大学文科数学

（上　册）

徐　岩　主编
周庆欣　李为东　编

科学出版社

大学文科数学

（上册）

徐　岩　主编
周庆欣　李为东　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为高等学校非数学专业的高等数学教材，是根据多年教学经验，参照“文科类本科数学基础课程教学基本要求”，按照新形势下教材改革的精神编写而成. 本套教材分为上、下两册，上册内容包括一元微积分、二元微积分、简单一阶常微分方程等内容. 下册内容为线性代数和概率论与数理统计. 各章配有小结及练习题，并介绍一些与本书所述内容相关的数学家简介.

本书可作为高等学校文科类、艺术类等少学时高等数学课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学：全2册/徐岩主编. 一北京：科学出版社，2014
ISBN 978-7-03-040765-8

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①徐…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106031 号

责任编辑：昌　盛　周金权 / 责任校对：林青梅
责任印制：肖　兴 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 8 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2014 年 8 月第一次印刷　印张：24 1/2
字数：494 000

定价：59.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

当前的时代是信息化时代，也就是数字化时代. 数学对信息化时代的影响是巨大的，同时也是深远的. 20 世纪，随着电子计算机的问世，计算技术得到了迅猛的发展和进步，使得数学不仅仅是自然科学的语言，也逐渐成长为社会科学、文化艺术等诸多社会学领域的不可或缺的语言. 当今社会，数学早已不仅仅是人类思维的载体、人类智慧的试金石，更是诸多学科的思想和方法的描述工具、解决问题的强有力的武器，数学方法本身就是一种思想方法.

在这样一个时代，了解和掌握必要的数学知识对于每一个接受高等教育的人来说，都是十分必要的. 在这样的大背景下，近年国内许多高等学校相继为大学文科学生开设了高等数学课程. 多年的大学教学实践使得编者认识到大学数学教育的目的应包括三个基本方面：一是掌握数学知识、二是提高数学素养、三是培养数学美感.

在现代社会，数学在各个学科的渗透越来越广泛，越来越深入. 统计的方法、组合的方法早已应用于社会科学研究和社会实践活动的很多方面. 而经历上千年酝酿，几百年发展起来的微积分学则被认为是人类智慧发展的一个顶峰. 微积分的发现帮助社会解决了大量的实际问题，促使人类获得更大的进步. 在当今社会，微积分仍然发挥着巨大的作用，因此掌握基本的微积分知识和方法对于大学本科生是十分必要的.

大学数学教育的目的之一就是提高学生的数学素养，培养学生使用数学工具解决实际问题的意识、思想和能力. 知识的重要价值之一就是它的实用性. 对于一个大学文科生而言，建立起用数学方法解决问题的意识和观点比单纯掌握数学知识重要得多. 因此，本书选择了一些应用型问题作为例题或习题，目的是为学生展示微积分在解决实际问题的过程中是如何发挥作用的.

美是人类最高级别的一种意识感受. 伽利略说过数学是上帝用来书写宇宙的文字，数学中充满了各种各样的美的要素. 数学的简洁性、抽象性、和谐性无不体现着数学美. 但是，由于数学知识抽象难懂和人们对数学美的无意识性，使得大多数人很难从数学中体会到美的存在. 培养学生美的意识和欣赏美的能力也是大学文科数学课程的重要任务之一，这有助于真正培养学生对数学的兴趣和爱好，培养学生的数学意识.

有鉴于此，编者在课堂教学内容、课后学习资料等诸多环节进行了精心的选择，希望本教材可以尽可能多地为学生带来益处.

本套教材分为上、下两册，上册内容包括微积分和常微分方程，下册内容包括线性代数与概率统计.

2005 年，我校开始在文法学院等文科专业设置数学课，内容包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等内容. 2006 年开始立项自编校内讲义，并于 2007 年完成，该讲义作为校内讲义正式开始使用，其间又几经修改成现在的教材. 本教材的编写和正式出版还得到“十二五”高等学校本科教学质量与教学改革工程建设项目和北京科技大学教材建设经费资助.

在讲义与教材的编写过程中，周庆欣老师编写了函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分；李为东老师编写了中值定理及其应用，线性代数部分；胡志兴老师编写了古典概型部分；徐岩老师编写了二元函数，微分方程，概率论与数理统计部分并负责全书统稿. 郑连存教授、范玉妹教授、廖福成教授等多位老师提出了丰富而宝贵的意见和建议，编者对诸位老师的热情帮助非常感谢，在此一并致谢.

编　者

2014 年 6 月于北京

目　　录

(上　　册)

（下　册）

第 1 章　函数与极限

本章主要介绍高等数学的函数、极限、函数的连续性等基本概念以及它们的一些基本性质.

1.1　函　　数

1.1.1　集合

集合(或简称**集**)是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**，通常用大写字母表示集合，事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$(读作 a 属于 M)，事物 a 不是集合 M 的元素，记作 $a \notin M$(读作 a 不属于 M).

由有限个元素组成的集合称为**有限集**，由无穷多个元素组成的集合称为**无限集**. 集合一般有两种表示方法:列举法和示性法(描述法)，**列举法**就是把集合的元素都列举出来. 例如，A 是由 2，3，4，6 这四个数字组成的集合，记作

$$A = \{2,3,4,6\}.$$

示性法就是给出集合元素的特性，用

$$A = \{x \mid x\text{具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 x 所构成的集合，如

$$B = \{2n \mid n < 4\},\quad C = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}.$$

本书用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特殊声明，以后提到的数都是实数. 不含有任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$，如方程 $(x+1)^2 + 3 = 0$ 的实数解的解集合就是空集. 注意空集 $\varnothing$ 与 $\{0\}$ 不是一回事.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，那么称 A 为 B 的**子集**，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$(读作 A 包含于 B 或 B 包含 A). 规定空集为任何集合的子集.

例 1.1.1　设 $A = \{2,4,6\}$，$B = \{2,4\}$，则 $B \subset A$.

设 A,B 是两个集合，如果 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，那么称集合 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

例 1.1.2　设 $A = \{2,3\}$，$B = \{x \mid x\text{为方程 } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 的解}\}$，则 $A = B$.

设 A,B 是两个集合，称集合 $\{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**，即由 A 与 B 的全体元素构成的集合，记作 $A \cup B$.

例 1.1.3 设 $A=\{2,4,6,7,9\}$, $B=\{2,5\}$, 则 $A\cup B=\{2,4,5,6,7,9\}$.

集合的并有以下性质.

(1) $A\subset(A\cup B)$, $B\subset(A\cup B)$;

(2) $A\cup\varnothing=A$, $A\cup A=A$.

设 A,B 是两个集合，称集合 $\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，即由 A 与 B 的公共元素构成的集合，记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 互不相交.

例 1.1.4 设 $A=\{2,4,6,7,9\}$, $B=\{2,5\}$, $C=\{5,8\}$, 则 $A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$.

集合的交有以下性质.

(1) $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$;

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cap A=A$.

1.1.2 区间与邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$, 数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为**开区间**，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\notin(a,b)$, $b\notin(a,b)$. 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$, $b\in[a,b]$. 类似地可以定义

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**，数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 此外，还有所谓的无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大)及 $-\infty$ (读作负无穷大)，则无限的半开或开区间表示如下.

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

全体实数的集合 **R** 也记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间. 注意，$-\infty$ 和 $+\infty$ 都只是表示无限性的一种记号，它们都不是某个确定的数，因此不能像数一样地进行运算.

以后如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的、无限的、开的、闭的、半开的、半闭的)都适用，为了避免重复论述，就用区间“I”代表各种类型的区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 表示以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 **δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

x_0 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**. 如图 1.1 所示.

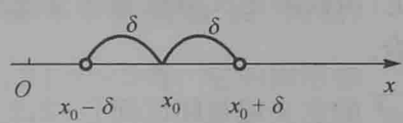

图 1.1

如果 x_0 的 δ 邻域不包含点 x_0，即 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，则称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**. 这里 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\neq x_0$，如 $\{x \mid 0<|x-2|<1\}$ 表示以 2 为中心，半径为 1 的去心邻域，可表示为 $(1,2)\cup(2,3)$.

1.1.3　函数

在中学时已经学习过函数的概念，而函数是微积分学研究的对象，在问题的研究过程中保持不变的量称为**常量**，可以取不同数值的量称为**变量**.

例 1.1.5　设物体下落的时间为 t，下落的路程为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，不计空气阻力，那么 s 与 t 之间的对应关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，按上式 s 就有确定的数值与之对应.

设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 依赖与 x. 如果对于 x 的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一的值和它相对应，y 就称为 x 的**函数**，x 称为**自变量**，x 的取值范围称为函数的**定义域** D，y 称为**因变量**，与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$，称为函数 f 在点 x 处的**函数值**. 例如，当 x 取值 $x_0\in D$ 时，y 的对应值就是 $f(x_0)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有数值时，对应的全

体函数值所组成的集合

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的:前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的关系，后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上也常用记号 $f(x)$ 或 $y=f(x)$ 来表示函数.

历史上“函数”一词是由著名的德国数学家莱布尼茨(Leibniz)首先引入的，但当时没有给出一个完整的概念，后来由欧拉(Euler)等人不断修正，扩充才逐步形成一个较为完整的函数概念.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如例 1.1.5 中的定义域 $D=[0,T]$. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定:函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数值所组成的集合.

例如,函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-2,2)$.

在定义中，用“唯一确定”来表明所讨论的函数都是单值的，所谓**单值函数**就是对于 X 中的每一个 x 都有一个而且只有一个 y 的值与之对应的函数；对于 X 中的每一个 x 都有至少一个 y 的值与之对应的函数，称为**多值函数**，本书只讨论单值函数.

下面举几个常用函数的例子.

例 1.1.6 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

这个函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.2 所示.

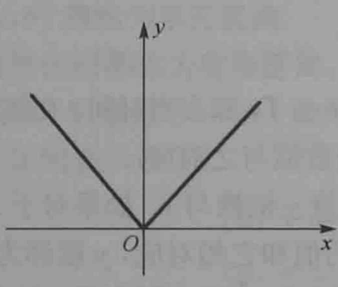

图 1.2

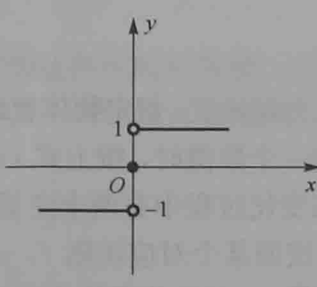

图 1.3

例 1.1.7　符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.3 所示. 对于任何一个实数 x，下列关系成立：$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$. 例如，$\operatorname{sgn}(-5)\cdot|-5|=-1\cdot 5=-5$.

在例 1.1.6 和例 1.1.7 中，可以看到有时一个函数是用几个式子来表示的，这种在不同范围中用不同式子表示的函数称为分段函数.

例 1.1.8　取整函数 $y=[x]$ 表示对于任一实数 x，取不超过 x 的最大整数. 整函数的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数 $\mathbf{Z}$. 例如，$\left[\dfrac{3}{4}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[-4.2]=-5$ 等. 它的图形如图 1.4 所示.

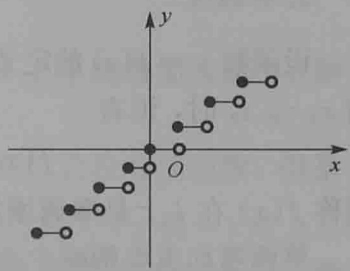

图 1.4

1.1.4　函数的几种特性

1. 奇偶性

设函数的定义域 X 为一个**对称数集**，即当 $x\in X$ 时，有 $-x\in X$. 若函数满足

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in X,$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若函数满足

$$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in X,$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$y=\sin 2x$，$y=x^5$ 等都是奇函数，而 $y=\cos x$，$y=x^2$ 都是偶函数，而 $y=x+\cos x$ 是非奇非偶函数. 不难看出，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使得对于任一 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 X **内有界**，M 称为 $f(x)$ 的一个界. 否则称函数 $y=f(x)$ 在 X **内无界**.

例如，$y=\sin 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 $|\sin 2x|\leqslant 1$；而 $y=\dfrac{1}{x}$

在 $(0,1]$ 上是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$. 但在 $[1,+\infty)$ 是有界的，例如，可取 $M=2$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 2$.

有界函数的界不是唯一的. 例如，$y=\sin 2x$，不仅 1 是它的界，3，4 及任何一个大于 1 的数都是它的界.

函数有界的定义也可以这样表述：如果存在常数 M_1 和 M_2，使得对任一 $x \in X$，都有 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$，就称函数 $y=f(x)$ 在 X 内有界，并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 的一个下界和一个上界.

3. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 \leqslant x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \, (f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加(减少)**的.

单调增加或单调减少函数通称为**单调函数**，常函数 $y=C(-\infty<x<+\infty)$ 既是一个不增函数又是一个不减函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$，$x \in \mathbf{R}$，若存在 $T_0>0$，使得对于定义域内的任何 x 值，$x \pm T_0$ 仍在定义域内且关系式 $f(x+T_0)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T_0 为其**周期**(通常所说的周期函数的周期是指最小正周期).

例如，$y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π.

1.1.5　反函数与复合函数

1. 反函数

在初等数学中，已经知道对数函数 $y=\log_a x\,(x>0, a>0$ 且 $a \neq 1)$ 与指数函数 $y=a^x\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 互为反函数. 一般地说，在函数关系中，自变量和因变量都是相对而言. 例如，我们可把圆的周长 l 表示为半径 r 的函数 $l=2\pi r$，也可以把半径 r 表示为周长 l 的函数 $r=\dfrac{l}{2\pi}$. 对于这两个函数而言，我们可以把后一个函数看成前一个函数的反函数，也可以把前一个函数看成后一个函数的反函数，下面给出反函数的定义.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是数集 W. 若对每一个 $y \in W$，都有唯一的 $x \in D$ 满足关系 $f(x)=y$，那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到一个定义在 W 上的新函数. 这个新函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x = f^{-1}(y).$$

这个函数的定义域为 W，值域为 D. 相对反函数来说，原来的函数 $y = f(x)$ 为直接函数. 习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此把函数 $y = f(x)$ 的反函数写成 $y = f^{-1}(x)$ 的形式，从而函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

例 1.1.9　求 $y = 2x - 1$ 的反函数.

解　由 $y = 2x - 1$ 可以求出 $x = \dfrac{y+1}{2}$，将上式中的 x 换成 y，y 换成 x，得到 $y = 2x - 1$ 的反函数为 $y = \dfrac{x+1}{2}$.

一般地，有如下的关于反函数存在性的充分条件.

若函数 $y = f(x)$ 定义在某个区间上并在该区间 I 上单调增加或减少，则它的反函数必存在.

函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数，所以它没有反函数，但是当 $y = x^2$ 定义在 $(0, +\infty)$ 或 $(-\infty, 0)$ 上时，其反函数分别为 $\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$.

同理正弦函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数对应的，所以也没有反函数，将其限制在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上时有反函数 $y = \arcsin x$.

2. 复合函数

对于某些函数，如 $y = \ln(x^2 + 1)$，可以看成将 $u = x^2 + 1$ 代入到 $y = \ln u$ 之中而得到的. 像这样在一定条件下将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的**复合运算**，得到的函数称为**复合函数**.

一般地，若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2 \subset D_1$. 那么对于每个数值 $x \in D_2$，有唯一确定的数值 $u \in W_2$ 与值 x 对应. 由于 $W_2 \subset D_1$，这个值 u 也属于函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_1，因此有唯一确定的值 y 与值 u 对应. 这样，对于每个数值 $x \in D_2$，通过 u 有唯一确定的数值 y 与 x 对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_2.$$

这个函数称为由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，变量 u 称为复合函数的中间变量.

注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的，如 $y = \arcsin u$ 及 $u = x^2 + 4$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u = x^2 + 4$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[4, +\infty)$，而 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，在 $u = x^2 + 4$ 中无论 x 取什么值，对应的 $u \notin [-1, 1]$，因而不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.