"十二五"国家重点图书

Springer 精选翻译图书

图与矩阵

Graphs and Matrices

[印度] R.B.Bapat 主编

吴少川 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图与矩阵

Graphs and Matrices

"十二五"国家重点图书

Springer精选翻译图书

图与矩阵

Graphs and Matrices

[印度]R.B.Bapat 主编

吴少川 译

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书主要讨论与线性代数和矩阵理论紧密结合的图论知识。与传统图论书籍相比，本书更强调矩阵技术的运用，因此属于“线性代数图论”范畴。在书中，作者首先回顾了矩阵和图论的相关知识；然后介绍了与图有关的关联矩阵、邻接矩阵和拉普拉斯矩阵的相关性质；随后介绍了圈与割、正则图、代数连通度、树的距离矩阵、电阻距离、阈图的拉普拉斯特征值、正定完备问题和图的矩阵博弈。

本书适合作为计算机工程、电子与通信工程及自动控制等专业高年级本科生和研究生的教材，也适合作为相关领域高校和研究所研究人员的参考书籍。

黑版贸审字 08 - 2014 - 041 号

Translation from English language edition:
Graphs and Matrices
by Ravindra B. Bapat

图书在版编目(CIP)数据

图与矩阵/(印)巴派特(Bapat,R. B.)主编；吴少川译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014. 8
(电子与通信翻译系列)
ISBN 978 - 7 - 5603 - 4853 - 7

Ⅰ. ①图… Ⅱ. ①巴… ②吴… Ⅲ. ①图论 ②矩阵 Ⅳ. ①O157. 5 ②O151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 170579 号

电子与通信工程
图书工作室

责任编辑 李长波
封面设计 刘长友
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress. hit. edu. cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 660mm×980mm 1/16 印张 15. 25 字数 207 千字
版 次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 4853 - 7
定 价 40. 00 元

前　言

本书主要讨论与线性代数和矩阵理论紧密结合的图论知识。尽管线性代数已经被广泛承认是研究图的一个重要工具，但是传统上图论学家一般仍然不热衷于使用线性代数。就像在经典书籍 *Biggs*，以及 *Godsil* 与 *Royle* 所概括的那样，本书所讨论的结论通常被看作是"代数图论"。但是我们实际上比这些经典书籍更强调矩阵技术的使用，所以可以利用"线性代数图论"这个术语来强调本书所讨论的主题。

通过在第1章中回顾矩阵的一些预备知识，在后续的几章中我们简要地介绍了与图有关的一些矩阵的基本性质。这之后是关于图论的专题，例如正则图和代数连通度。在接下来的两章中，分别讨论了树的距离矩阵和它在任意图中的推广，以及电阻矩阵。最后的几章讨论了诸如阈图的拉普拉斯特征值、正定完备问题和基于图的矩阵博弈。

本书主要致力于对一些最基本知识的介绍，而尽量避免涉及一些最新的研究成果。因此本书的一些章节可以看作是对这一广泛研究领域的简单涉猎。这里仅仅只是一个开始，我们希望它能够吸引读者去进行更深入的研究。同样地，我们经常不介绍某些结论的完整形式，而只是介绍它们的简化版本，从而使这些结论看起来更加简洁。尽管本书中大部分的结论都有加权处理，但是我们还是试图避免讨论加权图，从而使结论更具有普遍意义。

本书在每一章的结尾处列出了该章的参考文献，并在本书的最

后给出了主要参考文献。在每一章的结尾处,还利用注解的方式指明了所使用的主要参考文献。与原文相比,我们所引用的结论经常会有不同的处理方式和证明方法,而我们不会详细地阐述这些差异性。

我要感谢 Rajendra Bhatia 对本书稿的勤奋处理。Aloke Dey, Arbind Lal, Sukanta Pati, Sharad Sane, S. Sivaramakrishnan 和 Murali Srinivasan 或者阅读了全部的书稿,或者阅读了其中的一部分,他们给出了相关的建议并指出了需要改正的地方。我要对他们所有人表示诚挚的感谢。我也要向匿名的审稿人表示感谢,感谢他们所提出的有帮助的评阅意见。当然,我会对本书中仍旧存在的缺点和错误负责。我同样感谢位于新德里的印度统计研究所提供的设施,以及印度政府科技部所提供的 JC Bose 学术奖金。

Ravindra B. Bapat

印度新德里

译　者　序

图论与矩阵分析是当今许多大学计算机工程、电子与通信工程及自动控制等专业必备的数学基础课程。尽管所有的图论学家都认为图论应当与矩阵分析相结合，从而更好地利用线性变换来解决图论中的经典问题。但是纵观目前国内外的相关书籍，真正强调两者结合，并且论述清晰准确的经典书籍并不多。在中国，这一现象就显得更为明显，从而制约了广大学者在这一领域进行更广泛和深入的研究。译者在查阅了相关英文原版书籍后，选择了将印度学者 R. B. Bapat 的这本《图与矩阵》的教材引入中国。本书尽管内容不多，但是却几乎涉及所有与图论有关的矩阵知识，因此十分适合对这一领域感兴趣的专业学者、研究生和高年级本科生进行阅读，也适合作为相关专业的教材进行课堂讲授。当然，本书只是这一领域的入门读物，重点是使读者了解什么是线性代数图论。如果读者对这一数学分支感兴趣，那么我们建议进一步阅读本书所列的其他相关文献。

本书的翻译工作由哈尔滨工业大学电子与信息工程学院的吴少川老师及其研究团队共同完成。其中吴少川翻译了全书，并负责全书的统稿、修改与校对工作，对原书中存在的某些疏漏进行了修订。本书的出版要尤其感谢王玉泽、崔闻、牛丽娟、马康健和潘斯琦这五位同学，他们在专业术语翻译、公式符号的计算机录入以及校对等方面付出了大量的时间和精力。没有他们的辛勤工作和严谨

态度，就不能保证本书在这么短的时间内与广大读者见面。

本书的翻译是在国家自然科学基金青年基金（No. 61201147）支持下完成的，特此感谢；还要感谢哈尔滨工业大学提供的各种设施，保证了本书翻译所需的各种资源。

最后，由于“线性代数图论”进入中国的时间尚短，许多专业术语还没有统一的中文译法，所以本书的术语除了借鉴于青林等翻译的《图论》（第四版）和张贤达的《矩阵分析与应用》外，其余未有标准中文译法的专业术语我们依据其物理含义及中文习惯给出了可以接受的中文术语。我们在本书的最后还给出了中英文术语的对照表，便于读者进行专业术语查找和比对。

由于译者水平有限，翻译过程中的疏漏和不当之处还请读者不吝指正，以便我们在下一版中进行改进。

吴少川

2014 年 4 月于哈尔滨

目　　录

第1章　预备知识

在这一章中，将要回顾与实数矩阵有关的线性代数的基本概念和理论。尽管本书是自成体系的，但还是希望读者能够具备矩阵理论的基本知识。在本章中，我们会给出相关的概念和结论，而忽略其证明。

1.1　矩　阵

1. 基本定义

一个 $m\times n$ 矩阵由 m 行和 n 列共 mn 个实数组成。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的元素用 a_{ij} 来表示。一个 $m\times 1$ 矩阵被称为一个 m 阶列向量；类似地，一个 $1\times n$矩阵被称为一个 n 阶行向量。当 $m=n$ 时，一个 $m\times n$ 矩阵被称为方阵。

矩阵加、标量乘和矩阵乘是最基础的矩阵运算，此处不再赘述。一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置可以表示为 $\boldsymbol{A}'$。

对于方阵 $\boldsymbol{A}$，当 $a_{ij}=0(i\neq j)$时，称其为对角矩阵。本书将对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

表示为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$。如果对于所有的 i 来说，$\lambda_i=1$，那么这个矩阵退化为一个 n 阶的单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$。如果通过上下文可以分辨出单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的阶数，那么本书将会以 $\boldsymbol{I}$ 来进行简化表示。若对于所有 $i>j$ 都有 $a_{ij}=0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一个上三角矩阵；而任意一个上三角矩阵的转置则是一个下三角矩阵。

2. 迹和行列式

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，那么元素 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ 被称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(主)对角线元素。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹(trace)被定义为

$$\text{trace } \boldsymbol{A}=a_{11}+\cdots+a_{nn}$$

有了上面的定义，容易得出如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵而且 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有定义，那么

$$\text{trace } \boldsymbol{AB}=\text{trace } \boldsymbol{BA}$$

一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式(determinant)用符号 det $\boldsymbol{A}$ 表示，并定义为

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

其中，求和是遍历 $1,\cdots,n$ 的所有全排列 $\sigma(1),\cdots,\sigma(n)$，而 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 根据 σ 为奇数或偶数分别取值为 1 和 -1。这里，我们假定读者熟悉行列式的基本性质，对此不再赘述。

3. 矩阵的向量空间

令 $\mathbf{R}$ 代表实数集合。对于所有 n 阶列向量(即 $n\times1$ 矩阵)所组成的列向量集合或所有 n 阶行向量(即 $1\times n$ 矩阵)所组成的行向量集合，这两个集合都可以用 $\mathbf{R}^n$ 来表示。根据具体情况下表述的便利性，我们将把 $\mathbf{R}^n$ 中的元素或者写作列向量的形式或者写作行向量的形式。可以回想一下，$\mathbf{R}^n$ 是一个具有矩阵加和标量乘运算的向量空间。

令 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ 矩阵。那么由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量所支撑的 $\mathbf{R}^m$ 的子空间被称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间(column space)或列支撑(column span)。同理，由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行向量所支撑的 $\mathbf{R}^n$ 的子空间则被称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间。

根据线性代数的基本理论，一个矩阵列空间的维数等于其行空间的维数，这个维数值通常被称为矩阵的秩(rank)，并用符号 rank $\boldsymbol{A}$ 来表示。

对于任意的矩阵 $\boldsymbol{A}$，rank $\boldsymbol{A}=$ rank $\boldsymbol{A}'$。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数相

同，那么 $\text{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\text{rank }\boldsymbol{A}+\text{rank }\boldsymbol{B}$。如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵且 $\boldsymbol{AB}$ 存在，那么 $\text{rank }\boldsymbol{AB}\leqslant\min\{\text{rank }\boldsymbol{A},\text{rank }\boldsymbol{B}\}$。

令 $\mathbf{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，那么 $\mathbf{R}^n$ 中所有满足 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合，容易证明是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间。这个子空间被称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的零空间（null space），并用符号 $N(\mathbf{A})$ 来表示。$N(\mathbf{A})$ 的维度被称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的零化度（nullity）。若 $\mathbf{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，那么 $\mathbf{A}$ 的零化度为 $n-\text{rank }\mathbf{A}$。

4. 子式

令 $\mathbf{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵。若 $S\subset\{1,\cdots,m\}$ 和 $T\subset\{1,\cdots,n\}$，则 $\mathbf{A}[S|T]$ 表示由矩阵 $\mathbf{A}$ 中同时位于 S 行和 T 列上的所有对应元素所形成的子矩阵。而 $\mathbf{A}(S|T)$ 代表删除矩阵 $\mathbf{A}$ 中对应于 S 行的所有元素和对应于 T 列上的所有元素得到的子矩阵。因此 $\mathbf{A}(S|T)=\mathbf{A}[S^c|T^c]$，其中上角标 c 表示补集。通常，我们默认假设由 S 和 T 所生成的上述矩阵是非空的。当 $S=\{i\}$ 和 $T=\{j\}$ 为单值时，$\mathbf{A}(S|T)$ 可以表示为 $\mathbf{A}(i|j)$。

5. 非奇异矩阵

如果一个 $n\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\text{rank }\mathbf{A}=n$，那么该矩阵被称为是非奇异的（nonsingular），否则称其为奇异的（singular）。如果矩阵 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，那么存在一个唯一的 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$，并满足 $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\boldsymbol{I}$，此时将 $\mathbf{A}^{-1}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵。当且仅当 $\det\mathbf{A}$ 不为零时，矩阵 $\mathbf{A}$ 才是非奇异的。

a_{ij} 的余子式（cofactor）定义为 $(-1)^{i+j}\det\mathbf{A}(i|j)$。矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随（adjoint）矩阵是一个 $n\times n$ 矩阵，且该伴随矩阵中的第 (i,j) 元素为 a_{ji} 的余子式。如果矩阵 $\mathbf{A}$ 是非奇异的，那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 可以根据 $\frac{1}{\det\mathbf{A}}$ 乘以 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵来求得。

如果一个矩阵的秩与其列数相等，那么称它为列满秩矩阵，或者等价地称该矩阵中的各列线性独立。与此类似，如果一个矩阵的各行线性独立，那么该

矩阵被称为行满秩矩阵。如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩的，那么它必然存在一个左逆矩阵 $\boldsymbol{X}$，从而使得 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{I}$。同理，如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是行满秩的，那么它必然存在一个右逆矩阵 $\boldsymbol{Y}$，从而使得 $\boldsymbol{CY}=\boldsymbol{I}$。

如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，那么可以将 $\boldsymbol{A}$ 写为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $m\times r$ 的列满秩矩阵，而 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $r\times n$ 的行满秩矩阵。这被称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩分解(rank factorization)。此外，必然存在 $m\times m$ 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $n\times n$阶非奇异矩阵$\boldsymbol{Q}$，从而可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以秩标准形(rank canonical form)表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

6. 正交

如果 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}=0$，则称这两个向量是正交的(或垂直的)。如果 $\mathbf{R}^n$ 中的向量集合$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$满足以下条件则称此向量集合为向量空间 S 的标准正交基(orthonormal basis)：该向量集合是向量空间 S 的一个基；如果 $i\neq j$，那么 $\boldsymbol{x}'_i\boldsymbol{x}_j=0$；如果 $i=j$，那么 $\boldsymbol{x}'_i\boldsymbol{x}_j=1$。如果一个 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{PP}'=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，那么矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正交的。可以验证，如果矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正交的，那么矩阵 $\boldsymbol{P}'$ 也是正交的。

如果 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 是线性独立的向量，那么通过施密特正交化过程(Gram-Schmidt orthogonalization process)可以构造出一组标准正交向量 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_k$，使得 $\boldsymbol{y}_i$ 是 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_i$ 的线性组合，$i=1,\cdots,k$。

7. Schur 补

设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可被分块为下述形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中，$\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 为方阵。如果 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是非奇异的，那么 $\boldsymbol{A}_{11}$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 Schur