

► 高等学校水利类教材

环境水力学基础

槐文信 杨中华 曾玉红 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

► 高等学校水利类教材

环境水力学基础

槐文信 杨中华 曾玉红 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

环境水力学基础/槐文信,杨中华,曾玉红编著. —武汉:武汉大学出版社, 2014. 10

高等学校水利类教材

ISBN 978-7-307-12712-8

I. 环… II. ①槐… ②杨… ③曾… III. 环境水力学—高等学校—教材 IV. X52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 001980 号

责任编辑:谢文涛

责任校对:汪欣怡

版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:黄冈市新华印刷有限责任公司

开本:787×1092 1/16 印张:12.75 字数:298千字 插页:1

版次:2014年10月第1版 2014年10月第1次印刷

ISBN 978-7-307-12712-8 定价:28.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

随着社会发展和知识经济时代的到来,环境问题已经渗透到国际社会的政治、经济、贸易、文化等各个领域,同时也愈来愈威胁着人类的生存和发展。因此,环境保护和可持续发展是当今人类所面临的重要问题,也是中国的基本国策。只有当其基本思想和概念为人类作为“地球公民”都了解和掌握时,人类才能保护好环境,并保证自身的持续发展。

保护环境就是保护人类生存和发展所依赖的环境要素。因此,认识什么是环境、什么是环境污染、污染物在环境中的运移转化规律等,是解决环境问题的基础。因此,作为水利专业的工程技术人员和管理人员,必须接受环境保护的教育,学习环境保护的基础知识,确立环境意识,了解和掌握水环境和水生态的基础理论和环境治理等知识。

本书共分11章,第1章为《绪论》,主要介绍了环境水力学研究的对象和任务,环境水力学研究内容和方法;第2章至第4章以示踪物质在水体中的迁移方式为主线,从水动力学的角度详细论述了水环境的基本理论,涉及分子扩散理论、紊动扩散理论和剪切流的离散理论;第5章和第6章分别介绍了这些理论在河流、河口和海湾中的应用;第7章为射流和浮力射流的理论和应用;第8章给出了分层流的概念及其理论;第9章简要地介绍了地下水的溶质运移理论;第10章论述了地表水水质模型及其相应的数值解法,该部分理论在水质预测预报中应用的较为广泛;为了适应环境水力学向生态学的渗透,第11章对鱼道的研究和植被水流特性的研究进行归纳总结,这些成果大都是散见在最新的科技论文之中,并且得到学者认可的理论。

本书第1章至第7章由槐文信执笔,第8章、第9章及第11章的植被水流特性由曾玉红执笔,第10章地表水质模型及其模拟由宋星原和杨中华执笔,第11章的鱼道研究成果总结由杨中华执笔。

在本书的编写过程中,各编者根据自己多年的教学和实践经验,引用了许多国内外最新的文献资料,结合水利类专业特点编写而成。

在成书之际,特别向本书的写作给予关心和支持的水资源与水电工程科学国家重点实验室的领导和专家,向本书引用的参考文献的编著者表示感谢。

环境水力学是涉足环境领域的新问题,愿与同仁共同交流和探讨,促进这一领域的发展。

编 者

2013年7月于武汉

目 录

第1章 绪论	1
1.1 环境水力学的形成	1
1.2 环境水力学的近期发展及研究方法	2
1.3 环境水力学课程概况	3
参考文献	4
第2章 分子扩散	5
2.1 分子扩散方程	5
2.2 分子扩散方程的若干解析解	7
2.3 随流扩散	16
习题	20
参考文献	22
第3章 紊动扩散	23
3.1 基于拉格朗日观点的泰勒紊流扩散理论	23
3.2 基于欧拉法的紊流扩散方程	26
3.3 欧拉型紊动扩散方程的某些解答	28
习题	30
参考文献	30
第4章 剪切流动的离散	31
4.1 一维纵向离散方程	32
4.2 二维明渠均匀流的纵向离散	34
习题	36
参考文献	37
第5章 河流中的混合	38
5.1 河流中污水的混合过程	38
5.2 河流中的紊动扩散	38
5.3 河流中的离散系数	40

5.4 污染带的计算	49
习题	56
参考文献	57
第6章 河口中的混合	59
6.1 河口的分类	59
6.2 河口中混合的成因	61
6.3 河口的紊动扩散系数和纵向离散系数	65
6.4 污染物离散的一维分析	67
习题	69
参考文献	70
第7章 射流和浮力射流	71
7.1 静止均匀环境中的浮力射流	71
7.2 静止分层环境中的浮力射流	74
7.3 静止局部分层环境中的浮力射流	75
7.4 横流环境中的浮力射流	76
参考文献	81
第8章 分层流	82
8.1 概述	82
8.2 静止水体中的分层与稳定	83
8.3 明槽中的二层异重流	84
8.4 内波及内界面的稳定	90
8.5 水库密度分层流	93
习题	99
参考文献	102
第9章 地下水中的弥散	103
9.1 多孔介质中的物质混合	103
9.2 弥散模型与弥散方程	108
习题	112
参考文献	113
第10章 地表水水质模型及其模拟	114
10.1 水质模型的发展与分类	114
10.2 河流海湾水质模型	117
10.3 湖泊水库水质模型	140

10.4 富营养化模型.....	150
参考文献.....	163
第 11 章 生态水力学基础	165
11.1 鱼道.....	165
11.2 有植被明渠水流中的污染物混合输移.....	175
参考文献.....	194

第1章 绪 论

1.1 环境水力学的形成^[1,2]

环境水力学(Environmental Hydraulics)作为一个学科的名称在国外文献中出现,自泰勒(G.I.Taylor)在1921年提出水流的紊动扩散规律算起,至今也不过只有90余年。1979年美国水力学家费希尔(Hugo Breed Fisher)等人编著的《内陆及近海水域中的混合》一书中首先使用了这个学科名称。他们对环境水力学的研究内容给出了一个大致的范围,即包括流体中的各种输移过程、浮力射流和羽卷流、分层流和地球物理流体力学、跨学科的模拟等。1986年丹麦技术大学的博佩德森(Flemming Bo Pedersen)的《环境水力学》一书专门论述分层流的问题。我国学者最近也陆续出版了这方面的专著或教材。可以说,环境水力学是一门内容正在不断丰富、研究范围日益扩大的崭新的学科。它与传统的水力学的不同之处是它以水环境为主要研究对象,以流体力学理论为基础,研究各种异质或污染物在不同纳污水域(河流、渠道、水库、湖泊、港湾、海洋及地下水域)中的扩散、输移及转化的规律,预报纳污水域中水体受污染的程度,为水质保护、水环境评价、水资源的开发利用提供科学依据。所以,可以认为环境水力学是介于流体力学和环境科学之间的边缘学科。

环境恶化问题日益严重和环境科学的产生,是与人口增长和工农业生产规模的扩大紧密相连的。地球上人类的出现约在200万年前,在其初期直至中世纪,全世界人口不超过3亿。明朝永乐元年(公元1403年),我国人口是6600万左右。当时,世界人口数量和人类活动对环境的影响还比较小。18世纪工业革命后,世界人口急剧增长,到1800年为9亿,在此之前,清朝乾隆二十九年(公元1769年)我国人口为2亿。1990年世界人口已突破52亿,中国人口已超过11亿。工业革命大大推动了社会生产力的发展,社会出现了空前的繁荣,但是忽视了经济活动对自然生态系统的反作用。煤、石油和其他不可更新的自然资源大量地被开采利用,农药化肥的广泛使用,使各种污染日益严重,破坏了自然环境并恶化了人类的生活条件。特别是近半个世纪以来,环境污染已成为全世界日益关注的重要问题,这就促进了一门新学科——环境科学的产生。

水是人类生活和生产活动不可缺少的宝贵的自然资源。地球上水的储量估计有 $13.9 \times 10^8 \text{ km}^3$,但是其中淡水只占总量的2.53%,而且淡水中的大部分又被冰川、高山所封冻或渗入地下深处,江河、湖泊和浅层地下淡水只占地球总水量的0.017%,约为 235600 km^3 。由此可见,淡水资源并不像人们所想象的那样,可以取之不尽,用之不竭,而是有一定限度的。水的可利用价值表现在两个方面,即“水量”和“水质”。

自从1978年改革开放以来,我国经济社会高速发展,工农业用水和城镇生活用水逐渐

增加,生活废水和工农业污水排放量逐年加大,水质污染和生态环境问题较为突出。我国河流生态环境主要存在以下几个主要问题。① 水质污染是我国最严重的河流生态环境问题。根据《2008 年国民经济和社会发展统计公报》,全国废水排放总量 $571.7 \times 10^8 \text{t}$, 比上年增加2.7%, 其中工业废水排放量 $241.7 \times 10^8 \text{t}$, 城镇生活污水排放量 $330.0 \times 10^8 \text{t}$ 。大量的废污水排放,使我国的大部分河流都不同程度地受到工业、城市废污水和农业面源的污染,其中在北方缺水地区和经济发达地区水质污染特别严重。② 径流量减少,河道功能退化。③ 湖泊的生态环境也不容乐观,出现了富营养化,水质污染,湖面萎缩等问题。④ 地下水也出现了水位下降、水质污染、沿海地区咸水入侵等问题。⑤ 河流生态系统受到极大影响,生物多样性面临严峻挑战,大部分珍稀水生物种处于濒临灭绝的地步。⑥ 水环境保护管理中存在水环境相关管理部门协作不够、流域水资源保护机构的法律地位不明确、地方矛盾冲突需要进一步协调解决等问题。由此可见,我国将面临水资源危机的问题。罗伯特·P.安布罗吉在《水》一文中,对全球水资源的供需平衡作了权威性的剖析,他指出:到2030年将出现全球水资源危机。这绝不是杞人忧天,更不是危言耸听。为此,要积极行动起来,加强预测、制定对策,需要作出10年、20年,甚至更长时间的水源、水质及耗水情况的预测预报,所以对此进行理论研究和实际的技术研究是刻不容缓地造福人类的大好事。

1.2 环境水力学的近期发展及研究方法^[1,3]

环境水力学是以水环境为主要研究对象的一门水力学的分支学科,它应用近代流体力学的基本理论和其他有关学科的理论,创造性地研究各类污染物(化学、生物、热的污染物)在不同纳污水域中的扩散、混合输移和转化的规律。首先,人们将遇到在静止水中或处于层流状态下的水中异质的分子扩散,它是分子的随机运动引起的质点散布。1855年德国学者菲克(Adolf Eugen Fick)在实验的基础上建立了经典的扩散方程,它与热传导方程在形式上是相似的,描述了物质在静止水体或处于层流状态下的扩散规律。接着人们进一步研究了紊动扩散,对紊流问题的研究一直未停止过,但是紊流从理论上尚未得到突破。

我们把紊流理解为由不同尺度的涡体所组成的,这些涡体处于随机运动之中,用分子扩散来近似地模拟紊动扩散。最后我们将碰到离散(即分散)问题。由于在流场中各点的流速是不一样的,处于不同位置的异质将随水流被分散开来,这种分散又叫离散,可用离散系数来表示其作用的强弱。由实践得知,离散系数要大于紊动扩散系数,而紊动扩散系数又远大于分子扩散系数。当然,污染源在时间上的变化有恒定源和非恒定源之分,在空间上的变化也可以有点源、线源和面源之分;而纳污水体也会有一维、二维和三维空间之分。因此污染源和接纳水体之间的耦合是一个值得研究的课题。对这种问题的研究多依赖于实验或者数值求解。

为了使污水在纳污水体中尽快稀释,人们采用一些工程措施和设备,其中最常见的是排放喷口和扩散器,从而达到污染物在近区的快速稀释。它们的出流一般均可以概化为射流、羽流和浮力射流。当喷口初始动量近似为零,而该处的流体与环境流体之间的密度差是维持流动的主要动力时,这种流动称为羽流。当喷口出流流体的密度与环境流体密度相同,维持流动的主要动力是初始动量时,这种流动称为射流。兼有上述两种流动特征的射流称为

浮力射流,这类流动又属于典型的剪切型流动,在流体力学研究领域也有广泛的研究。

异质的密度很可能与纳污水体的密度不相等,这时就会出现密度分层现象,所以分层流是环境水力学的一个重要研究课题。

水质模型是描述水环境中异质的混合、输移和转化规律的数学模型。水中异质包括各类溶解质、异重悬浮物、异温水团、底质、水生物、细菌等。当水中异质超过水体承纳能力和自净能力时,水质将趋于恶化,此时人们必须采取工程措施或生物化学措施使水质状况得以改善。常用的水质参数是溶解氧(DO)和生化需氧量(BOD)。随着对环境预测预报要求的提高,多水质参数以及与环境因素的耦合模型得到了发展。

环境水力学的研究方法主要有理论分析、模型研究、现场观测和分析。各类数学方程的求解可采用多种方法,如精确解法、近似解法(如奇异摄动法)和数值解法。

1.3 环境水力学课程概况

从力学的角度看问题,有些物质混入水体中可以显著影响水的密度,从而影响水体的力学特性;而有些物质则不会。前者称为动力活性物质,后者称为动力惰性物质。动力惰性物质是密度与环境水体密度相等或几乎相等的污染物质。从物理、生化的角度看问题,有些物质混合到环境水体会起生物化学反应或生物降解,生成新的物质,而改变环境水体原有浓度,但有些物质却不会。前者被称为非保守物质,后者称为保守物质。我们将保守的动力惰性物质称为示踪质。

1.3.1 示踪质在水体内迁移的主要方式^[4]

水体中含有的物质可通过各种方式发生位置的迁移,其主要方式包括以下5种:

1. 分子扩散(Molecular Diffusion)

分子扩散是指物质分子的布朗运动而引起的物质迁移。当水体内含物质存在浓度梯度时,含有物质将从浓度高的地方向浓度低的地方移动。例如,将一定浓度的盐水投放在一静止的盛有清水的玻璃杯中,盐分子会向周围扩散,这种扩散就是由分子的布朗运动(随机运动)形成的物质交换而产生的。另外分子扩散与温度和压力也有一定的关系。对研究大水体的水环境问题,分子扩散可以忽略,因为其量级远小于其他因素引起的物质迁移的量级。

2. 随流输移(Advection)

含有物质随水质点的流动而产生的迁移,称为随流输移。当然,当水体处于静止状态时,就没有随流输移。

3. 紊动扩散(Turbulent Diffusion)

当水体处于紊动状态时,随机的紊动作用也可引起含有物质的扩散,这种扩散称为紊动扩散。紊动扩散作用的强弱与水流旋涡运动有关。紊动能够传递物质与其能够传递能量和动量的原理类似。

4. 剪切流离散(Dispersion of Shear Flow)

剪切流是指当垂直于流动方向的横断面上流速分布不均匀或者说有流速梯度存在的流

动。在考虑流动水体的物质迁移和输送作用时,如果把随流输移按平均流速的均匀流计算,则由于实际上剪切流中各点流速与平均流速不同,将引起附加的物质分散,这种附加的物质分散就称为离散。这里的离散是处理方法带来的,即离散的产生是由于将流场作空间平均处理而引起的,若不采用空间平均的简化过程,则就不要计入离散作用。

5. 对流扩散(Convection)

对流扩散是指由于温度差或密度分层不稳定性而引起的垂直方向对流运动所伴随的含有物质的迁移。

在自然界中水体多处在流动状态,各种形式的扩散常常交织在一起发生,以上仅仅是按照扩散的物理过程来划分和描述的。除上述的主要迁移方式外,在河流、湖泊、水库、海湾内,由于河床的冲刷,含有物质的淤积和悬浮都可导致水体中物质迁移。

1.3.2 本课程内容

本书的第2章至第6章主要从水动力学的角度叙述示踪质在水体中的扩散输移规律及其在河流、河口海湾等领域的应用;第7章为废水排放的理论和应用;第8章给出了分层流的概念和相应的理论;第9章就地下水的溶质运移的理论给出了简要的介绍;第10章以较大篇幅论述了地表水水质模型及其相应的数值解法,该部分理论在目前水质预测预报中应用得较为广泛;为了适应环境水力学向生态学的渗透,第11章对鱼道的研究和植被水流特性的研究进行了总结,这些成果大多散见在最新的科技论文之中,并且得到学者认可的理论。

参 考 文 献

- [1] 徐孝平.环境水力学的兴起及展望[J].湖北水力发电,1990,(2):11-14.
- [2] 陈进.中国环境流研究与实践[M].北京:中国水利水电出版社,2011.
- [3] 徐孝平.环境水力学[M].北京:水利电力出版社,1991.
- [4] 赵文谦.环境水力学[M].成都:成都科技大学出版社,1986.
- [5] 费希尔等著.内陆及近海水域的混合[M].清华大学水力学教研组译,余常昭审校.北京:水利电力出版社,1987.
- [6] 张书农.环境水力学[M].南京:河海大学出版社,1989.

第2章 分子扩散

污染物在河流中的混合与输移的过程,一般来讲,包括有分子扩散、紊动扩散和随流输移,并且同时发生。污染的扩散情况如何,在最初的阶段与污染源存在的形式有关。

从污染源在水体空间的存在形式看,有点源、线源、面源和体积源。在实际问题中,真正绝对的点源、线源和面源是不存在的,只是一种近似的处理方法。

从污染源在时间分布上看,有瞬时源和时间连续源。瞬时源是指污染物在瞬时内投放于水域,实际这也是一种近似,如油轮事故突然泄放的油污染可近似为瞬时污染源。时间连续源又可分为恒定和非恒定的时间连续源。

从空间的角度看,污染物的扩散空间可能为一维扩散、二维扩散,也可能为三维扩散。

前已指出,分子扩散的量级远小于紊动扩散的量级,因而在分析河流问题时,分子扩散可以不考虑。但为了解决紊动扩散奠定基础,首先讨论分子扩散。

2.1 分子扩散方程

1855年费克(Adolf Eugen Fick)提出了分子扩散定律:在各向同性的介质中,在一定方向上通过单位面积扩散输送的物质与该断面的浓度梯度成正比,即

$$\vec{q} = -D \frac{\partial C}{\partial n} \vec{n} \quad (2-1)$$

式中: $\vec{q}$ 为单位时间内通过单位面积的异质扩散量,称为异质通量; C 为单位水体体积内异质的含量(异质的质量或重量或体积),称为浓度(对应地可称为质量浓度、重量浓度或体积浓度); $\vec{n}$ 为异质扩散通过面的内法线向量; D 为分子扩散系数,量纲为 $[L^2/T]$,取决于液体和异质的物理性质,可由试验决定;表2-1为一些溶质在水中的分子扩散系数,它随溶质与溶液种类和温度压力而变化,负号表示溶质扩散方向和浓度梯度方向相反。

下面我们采用欧拉法,根据质量守恒原理来建立浓度随时间和空间变化的关系式。在静止液体内部取一微小六面体(图2-1),边长为 dx, dy 和 dz 。由于分子扩散,在 dt 时段内,沿 x 轴方向通过 $abcd$ 面进入的扩散量为(该面内法线方向与 x 轴向一致)

$$-D \frac{\partial C}{\partial x} dydzdt$$

通过 $a'b'c'd'$ 的扩散量为(内法线方向与 x 轴相反)

$$\left[D \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) dx \right] dydzdt$$

表 2-1 某些溶质在水中的分子扩散系数

溶质	温度 /℃	分子扩散系数 $D/(10^{-9}\text{m}^2/\text{s})$	溶质	温度 /℃	分子扩散系数 $D/(10^{-9}\text{m}^2/\text{s})$
O ₂	20	1.80	乙醇	20	1.00
H ₂	20	5.13	甘油	10	0.63
CO ₂	20	1.50	甘油	20	0.72
N ₂	20	1.64	食盐	0	0.78
NH ₂	20	1.76	食盐	20	1.35
H ₂ S	20	1.41	酚	20	0.84

则通过此两面的扩散量之和为

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx dy dz dt$$

同理,沿 y 和 z 方向的扩散量分别为

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} dx dy dz dt$$

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} dx dy dz dt$$

在 dt 时段内,由于浓度的变化,六面体内异质的增量为

$$\frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz dt$$

由质量守恒定律,该增加量应等于以上三项扩散量的总和,故得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \tag{2-2}$$

上式(2-2) 常称为费克第二定律,式(2-1) 也可称为费克第一定律。

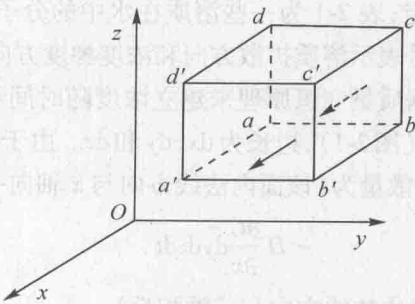


图 2-1

在上述的推导过程中,认为各向的扩散是同性的。如果为各向异性,即 $D_x \neq D_y \neq D_z$, 则式(2-2)变为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (2-3)$$

式(2-3)即为分子扩散浓度时空关系的基本方程式,它是基于费克第一定律得到的,所以称费克型扩散方程。

如果异质主要沿两个方向或一个方向扩散,则

二维分子扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2-4)$$

一维分子扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2-5)$$

如果用温度 T 和热传导系数 k 分别代换扩散方程(2-2)中的浓度 C 和扩散系数 D 即为热传导的傅里叶方程,这说明分子扩散与分子热传导是数学表达形式相同的两个物理过程。根据初始条件和边界条件,对一些简单的问题,可以求得解析解;对于复杂问题,只能借助于数值解法求解。扩散方程的求解不仅与定解条件有关,而且还与污染源存在的形式有关。

2.2 分子扩散方程的若干解析解

当条件适宜时常采用相似变换、分离变量等方法来求解扩散方程的解析解。相似变换法是指利用变量的某种组合,引进新的相似变量,从而把偏微分方程化为常微分方程来求解的方法。下面先介绍用相似变换法求几种基本情况下的扩散方程解析解。这些解析解在环境污染分析中有着较为广泛的应用,同时也作为分析复杂问题的基础。

2.2.1 瞬时源情形下的一维扩散方程

一维扩散方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

其定解条件为:在 $t = 0$ 时,扩散物质全部集中在污染源点,将其取为坐标原点,即 $C(x, 0) = M\delta(x)$, M 是扩散物质总质量,其中 $\delta(x)$ 为迪拉克(Dirac) δ 函数。浓缩在无限小的坐标原点位置上的扩散物质,在 x 轴的正负两个方向上向无穷远处扩散,因而有边界条件 $C(\pm\infty, t) = 0$

和 $\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0$, 如图 2-2(a) 所示。根据质量守恒定律,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} C dx = M \quad (2-6)$$

在上面的微分方程和边界条件中,涉及 5 个物理量,即 C 、 t 、 x 、 D_x 、 M ,其中包括 3 个基本

量。根据 π 定理,这个物理过程可由 5 个物理量组成的 2 个无量纲量所表述的关系式来描述。分析这些物理量的量纲,可得到无量纲量所表达的关系式为

$$\frac{C}{M} = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{D_x t}}\right)$$

或

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{4D_x t}}\right) \quad (2-7)$$

为了使解答更加简明,在上式中加了 4π 和 4 两个常数。

令 $\eta = \frac{x}{\sqrt{4D_x t}}$, 则上式为

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}} \varphi(\eta) \quad (2-8)$$

式中: $\varphi(\eta)$ 为待求函数。将式(2-8)代入式(2-6)得到一个常微分方程:

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\varphi}{d\eta} + 2\varphi = 0$$

即

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\varphi}{d\eta} + 2\eta\varphi\right) = 0$$

其解为

$$\varphi(\eta) = A \exp(-\eta^2) \quad (2-9)$$

根据质量守恒这个条件求得上式中的待定系数 A 。即利用式(2-8)有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} C dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}} A \exp(-\eta^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{\sqrt{\pi}} A \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{4D_x t}}\right) \\ &= \frac{M}{\sqrt{\pi}} A \sqrt{\pi} = MA = M \end{aligned}$$

故 $A = 1$ 。于是,瞬时源一维扩散方程的基本解为

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) \quad (2-10)$$

该浓度分布符合高斯正态分布。若以时间 t 为参数,可以绘出浓度沿 x 轴的分布,如图 2-2(b) 所示。从图中可知,随着时间 t 的增加,扩散范围变宽而浓度峰值变小,分布曲线趋于平坦。式(2-10)中的 $\frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}}$ 是任何时刻的源点浓度。这个解对应着污染源点与坐标原点重叠的情况。

在上述的解答中,一维扩散方程的解为高斯正态分布,因而浓度分布的一些特征值常借助于浓度分布的各阶矩来表示。矩在力学中已屡见不鲜,如力矩、面积矩、惯性矩等。浓度分布的 k 阶矩定义为

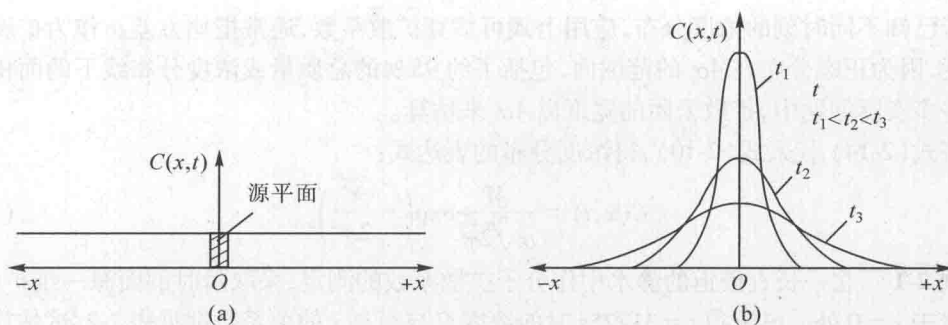


图 2-2

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k C(x, t) dx \quad (2-11)$$

按照上述定义, 浓度分布函数的零阶浓度矩为

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 C(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx \quad (2-12)$$

式(2-12)代表浓度分布曲线与 x 轴间所包围的面积, 即全部扩散物质的质量 M 。因此, 对任何时刻, 零阶浓度矩 $M_0 = M = \text{常数}$ 。

特征值方差 σ^2 , 在一定条件下可反映高斯正态分布曲线扩展宽度的情况, 其值愈大, 曲线愈趋扁平。浓度分布函数的方差 σ^2 为

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx} = \frac{M_2}{M_0} \quad (2-13)$$

式中: M_2 为二阶浓度矩。

将式(2-10)代入上式, 并积分有

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{M}{\sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) dx}{M} = 2D_x t \quad (2-14)$$

这说明方差 σ^2 随时间 t 的增加而呈线性增长, 时间愈长, 扩展愈宽。利用式(2-14)可推出计算扩散系数的公式:

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D_x \quad (2-15)$$

这是扩散方程的一个特性: 任意一个有限的初始浓度分布, 不管它的形状如何, 最后会衰变为高斯正态分布, 它的方差增长率为 $2D_x$ 。若在一个不长的时间间隔内, 以差分代替上式的微分, 则有

$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + 2D_x(t_2 - t_1) \quad (2-16)$$

若已知不同时刻的浓度分布,应用上式可估算扩散系数,通常把均方差 σ 作为扩展宽度的量度,因为正态分布在 4σ 的范围内,包括了约95%的总质量或浓度分布线下的面积。因此在许多实际问题中,扩散云团的宽度以 4σ 来估算。

将式(2-14)代入式(2-10),得浓度分布的表达式:

$$C(x, t) = \frac{M}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2-17)$$

例 2-1 在一长直渠道的静水中作分子扩散系数的测定,采取瞬时剖面源一维扩散,扩散源置于 $x=0$ 处。已测得 $t=31725\text{s}$ 时的浓度 C 与距离 x 的关系数据见表2-2,试估算分子扩散系数 D 的大小。

表 2-2

x/cm	-3.0	-2.7	-2.4	-2.1	-1.8	-1.5	-1.2	-0.9	-0.6	-0.3	0
$C/(\text{mg} \cdot \text{L}^{-1})$	0.0	0.010	0.021	0.050	0.09	0.11	0.20	0.30	0.41	0.47	0.5
x/cm	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	
$C/(\text{mg} \cdot \text{L}^{-1})$	0.48	0.42	0.28	0.21	0.12	0.08	0.06	0.02	0.015	0	

解:

由式(2-13)有

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 C \cdot \Delta x)}{\sum (C \cdot \Delta x)} = \frac{3.37131}{3.846} = 0.8766 \text{cm}^2$$

由式(2-16)有

$$D_x = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{t_2 - t_1} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{0.8766}{31725} \right) = 1.38 \times 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$$

2.2.2 边界有界情况下的瞬时点源

以上和这里要说的问题,其方程和边界条件都是线性的,因此可以运用叠加原理,把方程的单独解经叠加构造出新的解。上面讨论的问题是无限空间中的扩散,即边界条件为 $C(\pm\infty, t)=0$,而实际水域都是有界的。污染物扩散到岸边而不被岸边所吸收或粘着形成完全反射,这种情况对水域的污染最为严重。

先讨论一边有完全反射的情况,如图2-3所示。由于完全反射,扩散物质在 $x=0$ 处, $t=0$ 时瞬时投放,在 $x=-L$ 处有一个完全反射的岸壁,则任何时刻通过该岸壁的扩散物质的净通量为零,即

$$x = -L, D_x \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

因此,在岸壁处的浓度梯度必须为零。为此,引入“源像法”。设想有一平镜置于 $x=-L$