $\alpha=\dfrac{1}{x}$ 为无穷小. 再由无穷小与极限的关系得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

12．　计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+8}{x^4-3x+1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$；

（5）$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{12}{8-x^3}-\dfrac{1}{2-x}\right)$；　　（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\cdots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

解　（1）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

（2）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+8}{x^4-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{8}{x^4}}{1-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=0$.

（4）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=\infty$.

（5）$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{12}{8-x^3}-\dfrac{1}{2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{12-2x-x^2}{8-x^3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)(4+x)}{(2-x)(4+2x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4+x}{4+2x+x^2}=\frac{1}{2}.$$

（6）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[(n-1)x+\dfrac{a}{n}(1+2+\cdots+(n-1))\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]=x+\frac{a}{2}.$$

13．利用有界变量与无穷小之积仍为无穷小计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解　（1）因为 $x\to 0$，所以 $x^2\to 0$，$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=0$.

（2）因为 $x\to\infty$，所以 $\dfrac{1}{x}\to 0$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x=0$.

14．利用两个重要极限计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}$　$(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x-1)}{x^2+x-2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{\sin^2 3x}$；　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\dfrac{\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x-1)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 6x\sin x}{\sin^2 3x}$

$$=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{(3x)^2}{\sin^2 3x}\frac{6x\cdot x}{(3x)^2}\right)=-\frac{4}{3}.$$

（4） $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right) = x$.

（5） $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{(-3x)\cdot\frac{1}{2x}} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

（6） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = \mathrm{e}^2$.

15．当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\pi(1-x)$ 和（1） $1-x^3$，（2） $\sin\pi x$ 是否同阶？是否等价？

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi(1-x)}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi}{1+x+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$，所以当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\pi(1-x)$ 和 $1-x^3$ 同阶，但不等价.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\pi(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\sin\pi(x-1)}{\pi(1-x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)} = 1$，所以当 $x\to 0$ 时，无穷小 $\pi(1-x)$ 和 $\sin\pi x$ 是等价的.

16．利用等价无穷小的性质求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$ （n，m 为正整数）；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x}$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解　（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0 & n>m, \\ 1 & n=m, \\ \infty & n<m. \end{cases}$

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec x}{\sin^2 x}$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec x}{-\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right] = 1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\sec x)}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\sim\frac{1}{2}\right).$$

17．讨论下列函数的连续性：

（1）$f(x)=x(1+|x-1|)$；　　（2）$f(x)=\begin{cases}x & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x<-1\text{或}x>1\end{cases}$.

解　（1）$f(x)=\begin{cases}2x-x^2 & x<1\\ x & x=1\\ x^2 & x>1\end{cases}$

当 $x<1$ 或 $x>1$ 时，$f(x)$ 为初等连续函数，所以连续；当 $x=1$ 时，有

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1=f(1),\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-x^2)=1=f(1),$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续函数，故 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

（2）显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续．而在 $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

但

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}1=1$$

即

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)\neq\lim_{x\to -1^-}f(x)$$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 间断.

18．试确定 a，b，使函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x+a & x<0\\ b & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续

解　显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内连续．而在分断点 $x=0$ 处，由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\sin x+a\right)=1+a$$

根据

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$$

得
$$1+a=0=b$$
即
$$a=-1,\ b=0$$

19．求下列函数的间断点，并确定其类型．如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续：

（1）$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \arctan\dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$；

（3）$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$．

解　（1）$f(x)$为分段函数，当$x\neq 0$时，$f(x)$显然连续．当$x=0$时，因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

所以$x=0$是$f(x)$的第一类间断点（跳跃间断点）．

（2）$f(x)$的无定义点为

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\text{和}x=k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

对$x=0$，因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，所以$x=0$是$f(x)$的第一类间断点，且为可去间断点，重新定义函数：

$$f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\tan x} & x\neq k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

则$f_1(x)$在$x=0$处连续．

对$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，因为$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，所以$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\ \pm2,\cdots)$是$f(x)$的第一类间断点，且为可去间断点，重新定义函数：

$$f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\tan x} & x\neq k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

则$f_2(x)$在$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$处连续．

对 $x=k\pi$（$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$），$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$，所以 $x=k\pi$（$k=0, \pm1, \pm2, \cdots$）是 $f(x)$ 的第二类间断点（无穷间断点）.

（3）$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$ 为分段函数.

在分段点 $x=-1$ 处，因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(-x)=1,\quad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x=-1,\quad \lim_{x\to-1^-}f(x)\neq\lim_{x\to-1^+}f(x).$$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

在分段点 $x=1$ 处，因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(-x)=-1,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x).$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

20．求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

解 因为 $f(x)$ 在 $x_1=-3$，$x_2=2$ 点无意义，所以 $x_1=-3$，$x_2=2$ 这两个点为间断点．故函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,-3)$，$(-3,2)$，$(2,+\infty)$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to-3}f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to-3}\frac{(x^2-1)}{(x-2)}=-\frac{8}{5}.$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-1)}{(x-2)}=\infty.$$

21．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，证明函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 在点 x_0 处也连续.

证 因为

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|],$$

而连续函数的绝对值、和、差仍连续，故 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 在点 x_0 处也连续.

22．利用复合函数的极限与连续定理计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；（2）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{(x+a)}(x+b)^{(x+b)}}{(x+a+b)^{(2x+a+b)}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$．

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$．

（2）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}=\cos a$．

（3）
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

（4）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}\right)|x|}$，

而
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}\right)x}=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1}\right)(-x)}=-1$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$ 不存在．

（5）
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{(x+a)}(x+b)^{(x+b)}}{(x+a+b)^{(2x+a+b)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{(x+a)}}{(x+a+b)^{(x+a)}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+b)^{(x+b)}}{(x+a+b)^{(x+b)}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{(x+a)}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{(x+b)}}$$
$$=\frac{1}{e^b}\frac{1}{e^a}=e^{-(a+b)}.$$

（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sec x-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(\sec x-1)\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+1\right)=\frac{1}{2}.$$

23．证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一正根，并且它不越过 $a+b$．

证 令 $f(x)=x-a\sin x-b$．显然 $f(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，$f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a[1-\sin(a+b)]$．

当 $\sin(a+b)<1$ 时，$f(a+b)>0$．由零点定理知，存在 $\xi\in(0,a+b)$．使 $f(\xi)=0$，即 ξ 为原方程小于 $a+b$ 的正根.

当 $\sin(a+b)=1$ 时，$f(a+b)=0$，$a+b$ 为原方程的正根.

综上所述，方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一正根，并且它不越过 $a+b$．

24．设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x，y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$．证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$．

证 任取 $x_0\in(a,b)$，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{L},x_0-a,b-x_0\right\}$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，依假设有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|<L\delta\leqslant\varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 点连续．由 x_0 的任意性知，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

当 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，当 $0<x-a<\delta$ 或 $0<b-x<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(a)|\leqslant L|x-a|=L(x-a)<L\delta\leqslant\varepsilon$$

或

$$|f(x)-f(b)|\leqslant L|x-b|=L(b-x)<L\delta\leqslant\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 $x=a$ 右连续，$f(x)$ 在 $x=b$ 左连续，从而 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续．再借助 $f(a)\cdot f(b)<0$ 及零点定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$．

25．若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，C_1，C_2，…，C_n 为任意正数，(x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}$．

证 因 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，又 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续．设

$$M=\max\left\{f(x)\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_n\right\},\quad m=\min\left\{f(x)\,|\,x_1\leqslant x\leqslant x_n\right\}$$

则有

$$m\leqslant\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}\leqslant M$$

若上面的不等式为严格不等式，则由介值定理知，存在 $\xi\in(x_1,x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}$$

若上面的不等式中出现等号，如 $\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}=M$，则有 $C_1[M-f(x_1)]+C_2[M-f(x_2)]+\cdots+C_n[M-f(x_n)]=0$.

于是 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=M$．此时任取 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 中任一点为 ξ，即有 $\xi\in(x_1,x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}$$

同理可证 $\frac{C_1f(x_1)+C_2f(x_2)+\cdots+C_nf(x_n)}{C_1+C_2+\cdots+C_n}=m$ 的情形.

26．证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则给定 $\varepsilon=1>0$，可存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon=1$．从而 $|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+<1+|A|$.

由假设，显然 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上有界，即存在 K，使 $\forall x\in[-X,X]$，有 $|f(x)|\leqslant K$.

取 $M=\max\{K,|A|+1\}$，则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

（二）提高题

1．设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$.

解　因为当 $x\leqslant 0$ 时，$|g(x)|=\mathrm{e}^x\leqslant 1$；当 $x>0$ 时，$|g(x)|=\mathrm{e}^x>1$．所以

$$f(g(x))=\begin{cases}1 & x\leqslant 0\\ 0 & x>0\end{cases}.$$

2．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x^2+2x+3}-\sin\sqrt{x^2+2x}]$；

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sqrt{4n^2+1}\pi)$；

（7）$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；

（8）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$；

（9）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（10）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a；

（11）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n(n+1)}+\sqrt{2n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（2）当 $x\to\infty$ 时，有 $\sin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}$．因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\dfrac{2}{x}=\dfrac{6}{5}$.

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1}{x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}=-1$.

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{3}{2}$.

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x}}\cos\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+2x}}{2}=0\ .$$

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sqrt{4n^2+1}\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sqrt{4n^2+1}-2n)\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=1$.

（7）由于当 $x\to 0^+$ 时，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{x}{2}$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}.$$

（8）由于当 $x\to 1$ 时，$\mathrm{e}^{x\ln x}-1\sim x\ln x$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1.$$

（9）当 $x\to 0$ 时，有 $\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^{kx}-1\sim kx$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{(\mathrm{e}^x-1)+(\mathrm{e}^{2x}-1)+\cdots+(\mathrm{e}^{nx}-1)}{n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x+\cdots+nx}{nx}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{1}{2}(n+1).$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

（10）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$，所以 $8=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=e^{3a}$，故 $a=\ln 2$.

（11）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{\pi}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{(\cos\sqrt{x}-1)\pi}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

3．比较下列无穷小：

（1）当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的几阶无穷小？

（2）已知当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 是 $x-1$ 的等价无穷小，则 $\ln[1-f(x)+xf(x)]$ 是 $x-1$ 的几阶无穷小？

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x}{x^{\frac{1}{4}}}+\sqrt{\dfrac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\sqrt{1}}}=1.$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的 $\dfrac{1}{8}$ 阶无穷小.

（2）当 $x\to 1$ 时，$f(x)\sim x-1$，所以

$$\ln[1-f(x)+xf(x)]=\ln[1+(x-1)f(x)]\sim(x-1)f(x)\sim(x-1)^2$$

即当 $x\to 1$ 时，$\ln[1-f(x)+xf(x)]$ 是 $x-1$ 的二阶无穷小.

4．根据条件解答下列各题：

（1）当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^{\frac{1}{3}}\right)-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求 a；

（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$（$a,b$ 为常数），求 a,b；

（3）设 $f(x)=\dfrac{x^2-x-5}{x^2+2}-(kx+b)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，求 k 与 b 的值；

（4）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=3$（$a>0$，$a\neq 1$），求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$；

（5）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.