普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

主编 王洪珂 王晓峰 严羿鹏

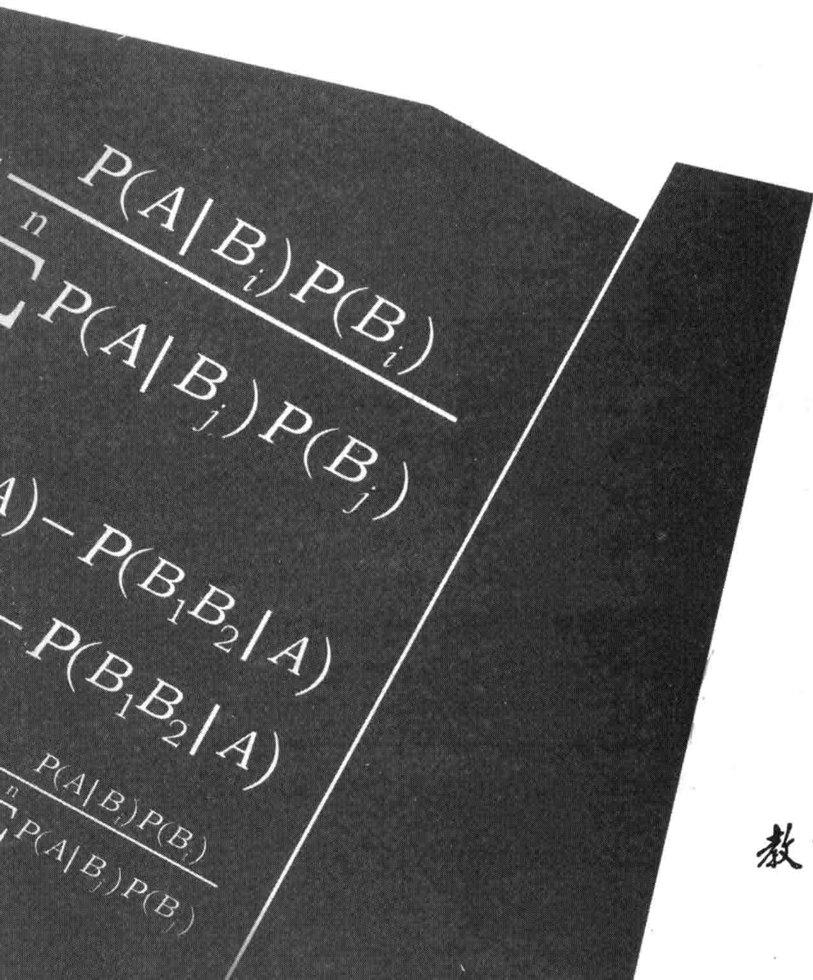
教育科学出版社
ESPH Educational Science Publishing House

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

主编 王洪珂 王晓峰 严羿鹏



教育科学出版社
·北京·

出 版 人：所广一
责任编辑：殷　欢
责任校对：贾静芳
责任印制：曲凤玲

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王洪珂，王晓峰，严羿鹏主编.
—北京：教育科学出版社，2012.7
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5041-6494-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… ②王… ③严… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 143322 号

普通高等教育“十二五”规划教材
概率论与数理统计
GAILULUN YU SHULI TONGJI

出版发行	教育科学出版社		
社　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	市场部电话	010-64989571
邮　编	100101	编辑部电话	010-64981269
传　真	010-64891796	网　址	http://www.esph.com.cn
经　销	各地新华书店		
印　刷	北京市全海印刷厂		
开　本	185 毫米×260 毫米　16 开	版　次	2012 年 7 月第 1 版
印　张	11.5	印　次	2012 年 7 月第 1 次印刷
字　数	294 千	定　价	25.00 元

编　委　会

主　编　王洪珂　王晓峰　严羿鹏

副主编　钟　桦　左　宁　李国敏　杨　懿

编　委　何　兰　黎　彬　李可人　何　勇

邹丽娜　田学全　王月清　邬　毅

龙　兰　许　亮　郭仿平　谭　婕

唐　艳　薛善增　陈小强　张正萍

周定均　陈照辉　王　蕾　刘莉莎

李春艳　唐利明　杨文艳

前 言

概率论与数理统计是一门探索和研究客观世界随机现象规律的数学学科，是高等院校本、专科有关专业的一门必修专业基础课程。它以随机现象为研究对象，在石油、冶金、地质、金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、气象与自然灾害预警等方面都起着非常重要的作用。随着计算机科学的发展，以及功能强大的统计软件和数学软件的开发，概率论与数理统计学科得到了蓬勃的发展。它不仅自身形成了结构宏大的理论，而且在自然科学和社会科学的各个领域应用越来越广泛。

本书主要包括概率论与数理统计两个方面的内容，涵盖了概率论与数理统计课程的基本要求。基于非数学专业的概率论与数理统计课程的学时限制，本书重点放在概率论与数理统计的基本概念、基本原理和基本方法等方面，有些内容不再做深入讨论。遵循目前我国高校理、工、农(林)、经(管)类专业概率论与数理统计课程设置惯例，本书按48学时安排教学内容。根据专业的不同需要，教师可以在此基础上酌减相应内容(例如带“*”的内容)。另外，本书中对小字排印的内容(包括某些定理的证明过程和应用方面的拓展阅读)不作要求。

本书的编写工作由下列老师完成：王洪珂编写第一章，王晓峰编写第二章，严羿鹏编写第三章，钟桦编写第四章，左宁编写第五章，李国敏、杨懿编写第六章。参编的还有：邬毅、何兰、黎彬、李可人、何勇、邹丽娜、田学全、王月清、龙兰、许亮、郭仿平、谭婕、唐艳、薛善增、陈小强、张正萍、周定均、陈照辉、王蕾、刘莉莎、李春艳、唐利明、杨文艳等。

本书在编写过程中，参考了相关的教材和参考书籍，重庆科技学院教务处、科研处、数理学院等部门领导对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此一并致谢。

为编写此书，作者付出了艰辛劳动，由于编写时间仓促，书中疏漏、不妥之处在所难免，恳请各位专家、同行、读者予以批评指正，在此深表谢意。

编　者

目　　录

预备知识　排列组合

作为学习概率论与数理统计的预备知识,将排列和组合知识归纳总结如下.

一、两条基本原理

1. 加法原理

若完成一件事情有 r 类方式,其中第一类方式有 n_1 种方法,第二类方式有 n_2 种方法,…,第 r 类方式有 n_r 种方法,这些方法各不相同,只要用其中任何一种方法都可以把这件事完成,则完成这件事情共有

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

种不同的方法.

例 1　从甲地到乙地有三类方式:可以乘汽车、轮船或飞机,若一天中有汽车 3 班,轮船 2 班,飞机 1 班,那么从甲地到乙地有共有

$$3 + 2 + 1 = 6$$

种方法.

2. 乘法原理

若完成一件事情有 r 个步骤,其中第一个步骤有 m_1 种方法,第二个步骤有 m_2 种方法,…,第 r 个步骤有 m_r 种方法,各个步骤连续或同时完成,这件事才算完成,则完成这件事情共有

$$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_r$$

种不同的方法.

例 2　从甲地到丙地必须经过乙地,从甲地到乙地有 2 条路线,从乙地到丙地有 3 条路线,则从甲地到丙地有共有

$$2 \times 3 = 6$$

种方法.

以上两条基本原理在排列组合中将会反复使用. 这两条原理回答的都是“关于完成一件事情的不同方法的种数的问题”,但又有本质区别:加法原理针对的是“分类”问题,乘法原理针对的是“分步”问题.

二、排列

1. 元素不允许重复的排列

例 3 用 1、2、3、4 四个数字可以组成多少个数字不重复的两位数?

解 要组成数字不同的两位数,需要经过两个步骤:第一步,先确定十位上的数字,1、2、3、4 都可以,故有四种方法;第二步,先确定个位上的数字,若要求个位与十位数不重复,所以只能够从所给的四个数中去掉十位上的数字后剩下的三个数字中任选一个,共有三种方法,于是结合乘法原理共有 $4 \times 3 = 12$ 种方法,组成了 12 个不重复的两位数.

定义 1 从 n 个不同的元素中,每次取出 m 个($m \leqslant n$) 不同的元素按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列. 所有这样排列的个数称为排列数,记为 A_n^m,其中

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

特别的,当 $m < n$ 时,该排列称为选排列;当 $m = n$ 时,该排列称为全排列,且

$$A_n^n = n!.$$

2. 元素可以重复的排列

元素可以重复包括元素重复和元素不重复两种情况,不能简单地认为元素可以重复就是元素重复,元素可以重复的排列指的是在排列中允许出现相同的元素.

下面来讨论从 n 个不同的元素中允许重复地任取 m 个元素组成的排列的种数.

从 n 个不同的元素中任取一个放在第一个位置上共有 n 种方法,然后把该元素放回去,再从这 n 个元素中任取一个放在第二个位置上仍有 n 种方法,…,按这种方法进行 m 次,每次都有 n 种方法,根据乘法原理,可从 n 个不同元素中允许重复地任取 m 个元素组成的重复排列的个数为

$$n \times n \times \cdots \times n = n^m.$$

例 4 移动电话号码为 11 位,以 130 开头可以组成多少个号码?

解 由于前三位130已确定,故只需要确定后八位的数字. 显然,电话号码中可以出现相同的数字,而要确定后八位的数字需要经过 8 个步骤,第一步是确定第四位上的数字,应从0 到9 这 10 个数字中任取一个放在第四位上,共 10 种方法;第二步是确定第五位上的数字,应从 0 到 9 这 10 个数字中任取一个放在第五位上,仍有 10 种方法;…;第五步是确定第八位上的数字,应从 0 到 9 这 10 个数字中任取一个放在第八位上,仍有 10 种方法,根据乘法原理,确定后八位的数字共 10^8 种方法,从而以 130 开头可以组成 10^8 个号码.

例 5 由 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字所组成的三位数中,求:(1) 没有重复的数字有几个;(2) 三个数字都相同的有几个;(3) 恰好有两个数字相同的有几个?

解 (1) 百位上的数字除0 外有9 种不同的取法;取定后,由于不允许重复,但0 可以加入供选用,故十位上的数字也有 9 种不同的取法;在百位、十位上的数字取定后,个位上的数字有 8 种不同的取法。因此由乘法原理可以组成 $9 \times 9 \times 8 = 648$ 种没有重复数字的三位数;

(2) 由于百位上的数字有 9 种不同的取法，而根据“三数字都相同”的要求，百位上的数字取定后，十位、个位上的数字也相应取定，故三数字都相同的三位数有 9 种；

(3) 百位上的数字与十位上的数字相同的三位数的个数为 $9\times 9=81$，百位上的数字与个位上的数字相同的三位数的个数为 $9\times 9=81$，百位确定后，十位与个位上的数字相同的三位数的个数为 $9\times 9=81$，由加法原理，恰好有两个数字相同的三位数的个数为 $81+81+81=243$.

三、组合

通过对排列的讨论可知，它是一个与次序有关的概念，例如从甲地到乙地的飞机票与从乙地到甲地的飞机票是两种不同的飞机票，又如选同学 A 任班长、同学 B 任副班长与同学 A 任副班长、同学 B 任班长是两种不同的职务安排. 但在实际问题中经常遇到一些与次序无关的问题：如选 A、B 两人为代表出席一个会议与选 B、A 两人为代表是同一种选法，又如“会计与物流专业之间进行的篮球赛”和“物流与会计专业之间进行的篮球赛”是同一场比赛，因此这是一个与排列概念不同的问题.

定义 2　从 n 个不同的元素中，每次取出 m 个 $(m\leqslant n)$ 不同的元素，不考虑顺序组成一组，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的组合. 所有这样组合的个数称为组合数，记为 C_n^m.

由于求“从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数 A_n^m”可按以下两个步骤进行：第一步先求出从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m，第二步求出每一个组合中 m 个元素的全排列数 A_m^m，根据乘法原理有 $A_n^m=C_n^mA_m^m$，于是有

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

关于组合数，由其计算公式有以下性质：

$$C_n^m=C_n^{n-m}.$$

对于实际问题，要正确判别其是排列问题还是组合问题，其关键在于区别要不要将索取的元素进行排列，若要排列则是排列问题，若无需排列则是组合问题.

例 6　盒子中有 6 个红球 3 个白球，任取 5 个球，求：(1) 共多少种取法；(2) 恰好有 1 个白球的取法数；(3) 至少有 2 个白球的取法数；(4) 至多有 1 个白球的取法数.

解　(1) 从 $6+3=9$ 个球中任取 5 个球，共 $C_9^5=126$ 种取法；

(2) 任取 5 个球中恰好有 1 个白球，即所取球中 1 白 4 红，完成这个事情需要经过两个步骤：先是从 3 个白球中任取 1 个，共 C_3^1 种取法；再从 6 个红球中任取 4 个，共 C_6^4 种取法。根据乘法原理，共 $C_3^1\cdot C_6^4=C_3^1\cdot C_6^2=45$ 种取法；

(3) 任取 5 个球中至少有 2 个白球，包括“2 白 3 红”和“3 白 2 红”两种情形，结合乘法原理与加法原理，共 $C_3^2\cdot C_6^3+C_3^3\cdot C_6^2=75$ 种取法；

(4) 任取 5 个球中至多有 1 个白球，包括“1 白 4 红”和“0 白 5 红”两种情形，结合乘法原理与加法原理，共 $C_3^1\cdot C_6^4+C_3^0\cdot C_6^5=51$ 种取法.

第一章　随机事件及其概率

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，大体可以归结为两种情形：有一类现象是可以事前预言的，即在一定条件下必然发生，也可以说为"条件完全决定结果"的现象，称为确定现象或必然现象. 例如，向上抛一枚石子必然落下，异性电荷必相互吸引，等等. 另一类现象是不可预言的，即"条件不能完全决定结果"的现象，称为非确定现象、偶然现象或随机现象. 例如，在相同条件下抛掷一枚质地均匀的硬币，结果可能是面额朝上，也可能是图案朝上，又如用同一把枪向同一目标射击，各次子弹着点不尽相同，等等. 后一类现象在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，但人们经过长期实践并深入研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现某种规律性. 例如，质地均匀的硬币抛掷多次，正面与反面出现的次数的比例是 1 : 1，而且抛掷次数越多，越接近该比值. 随机现象在大量重复试验或观察中出现的某种故有的规律，就是我们以后所要提到的统计规律性.

§1.1　随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象内部存在的规律性，就要对随机现象进行观测或实验，观测或实验的过程叫做**试验**，通常用 $\boldsymbol{E}$ 表示，例如：

例 1.1.1　E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

例 1.1.2　E_2：抛一枚硬币三次，观察正面、反面出现的情况.

例 1.1.3　E_3：抛一枚硬币三次，观察正面出现的次数.

通过分析不难发现，上述三个试验具有以下三个共同特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能准确预言该次试验所出现的准确结果.

具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称为**试验**，通常用字母 $E_1, E_2, \cdots$ 表示，每次试验的一个可能结果称为**样本点**，记作 $\omega_1, \omega_2, \cdots$，因为随机试验的可能结果是确定的，从而所有的样本点也是确定的，所有样本点的集合称为**样本空间**，记作 Ω，即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\},$$

也就是说，任何一次试验的结果一定是样本空间的一个样本点.

如 E_2，抛一枚硬币三次，观察正面、反面出现的情况，其样本空间为

$$\Omega_2 = \{正正正,正正反,正反正,正反反,反正正,反正反,反反正,反反反\},$$

该集合中的每一个元素都为其样本点；

又如 E_3，抛一枚硬币三次，观察正面出现的次数，其样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,3\},$$

0、1、2、3 都为其样本点.

由上述例子可知：

（1）试验不同，对应的样本空间也不同；

（2）样本空间的元素是由试验的目的所确定的，例如在 E_2 和 E_3 中，都是抛一枚硬币 3 次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

建立样本空间，就是建立随机现象的数学模型. 因此，一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

二、随机事件

若某事件在一次试验中一定发生，则称该事件为**必然事件**，显然必然现象的结果是必然事件；若某事件在一次试验中一定不发生，则称该事件为**不可能事件**，显然它是空集，因此记为 $\varnothing$. 例如，在掷一枚骰子事件中，“点数小于7”是必然事件，“点数不小于7”是不可能事件.

若某事件在一次试验中可能发生也可能不发生，则称该事件为**随机事件**，简称为**事件**，通常用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

由上述定义可知，试验的每一个可能结果是事件，由于这种事件不可以再分解为更简单的事件，所以称这种事件为**基本事件**. 显然，基本事件是含有一个样本点的单点集，而一般事件是含有若干个样本点的集合，即一般事件是由若干个基本事件复合而成，由若干个样本点组成（一些样本点的集合），故事件可以看做是样本空间 Ω 的一个子集.

例如，“在投掷骰子的试验中，点数大于3”的事件 $A = \{4,5,6\}$ 是一个复合事件，是样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集.

必然事件、不可能事件和随机事件有着紧密的联系：如果在某次试验中，某一结果必然发生（如掷一枚骰子时“点数小于7”），那么该结果的反面（即“点数不小于7”）就一定不发生. 不论必然事件、不可能事件，还是随机事件，都是相对于一定的试验条件而言的，如果试验的条件变化了，事件的性质也会发生变化. 例如，掷一枚骰子时“点数小于7”是必然事件，掷两枚骰子时“点数小于7”是随机事件，而掷十枚骰子时“点数小于7”是不可能事件.

我们把不包含任何样本点的集合也看做是一个事件，因为一次试验必然要出现一个样本点，不含样本点的集合是不可能发生的，所以把不含样本点的集合作为一个事件时是不可能事件，仍用 $\varnothing$ 表示；样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的一个子集，由于每次试验中它总是发生，因此 Ω 是必然事件.

概率论所研究的都是随机事件，为了讨论方便，将必然事件和不可能事件也当做随机事件，并且作为随机事件的两个极端情况.

在每次试验中,当且仅当这个子集中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**.

例 1.1.4 某人射击一次,则:

(1) 该试验在相同条件下可重复进行,而且每次试验的可能结果为 10 环,9 环,…,1 环,脱靶,虽然不能够准确预言每次射击所击中的环数,但能事先知道可能出现的全部结果,故该试验是随机试验;

(2) 记样本空间为 Ω,用 ω_i 表示样本点,则该试验包括 11 个样本点,用 ω_i 表示击中第 i 环($i = 0,1,2,\cdots,10$),故样本空间 $\Omega = \{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{10}\}$;

(3) 设事件 A 表示击中奇数环,于是 A 是样本点 $\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9$ 的集合,即 $A = \{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$,若试验结果是 ω_5,即击中第 5 环,则事件 A 发生;若试验结果是 ω_8,即击中第 8 环,则事件 A 不发生;

(4) 在每次试验中,击中的环数最多只能是 10 环,因此,若事件 $B =$ “击中的环数不大于 10”,则 B 一定发生,它是必然事件;在每次试验中,击中的环数不可能大于 10,因此若 $C =$ “击中的环数大于 10”,则事件 C 一定不发生,是不可能事件.

进行一个试验,有这样或那样的事件发生,它们各有不同的特性,彼此之间又有一定的联系. 概率论要解决的重要问题之一就是希望从比较简单的事件的概率中推出比较复杂的事件的概率. 在实际生活中,往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件及它们之间的联系,详细地分析事件之间的关系,不仅可以帮助我们更深刻地认识事件的本质,而且还可以大大简化一些较复杂事件的概率计算,下面就讨论事件间的关系和运算.

三、事件的关系及运算

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系与集合的运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率中的说法,并根据“事件发生”的含义,给出它们在概率中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 $A,B,A_k(k = 1,2,\cdots)$ 为 Ω 的子集.

1. 事件间的关系

(1) 包含关系　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A(或称事件 A 包含于事件 B),记为 $B \supset A$(或 $A \subset B$).

显然,对任一事件 A 都有

$$\varnothing \subset A \subset B.$$

(2) 相等关系　若事件 B 包含事件 A,事件 A 也包含事件 B,即 $B \supset A$ 且 $A \subset B$,则称事件 A 和事件 B 相等,记为 $A = B$.

显然,当 $A = B$ 时,事件 A 和事件 B 包含的样本点相同.

(3) 互不相容　若事件 A 和事件 B 不能同时发生,则称事件 A 和事件 B 互不相容(或互斥).

例如,在从 0,1,2,…,9 中任取一个数时,“取得一个数为 2” 与“取得一个数为 9” 是互不相容事件. 显然,样本点间都是互不相容的.

(4) 互逆关系　若在一次试验中,事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,亦即事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互逆,又称 A 是 B 的对立事件

(或 B 是 A 的对立事件),记 $A = \overline{B}$(或 $B = \overline{A}$).

特别地,“事件 A 不发生”是一个事件,称为 A 的对立事件(或逆事件),记作 $\overline{A}$,又由对立事件的定义可得:

① $A \cup \overline{A} = \Omega$ 且 $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

② $\overline{A} = \Omega - A$.

注意　对立事件与互不相容(互斥)事件的区别:对立事件一定互不相容,互不相容(互斥)事件不一定对立.

2. 事件间的运算

(1) 事件的和　事件 A 和事件 B 中至少有一个发生(即“事件 A 发生或事件 B 发生”是一个事件),称为 A 与 B 的和事件,记为 $A + B$(或 $A \cup B$).

显然,和事件 $A + B$ 是由事件 A 和事件 B 的所有样本点构成的集合,即 $A + B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

推广　n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生,该事件称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件,记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

(2) 事件的积　事件 A 和事件 B 同时发生(即“事件 A 发生且事件 B 发生”是一个事件),称为 A 与 B 的积事件,记为 AB(或 $A \cap B$).

显然,积事件 AB 是由事件 A 和事件 B 所包含的所有公共基本事件构成的集合,即 $AB = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

推广　n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生,该事件称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件,记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$;称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

由事件的积的定义可得:

① 对于任一事件 A 有 $A\Omega = A, A\varnothing = \varnothing$;

② 若 A_1, A_2 互不相容(互斥),则 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

(3) 事件的差　“事件 A 发生且事件 B 不发生”是一个事件,称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B$.

显然,差事件 $A - B$ 是由事件 A 所包含的样本点中去掉积事件 AB 所包含的样本点后所剩余样本点构成的集合,即 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

例 1.1.5　从 0,1,2,…,9 这十个数字中任取一个:

(1) 令 $A =$“取得一数为 4 的倍数”,$B =$“取得一数偶数”,则 $A \subset B$;

(2) 令 $A =$“取得一数为 4 的倍数”,$B =$“取得一数为 3”,则 A 与 B 互不相容(互斥);

(3) 令 $A =$“取得一数为偶数”,$B =$“取得一数大于 5”,则 $A + B =$“取得一数或为偶数,或大于 5”,即 $A + B = \{0,2,4,6,7,8,9\}$;

(4) 令 $A =$“取得一数为偶数”,$B =$“取得一数大于 5”,则 $AB =$“取得一数大于 5 且为偶数”,即 $AB = \{6,8\}$;

(5) 令 $A =$“取得一数为偶数”,$B =$“取得一数大于 5”,则 $A - B =$“取得一数为偶数且小于 5”,即 $A - B = \{0,2,4\}$;

(6) 令 A = “取得一数为偶数”，则$\overline{A}$ = “取得一数为奇数”.

3. 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件，若

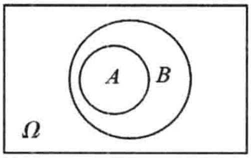
(1) $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，两两互不相容（互斥）；

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组.

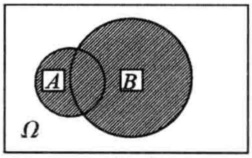
显然，当 $n=2$ 时，A_1,A_2 为对立事件，即对立事件为完备事件组的特殊情况；更特别地，$\forall A$（对于任意集合 A），由于 A 与$\overline{A}$互斥，且 $A+\overline{A}=\Omega$，故事件 A 与其对立事件$\overline{A}$构成最简单的完备事件组.

用图1.1.1 ~ 图1.1.6可直观地表示事件间的各种关系及运算. 例如，在图1.1.1中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A；又如在图1.1.2中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A+B$.



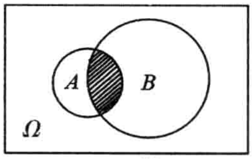
$A\subset B$

图1.1.1



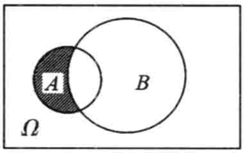
$A+B$

图1.1.2



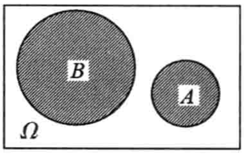
AB

图1.1.3



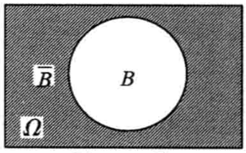
$A-B$

图1.1.4



$AB=\varnothing$

图1.1.5



$B+\overline{B}=\Omega,B\overline{B}=\varnothing$

图1.1.6

例1.1.6 设 A,B,C 是 Ω 中的随机事件，试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件.

(1) 事件“A,B 发生，C 不发生”：$AB\overline{C}$；

(2) 事件“A,B,C 至少有两个发生”：即 A,B,C 中恰有两个发生，或三个都发生，亦即 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $AB+BC+AC$；

(3) 事件“A,B,C 恰有两个发生”：即 A,B,C 中有两个发生时第三个一定不发生，亦即 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(4) 事件“A,B,C 中有不多于一个发生”：即最多一个发生，亦即$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) A,B,C 中至少有一个发生：即 A,B,C 中恰有一个发生，或恰有两个发生，或三个都发生，亦即 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $A+B+C$；

(6) A,B,C 都不发生：即 A,B,C 中没有哪一个发生，亦即 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A+B+C}$；

(7) A,B,C 不都发生：即 A,B,C 不同时发生，或者说至少有一个不发生，即 $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

下面不加证明地给出事件的运算所满足的运算规律：设 A,B,C 为事件，则有

(1) 交换律：$A+B=B+A, AB=BA$；

(2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC)$；

(3) 分配率：$A(B+C)=AB+AC, A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 重叠律：$A\cup A=A, A\cap A=A$；

(5) 否定律：$\overline{\overline{A}}=A, \overline{\Omega}=\varnothing$；

(6) 互逆律：$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$；

(7) 差化律：$A-B=A\overline{B}$；

(8) 吸收律：若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B, AB=A, A\Omega=A, A\cup\Omega=\Omega$；

(9) 对偶律(德摩根律)：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

例 1.1.7　甲、乙各射击一次，设 A = "甲击中目标"，B = "乙击中目标"，那么甲、乙各射击一次，可以经过两个步骤：第一步是甲射击，有击中目标和未击中目标两种可能；第二步是乙射击，也有击中目标和未击中目标两种可能. 根据乘法原理，每次试验的结果有 $2\times2=4$ 种，即四个基本事件：

$$AB,\overline{A}B,A\overline{B},\overline{A}\,\overline{B},$$

故基本事件空间为

$$\Omega=\{AB,\overline{A}B,A\overline{B},\overline{A}\,\overline{B}\},$$

于是有

$$\Omega=AB+\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}.$$

§1.2　随机事件的概率及计算

随机试验中的随机事件(除必然事件和不可能事件外)，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，人们不能事先知道，但它们发生的可能性大小却是客观存在的，即随机事件发生的可能性大小是一个客观存在的量，我们需要找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率与概率的统计定义

定义 1.2.1　在相同的条件下进行 n 次试验，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，记为 $f(A)$.

由定义易知，频率反映了事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 频率越大，事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大；频率越小，事件 A 在一次试验中发生的可能性就越小.

频率具有下述基本性质：

(1) 非负性　$0\leqslant f(A)\leqslant 1$；

(2) 规范性　$f(\Omega)=1, f(\varnothing)=0$;

(3) 有限可加性　对任意有限个是两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有 $f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)$.

考察“抛硬币”这个试验,表 1.2.1 给出了蒲丰、皮尔逊、维尼三个试验者四次抛硬币的试验数据.

表 1.2.1

试验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	出现正面频率 $\frac{m}{n}$
蒲丰	4 040	2 048	0. 506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0. 501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0. 500 5
维尼	30 000	14 994	0. 499 8

不难发现,当投掷次数 n 比较小时,出现正面次数的频率是不稳定的,看不出什么规律;当投掷次数 n 越来越大时,出现正面次数的频率呈现出在常数 0. 5 附近徘徊的明显趋势. 也就是说,在大量重复试验的情况下,某个事件 A 出现的频率是稳定的,它的数值在某个确定的常数附近摆动,而且一般来说,试验的次数越多,事件 A 的频率就越接近那个确定的常数,即在大量的试验中事件 A 具有频率的稳定性,以它来表征事件 A 发生的可能性大小是合适的. 由此,给出如下表征事件 A 发生可能性大小的概率的统计定义:

定义 1. 2. 2　在相同的条件下,重复做 n 次试验,记 n 次试验中事件 A 发生的次数为 n_A,当试验次数很大时,如果频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动,并且一般说来,摆动的幅度随着试验次数的增多而愈变愈小,则称数值 p 为随机事件 A 在该条件下发生的概率,记作 $P(A)=p$.

简单地说,数值 p 就是在一次试验中对事件 A 发生可能性大小的数量描述.

由于任何事件发生的频率 A 大于等于 0 且小于等于 1,因而它发生的概率当然也满足 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;由于必然事件 Ω 发生的频率为 1,故它发生的概率也为 1;不可能事件 $\varnothing$ 发生的频率为 0,故它发生的概率也为 0,由此归结出概率的基本性质如下:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) $P(\varnothing)=0$.

注意　在实际中,我们不可能对某个事件都做大量的试验,从而直接确定某个事件的概率是非常困难的,甚至是不可能的,仅在某些情况下,才可以直接计算事件的概率.

二、古典概型

为了引出概率的古典定义,先看两个引例.

引例 1. 2. 1　事件“投掷一枚匀质骰子所出现的点数”共包含 6 个基本事件,即“出