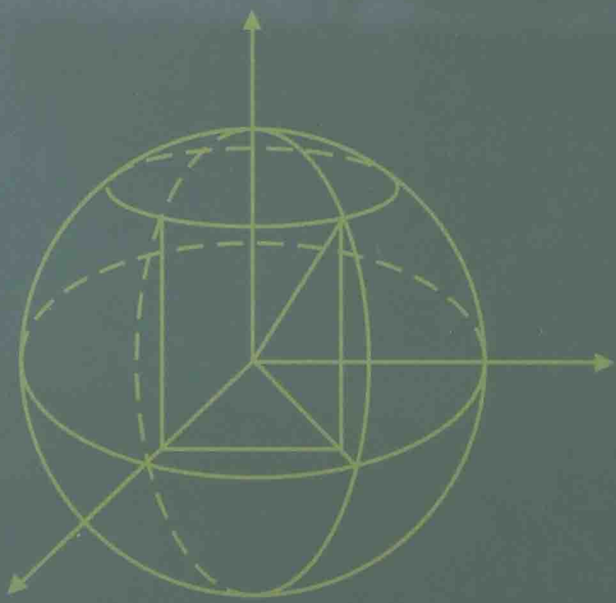
数学物理方法与复数特殊函数

张承宗 著



中国宇航出版社

数学物理方法与复数特殊函数

张承宗 著

中国宇航出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法与复数特殊函数 / 张承宗著. -- 北京：中国宇航出版社，2014.12

ISBN 978-7-5159-0849-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学物理方法②复数-特殊函数 Ⅳ. ①O411.1 ②O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 292153 号

责任编辑　曹晓勇　　　**装帧设计**　文道思

出版发行　中国宇航出版社

社　址　北京市阜成路 8 号　**邮　编**　100830
(010)68768548

网　址　www.caphbook.com

发行部　(010)68371900　(010)88530478(传真)
(010)68768541　(010)68767294(传真)

零售店　读者服务部　北京宇航文苑
(010)68371105　(010)62529336

承　印　北京画中画印刷有限公司

版　次　2014 年 12 月第 1 版
2014 年 12 月第 1 次印刷

规　格　787 × 1092

开　本　1/16

印　张　22.25

字　数　570 千字

书　号　ISBN 978-7-5159-0849-6

定　价　128.00 元

内容简介

本书以数学物理方程解析求解为背景，系统介绍了求解直角坐标、斜交坐标系和极坐标、圆柱坐标、球坐标下数学物理方程的基本方法，阐述了直角坐标系、斜交坐标系下求解数学物理方程的复数级数法（复数分离变量法），提出并研究分析了求解柱（极）坐标、球坐标下各向异性数学物理方程的复数柱多项式与复数柱函数、复数柱对称函数、变形复数柱多项式、复数柱体函数、复数球柱多项式、变形复数球柱多项式、B 型柱多项式、C 型复数柱多项式、复数一般各向异性柱多项式与变形复数球柱函数、复数球柱函数、变形复数柱面函数、复数柱面函数、复数球多项式与复数球面函数、参数复数球多项式与参数复数球面函数、连带复数球多项式与连带复数球面函数、参数连带复数球多项式与参数连带复数球面函数等系列复数特殊函数；提出了 Z_{ip} 方程，变形 Z_{ip} 方程，球 Z_{ip} 方程，变形球 Z_{ip} 方程，各向异性柱对称方程，B 型各向异性柱方程，C 型各向异性柱方程，一般各向异性柱方程等；提出并证明了复数柱函数展开定理、复数柱体函数展开定理、复数球柱函数展开定理、复数柱面函数展开定理等；提出了复数球面函数展开法，连带复数球面函数展开法，参数连带复数球面函数展开法等；提出了数学物理方法中解的实数化原理；应用系列复数特殊函数完成了对各向异性热传导偏微分方程在二维、三维和稳态、非稳态状态下圆形域、柱体和球面域内相关数学物理问题的求解，理论分析证明和数值计算均表明相关工作是成功。此外，针对柱坐标下的数学物理方法提出了系列复数柱函数变换，并求解了各向异性波动方程。作者发现：经典贝塞尔函数系列、勒让德函数、实数幂级数、汉克尔变换等是本书提出了系列复数特殊函数、变换特例，在处理各向同性相关数学物理问题时，经典贝塞尔函数、实数幂级数和勒让德函数、汉克尔变换等与作者新提出的系列复数特殊函数、函数变换是一致的，新的系列复数特殊函数、函数变换是更广义的方法，可以处理更为一般的各向异性数学物理问题和偏微分方程。

本书可作为数学、物理和工程领域相关科研教学人员与研究生、本科生参考。

前　言

微积分发明以后，物理问题成为数学发展的一个重要的驱动力。18 世纪数学和物理结合部主要是常微分方程。19 世纪以后，法国数学家傅立叶在热传导研究时提出的傅立叶级数方法拉开了偏微分方程发展的序幕，后续发展的贝塞尔函数、勒让德函数等经典理论丰富了偏微分方程求解方法，偏微分方程和物理紧密联系起来，以至偏微分方程很多场合下常被称为数学物理方程。爱因斯坦这样评价了偏微分方程意义：偏微分方程在进入理论物理学时是婢女，但逐渐成为了主妇。20 世纪以来科学技术进步，背后有着偏微分方程驱动因素，偏微分方程学科已发展成为人类知识体系中主要支撑之一。

20 世纪 50 年代以后，以复合材料为代表的各向异性材料得到了广泛的应用。各向异性材料的广泛应用，给偏微分方程带来了新课题。复合材料各向异性等新物理特点反映到偏微分方程，使偏微分控制方程出现了函数关于空间坐标的奇次交叉偏导数，这使 19 世纪发展的基于实数分离变量法的偏微分方程求解体系遇到了困难。这样可解析求解的各向异性物理和工程问题极其有限，而这些问题对于实际工程设计很重要。对理论和工程应用极为重要的工程物理问题无法解析处理，使得对有关问题的认识存在空白，或不够深入，甚至错误的，如在结构工程设计中规避复合材料各向异性问题，而这恰是复合材料的优点。所幸的是当代计算机技术及以有限元为代表的数值法飞速发展相对掩盖了偏微分方程解析求解严重滞后的缺陷。从偏微分方程学科发展来看，目前可以解析求解的偏微分方程只是相对简单的方程，一般线性偏微分方程解析求解方法需要发展完善。从偏微分方程的物理背景来看，或许可以发展一种“各向异性数学物理”的学科。无论是发展数学理论，还是推动相关工程技术进步，发展偏微分方程（数学物理方程）求解理论，是迫切的。

本书作者在 1990 年开始致力于各向异性力学偏微分方程解析求解工作，起初研究各向异性矩形平板弯曲偏微分方程解析求解，应用一种后来被称为复数级数方法的复变函数方法解析计算各向异性矩形板弯曲，后续把这种复数级数展开法推广用于常系数线性偏微分方程控制的圆形域、矩形域、斜形域相关力学问题，取得一些解析解和结果，作者也欣喜地注意到国内一些学者也开始陆续应用这种复数级数方法处理相关力学问题。现在看来，复数级数方法也是一种广义的分离变量法，本书也将复数技术方法称为复数分离变量法，以求和

现有数学物理方法体系统一起来。相对于直角坐标系下偏微分方程求解，极（柱）坐标、球坐标下线性偏微分方程求解，由于要遇到变系数问题，求解则麻烦起来。偏微分方程的变系数问题处理原先多采用幂级数方法求解，以往幂级数方法大都是采用实数幂级数方法，这对处理各向同性数学物理问题是足够适用的，以实数幂级数方法为基础，发展了勒让德级数、贝塞尔函数等特殊函数方法。但对于各向异性数学物理问题来说，存在两个坐标交叉函数项，实数形式的幂级数函数就难以处理此类方程了。作者从 2008 年开始试尝着沿用复变函数原理，结合贝塞尔、勒让德函数展开思路和分离变量法基本原理，引入了一些复数特殊函数，对极（柱）坐标、球坐标下相应偏微分方程求解进行初步研究。研究表明，综合采取分离变量法、级数展开和复变函数方法处理柱坐标、极坐标和球坐标下一般偏微分方程的思路是可行的。按照这种思想，作者提出了求解柱（极）坐标、球坐标下各向异性数学物理方程的复数柱多项式与复数柱函数、复数柱对称函数、变形复数柱多项式、复数柱体函数、复数球柱多项式、变形复数球柱多项式、B 型柱多项式、C 型复数柱多项式、复数一般各向异性柱多项式与变形复数球柱函数、复数球柱函数、变形复数柱面函数、复数柱面函数、复数球多项式与复数球面函数、参数复数球多项式与参数复数球面函数、缔合复数球多项式与缔合复数球面函数等系列复数特殊函数；提出了 Z_{ip} 方程，变形 Z_{ip} 方程，球 Z_{ip} 方程，变形球 Z_{ip} 方程，各向异性柱对称方程，B 型各向异性柱方程，C 型各向异性柱方程，一般各向异性柱方程等新方程；提出并证明了复数柱函数展开定理、复数柱体函数展开定理、复数球柱函数展开定理、复数柱面函数展开定理等；提出了复数球面函数展开法，缔合复数球面函数展开法等；提出了数学物理方法中解的实数化原理；应用系列复数特殊函数完成了对各向异性热传导偏微分方程在二维、三维和稳态、非稳态状态下圆形域、柱面域、柱体和球面域内相关数学物理问题的求解，理论分析证明和数值计算均表明相关工作是成功的。作者又并针对各向异性波动方程进行求解。此外，作者针对柱坐标下的数学物理方法提出了系列复数柱函数变换。作者发现：经典贝塞尔函数系列、勒让德函数、实数幂级数、汉克尔变换等是本书提出了系列复数特殊函数、函数变换的特例，在处理各向同性相关数学物理问题时，经典贝塞尔函数、实数幂级数和勒让德函数、汉克尔变换等与作者新提出的系列复数特殊函数、函数变换是一致的，数学物理方法发展是有继承性的。新的系列复数特殊函数是更广义的方法，可以处理更为一般的各向异性数学物理问题和偏微分方程。

偏微分方程和特殊函数大都具有鲜明的物理背景。从现在回顾偏微分方程

和特殊函数发展历程，当前的经典偏微分方程求解方法，实际都是基于各向同性的物理学背景。发展偏微分方程复数求解体系方法，对基于各向异性物理学背景的一般线性偏微分方程求解，构建各向异性物理背景的一般偏微分方程和特殊函数知识体系，应该是偏微分方程和特殊函数发展的一个新方向。2000年以后，空间探测器验证了宇宙微波背景辐射是各向异性的，而不是以前认为的各向同性，这颠覆了人类原先的宇宙知识，各向异性物理学发展方兴未艾，各向异性数学物理方法的突破或是各向异性物理学发展的助推器。偏微分方程和特殊函数的进步不仅是数学领域方面的进步，还可以推进有关物理科学和工程技术进步，从理论方法和技术领域均有重要的现实意义。

作者最早在重庆大学学习工程领域专业，在数学物理领域经常边学习边科研，虽然依托数学力学方法领域学位论文研究相继在国防科技大学、海军工程学院获得硕士、博士学位，还是经常感觉到科学、数学的博大精深。作者依托计算机技术完成了系列复数特殊函数理论推导和相关数学物理问题的数值计算，而数学领域先哲们是用手算实施贝塞尔函数、勒让德函数、实数幂级数方法等诸多领域公式推导和计算，在赞叹数学理论精妙之时，作者也感叹先哲们计算之精确、工作之坚韧。科学发展需要人类智慧，也需要坚韧不拔工作。作者是以工程师角色从事数学物理研究，由于水平有限，而且成书仓促，书中可能有疏漏甚至有错误之处，敬请读者批评指证。

作　者

2014年5月4日于北京

标　注

i	$\mathrm{i}^2=-1$，虚数单位
i，j，k，l，m，n	整数（专门定义除外）
α	矩形长宽比或热扩散系数
h，δ	板壳厚度
β	斜形板斜角，或最大热传导方向与一坐标方向夹角。
x，y，z	直角坐标
r,θ,z	柱坐标
r,θ,φ	球坐标
t	时间
q	板壳承载函数或热源函数
ρ	密度
C_p	比热
w	板壳挠度
T	温度
$J_p(x)$	第一类贝塞尔函数
$Y_p(x)$	第二类贝塞尔函数
$Z_{ip}(x)$	第一类复数柱多项式，$p=a+\mathrm{i}b$
$Z_{ip}(x,\theta)$	第一类复数柱函数
$Y_{ip}(x)$	第二类复数柱多项式
$Y_{ip}(x,\theta)$	第二类复数柱函数
$S_{ip_n}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$	复数柱环函数
$H_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类复数柱多项式
$H_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类复数柱多项式
$I_p(x)$	第一类变形贝塞尔函数
$K_p(x)$	第二类变形贝塞尔函数
$\hat{Z}_{ip}(x)$	第一类变形复数柱多项式
$K_{ip}(x)$	第二类变形复数柱多项式
$\hat{H}_p^{(1)}(x)$	第一种第三类变形贝塞尔函数
$\hat{H}_p^{(2)}(x)$	第二种第三类变形贝塞尔函数
$\hat{H}_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类变形复数柱多项式

$\hat{H}_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类变形修正复数柱多项式
$C_{l,n,k,j}(r,\theta,z)$	复数柱体函数
$j_n(x)$	第一类球贝塞尔函数
$y_n(x)$	第二类球贝塞尔函数
$C_{ip}(x)$	第一类复数球柱多项式
$C_{ip}(x,\theta)$	第一类复数球柱函数
$y_{ip}(x)$	第二类复数球柱多项式
$y_{ip}(x,\theta)$	第二类复数球柱函数
$h_{ip}^{(1)}(x)$	第一种第三类复数球柱函数
$h_{ip}^{(2)}(x)$	第二种第三类复数球柱函数
$i_p(x)$	第一类变形球贝塞尔函数
$k_p(x)$	第二类变形球贝塞尔函数
$\hat{C}_{ip}(x)$	第一类复数球柱多项式
$\hat{C}_{ip}(x,\theta)$	变形复数球柱函数
$k_{ip}(x)$	第二类变形复数球柱多项式
$B_{ip_n}(x)\mathrm{e}^{in\theta}$	复数球柱函数
$M_{is}(z,\theta)$	一般复数柱面函数
$\hat{O}_{s_{n,m}}(z)$	第一类参数复数柱面多项式
$\hat{O}_{s_{n,m}}(z,\theta)$	第一类参数复数柱函数
$P_n(x)$	第一类勒让德函数
$Q_n(x)$	第二类勒让德函数
$Z_{is}(x,\varphi)$	复数球面函数
$Z_{s_1}(x),Z_{s_2}(x),Z_{s_3}(x),Z_{s_4}(x)$	分别为第一、二、三、四种球多项式
$\Omega_{m,n}^{(1)}(x)$	第一类复数球多项式
$\Omega_{m,n}^{(2)}(x)$	第二类复数球多项式
$Z_{is}(x,\varphi,\lambda)$	参数复数球面函数
$\Omega_{m,n}^{(1)}(x,\lambda)$	第一种参数复数球多项式
$\Omega_{m,n}^{(2)}(x,\lambda)$	第二种参数复数球多项式
$Z_{s_1}(x,\lambda),Z_{s_2}(x,\lambda),$ $Z_{s_3}(x,\lambda),Z_{s_4}(x,\lambda)$	分别为第一、二、三、四种参数球多项式
$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi)$	缔合复数球面函数
$\hat{\Omega}_{m,n}^{(1)}(x)$	第一类缔合复数球多项式
$\hat{\Omega}_{m,n}^{(2)}(x)$	第二类缔合复数球多项式

$\hat{Z}_{s_1}(x),\hat{Z}_{s_2}(x),\hat{Z}_{s_3}(x),\hat{Z}_{s_4}(x)$	分别为第一、二、三、四种缔合球多项式
$\hat{Z}_{is}(\theta,\varphi,\lambda)$	参数缔合复数球面函数
$\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda),\hat{Z}_{s_2}(x,\lambda),$ $\hat{Z}_{s_3}(x,\lambda),\hat{Z}_{s_1}(x,\lambda)$	分别为第一、二、三、四种参数缔合球多项式
$H(\xi)=\int_0^\infty xf(x)\mathrm{J}_\nu(\xi x)\mathrm{d}x$	$f(x)$ 的 ν 阶汉克尔变换
$Z(\alpha)=\int_0^\infty xf(x)\left[Z_{ip}(\alpha x)\right]^* dx$	$f(x)$ 的 ip 阶复数柱函数变换
$F_z(\alpha_j)=\int_0^R rf(r)\left[Z_{ip}\left(\alpha_j\frac{r}{R}\right)\right]^*\mathrm{d}r$	$f(r)$ 的有限复数柱函数变换
$H(\alpha)=\int_0^\infty x^2f(x)\left[C_{ip-\frac{1}{2}}(\alpha x)\right]^*\mathrm{d}x$	$f(x)$ 的 $(ip-\frac{1}{2})$ 阶复数球柱函数变换
$H_z(\alpha_j)=\int_0^R r^2f(r)\left[C_{ip-\frac{1}{2}}\left(\alpha_j\frac{r}{R}\right)\right]^*\mathrm{d}r$	$f(r)$ 的有限复数球柱函数变换
$G(\beta)=\int_0^\infty xf(x)\left[\hat{Z}_{ip}(\beta x)\right]^*\mathrm{d}x$	$f(x)$ 的 ip 阶变形复数柱函数变换
$G_z(\beta_j)=\int_0^R rf(r)\left[\hat{Z}_{ip}\left(\beta_j\frac{r}{R}\right)\right]^*\mathrm{d}r$	$f(r)$ 的有限变形复数柱函数变换
$Y(\beta)=\int_0^\infty x^2f(x)\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}(\beta x)\right]^*\mathrm{d}x$	$f(x)$ 的 ip 阶变形复数球柱函数变换
$Y_z(\beta_j)=\int_0^R r^2f(r)\left[\hat{C}_{ip-\frac{1}{2}}\left(\beta_j\frac{r}{R}\right)\right]^*\mathrm{d}r$	$f(x)$ 的有限变形复数球柱函数变换
$Z(\alpha,n)$	$f(r,\theta)$ 的 $ip\times n$ 阶二重复数柱函数变换
$Q(\alpha,n)$	$f(r,\theta)$ 的 $(ip-\frac{1}{2})\times n$ 阶二重复数球柱函数变换
$X(\beta,n)$	$f(r,\theta)$ 的 $ip\times n$ 阶二重变形复数柱函数变换
$Y(\beta,n)$	$f(r,\theta)$ 的 $(ip-\frac{1}{2})\times n$ 阶二重变形复数球柱函数变换
$C(\alpha,n,\omega)$	$f(r,\theta,z)$ 的 $ip\times n\times\omega$ 三重复数柱函数变换

目　录