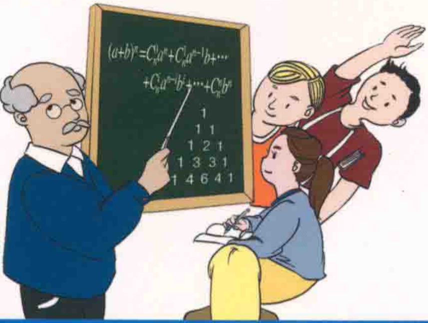


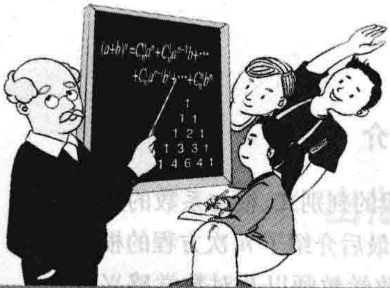
数林外传系列
跟大学名师学中学数学

根与系数的关系及其应用

第2版

◎ 毛鸿翔 编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

根与系数的关系及其应用

第2版

◎ 毛鸿翔　编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书详细介绍了一元二次方程根的判别式、根与系数的关系及其在初等数学解题中的广泛应用，最后介绍了 n 次方程的根与系数的关系.本书适合中学生、中学数学教师以及对数学感兴趣的普通读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

根与系数的关系及其应用/毛鸿翔编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2014.1
(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)
ISBN 978-7-312-03367-4

Ⅰ.根…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.初等代数—中学—教学参考资料
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 263177 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
安徽省瑞隆印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本：880 mm×1230 mm　1/32　印张：4.75　字数：103 千
1981 年 1 月第 1 版　2014 年 1 月第 2 版　2014 年 1 月第 2 次印刷
定价：15.00 元

出版者的话

本书第1版作为《初中学生课外阅读系列》中的一册,由上海教育出版社于1981年出版,累计发行近20万册,广为流传,影响深远.三十多年过去了,虽然作者毛鸿翔教授已经永远地离开了我们,但我们很荣幸地获得了毛教授的儿子毛建勋先生的授权,使得这本经典的小册子能再次与广大读者见面.

本书第2版纳入《数林外传系列:跟大学名师学中学数学》丛书,内容上只做了必要的订正,而版式上改动较大.希望本书能继续获得广大中学师生的喜爱.

出版者

2014年1月

目　次

1 二次方程根的判别式的应用

1.1 二次方程根的判别式

我们知道,对于一般二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$),可以用配方法求得它的根,就是将方程两边同除以二次项系数,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数项移到方程的右边,得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

方程两边同加上一次项系数的一半的平方,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,根据平方根的意义,得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac>0$,方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac=0$,方程有两个相等的实数根

$$x_1=\frac{-b}{2a},\quad x_2=\frac{-b}{2a}.$$

如果 $b^2-4ac<0$,那么,不论 x 是任何实数都不适合这个方程,因为任何实数的平方不等于负数.这时方程没有实数根.

从以上对方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根过程中可以得到如下定理.

定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

(1) 如果 $b^2-4ac>0$,那么方程有两个不等的实数根;

(2) 如果 $b^2-4ac=0$,那么方程有两个相等的实数根;

(3) 如果 $b^2-4ac<0$,那么方程没有实数根.

这个定理的逆命题也是正确的.

逆定理 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$,

(1) 如果它有两个不等的实数根,那么 $b^2-4ac>0$;

(2) 如果它有两个相等的实数根,那么 $b^2-4ac=0$;

(3) 如果它没有实数根,那么 $b^2-4ac<0$.

证明 (1) 如果方程有两个不等的实数根,证明 $b^2-4ac>0$.用反证法证明.假设 $b^2-4ac=0$,由原定理得方程有两个相等的实数根,这与题设相矛盾.假设 $b^2-4ac<0$,由原定理得方程没有实数根,这也与题设相矛盾.所以 $b^2-4ac>0$ 成立.

同理可证，如果方程有两个相等的实数根，则 $b^2-4ac=0$；如果方程没有实数根，则 $b^2-4ac<0$.

由原、逆两定理，我们得到，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac>0$；有两个相等的实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac=0$；没有实数根的充分必要条件是 $b^2-4ac<0$.

由于根据 b^2-4ac 的值可以判定二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的性质，因此我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**根的判别式**，并记为 $\Delta=b^2-4ac$.

在解一元二次方程时，一般先用根的判别式去鉴别一下方程的根的情况，然后求根，若求出判别式 $\Delta<0$，那么这个方程无实数根，就不必去解方程了.

下面我们侧重谈谈怎样用二次方程的根的判别式来判定根的性质以及根据二次方程的根的性质来确定方程中的参数的值.

(1) 判别二次方程根的性质

【例 1】 不解方程，判别它们的根的性质：

(1) $3x^2+4x-4=0$；

(2) $9x^2-12x+4=0$；

(3) $5y^2-7y+10=0$.

解 (1) $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot3(-4)=16+48>0$，

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

(2) $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$，

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根.

(3) $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot5\cdot10=49-200<0$,

∴ 这个方程没有实数根.

【例 2】 不解方程,判别下列方程的根的性质:

(1) $(n^2+1)x^2-2nx+(n^2+4)=0$(n 为实数);

(2) $x^2-(a+b)x+(ab-c^2)=0$(a,b,c 为实数).

解 (1)
$$\begin{aligned}\Delta&=(-2n)^2-4(n^2+1)(n^2+4)\\&=4n^2-4n^4-20n^2-16\\&=-4(n^4+4n^2+4)=-4(n^2+2)^2.\end{aligned}$$

不论 n 是什么实数,$(n^2+2)^2$ 都是正数,因此 $-4(n^2+2)^2$ 是负数,$\Delta<0$,所以方程没有实数根.

(2) $\Delta=(a+b)^2-4(ab-c^2)=(a-b)^2+4c^2\geqslant0$. 所以方程有两个实数根.

当 $a=b$ 且 $c=0$ 时,方程有两个相等的实数根;

当 $a\neq b$ 或 $c\neq0$ 时,方程有两个不相等的实数根.

【例 3】 a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 的三边,讨论方程

$$x^2+2ax+b^2+c^2=0$$

的根的情况.

解 $\Delta=4a^2-4(b^2+c^2)$. (1)

∵ a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 的三边,由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

代入式(1),得

$$\begin{aligned}\Delta&=4(b^2+c^2-2bc\cos A)-4(b^2+c^2)\\&=-8bc\cos A.\end{aligned}$$

∵ a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 的三边,

$\therefore \quad a>0, b>0, c>0.$

当$\angle A$ 为锐角时,$\cos A>0$,$\Delta<0$,方程没有实数根;

当$\angle A=90^{\circ}$时,$\cos A=0$,$\Delta=0$,方程有两个相等的实数根;

当$\angle A$ 为钝角时,$\cos A<0$,$\Delta>0$,方程有两个不等的实数根.

【例 4】 若 a,b,c 为不全相等的实数,证明以下三个二次方程:

$$ax^2+2bx+c=0,$$

$$bx^2+2cx+a=0,$$

$$cx^2+2ax+b=0$$

不可能都得到等根.

证明 若三个二次方程都得到等根,则

$$4b^2-4ac=0, \tag{1}$$

$$4c^2-4ab=0, \tag{2}$$

$$4a^2-4bc=0. \tag{3}$$

$[(1)+(2)+(3)]\div 2$,得

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ac-2ab-2bc=0,$$

即

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0,$$

$$\therefore \quad a=b=c.$$

这与假设 a,b,c 为不全相等的实数相矛盾,所以三个二次方程不可能都得到等根.

【例 5】 已知方程

$$x^2+px+q=0$$

有两个相等的实数根,求证方程

$$(p^2-2q+2)x^2-2p(1+q)x+p^2+2q^2-2q=0$$

也有两个相等的实数根.

证明 由题设条件

$$\Delta_1=p^2-4q=0,\quad \therefore\quad p^2=4q.$$

将 $p^2=4q$ 代入第二个方程的判别式,得

$$\begin{aligned}\Delta_2&=[2p(1+q)]^2-4(p^2-2q+2)(p^2+2q^2-2q)\\&=4[p^2+2p^2q+p^2q^2-(p^4-4p^2q+2p^2q^2-4q^3+8q^2+2p^2-4q)]\\&=4(p^2+2p^2q+p^2q^2-p^4+4p^2q-2p^2q^2+4q^3-8q^2\\&\quad-2p^2+4q)\\&=4(-p^2+6p^2q-p^2q^2-p^4+4q^3-8q^2+4q)\\&=4(-4q+24q^2-4q^3-16q^2+4q^3-8q^2+4q)\\&=4\cdot 0=0.\end{aligned}$$

所以第二个方程也有两个相等的实数根.

(2) 确定二次方程中的参数

应用二次方程根的判别式,由二次方程根的性质,可以确定方程中的参数.

【例 6】 当 a 为何值时,方程 $ax^2-12x+9=0$ 有两个相等的实数根?

解 要使方程有两个相等的实数根,必须 $\Delta=0$,即

$$\Delta=(-12)^2-4\cdot a\cdot 9=0.$$

解这个方程,得 $a=4$.

∴ 当 $a=4$ 时，方程有两个相等的实数根.

【例 7】 当 k 为何值时，方程 $4x^2-8x+k=0$ 有两个不相等的实数根？

解 要使方程有两个不相等的实数根，必须 $\Delta>0$，即

$$\Delta=(-8)^2-4\cdot 4\cdot k>0.$$

解这个不等式，得

$$k<4.$$

∴ 当 $k<4$ 时，原方程有两个不相等的实数根.

【例 8】 已知方程 $2x^2-4x\cos\theta+3\sin\theta=0$ 的两根相等，且 θ 是锐角，求 θ 和这个方程的两个根.

解 要使方程有两个相等的实数根，必须 $\Delta=0$，即

$$\Delta=16\cos^2\theta-24\sin\theta=0.$$

解这个方程，得

$$8(2\cos^2\theta-3\sin\theta)=0,$$

$$2-2\sin^2\theta-3\sin\theta=0,$$

$$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{2},\quad 或\quad \sin\theta=-2(不适合，舍去).$$

$$\because\quad \theta 为锐角,\quad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{6}.$$

将 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ 代入原方程，得

$$2x^2-2\sqrt{3}x+\frac{3}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【例 9】 若整数系数方程

$$2ax^2+2(2a-b-1)x+(2a-2b-1)=0$$

和

$$x^2+(2a+b+3)x+(a^2+ab+6)=0$$

都有两个相等的实数根.求 a,b 的值.

解 由题意知这两个方程的根的判别式皆等于零,即

$$\begin{cases}4(2a-b-1)^2-8a(2a-2b-1)=0,\\(2a+b+3)^2-4(a^2+ab+6)=0.\end{cases}$$

化简整理,得

$$\begin{cases}b^2-2a+2b+1=0,\\b^2+12a+6b-15=0.\end{cases}$$

解方程组,得

$$\begin{cases}a=2,\\b=-3;\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases}a=\dfrac{50}{49},\\b=\dfrac{3}{7}.\end{cases}$$

因为原方程为整数系数方程,所以 $a=2$,$b=-3$ 为所求的值.

【例 10】 若实数 a,b,c,d 都不等于零,且满足

$$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0,$$

求证 a,b,c 成等比数列,且公比为 d.

证明 把$(a^2+b^2)d^2-2b(a+c)d+b^2+c^2=0$ 看作未知数为 d 的二次方程,因为 a,b,c,d 是实数,所以 d 的二次方

程的根的判别式 Δ 不小于 0,即

$$[-2b(a+c)]^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqslant 0.$$

化简,得

$$-4(b^2-ac)^2\geqslant 0,$$

即

$$(b^2-ac)^2\leqslant 0.$$

$\because$　a,b,c 都为实数，　$\therefore$　$(b^2-ac)^2\geqslant 0$.

既要使 $(b^2-ac)^2\leqslant 0$,又要使 $(b^2-ac)^2\geqslant 0$,所以必须 $b^2-ac=0$,即 $\Delta=0$.

$\therefore$　$b^2=ac$，　即 a,b,c 成等比数列.

$$\because\quad d=\frac{2b(a+c)\pm\sqrt{\Delta}}{2(a^2+b^2)}=\frac{2b(a+c)}{2(a^2+ac)}=\frac{b}{a}\quad (a+c\neq 0),$$

$\therefore$　d 为公比.

1.2　二次三项式的值的讨论

实系数二次三项式 ax^2+bx+c 与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是有一定联系的.二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根就是使二次三项式 ax^2+bx+c 的值为零的 x 的值,所以二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根也叫做二次三项式的根.下面我们讨论二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式之间的关系.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

(1) 若 $b^2-4ac<0$,则

$$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0,$$

而$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$,所以有

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0.$$

当 $a>0$ 时,$ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,$ax^2+bx+c<0$.

因此,当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与a 的符号相同.

(2) 若 $b^2-4ac=0$,则

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

(ⅰ) 如果 $x=-\frac{b}{2a}$,那么$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$,因此 ax^2+bx+c 的值等于零.

(ⅱ) 如果 $x\neq-\frac{b}{2a}$,那么$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$.

当 $a>0$ 时,有 $ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,有 $ax^2+bx+c<0$.

因此,当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,若 $x=-\frac{b}{2a}$,则 $ax^2+bx+c=0$,若 $x\neq-\frac{b}{2a}$,则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(3) 若 $b^2-4ac>0$,则

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$
$$=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

这里$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$和$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$就是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 当 $b^2-4ac>0$ 时的两个根,显然

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

用 x_1 表示较小的根,x_2 表示较大的根,则

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

(ⅰ) 如果 $x_1<x<x_2$,则 $x-x_1>0$,$x-x_2<0$.因此

$$(x-x_1)(x-x_2)<0.$$

当 $a>0$ 时,有 $ax^2+bx+c<0$;

当 $a<0$ 时,有 $ax^2+bx+c>0$.

因此,若 $b^2-4ac>0$,$x_1<x<x_2$,则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相反.

(ⅱ) 如果 $x<x_1$,则 $x-x_1<0$,因为 $x_1<x_2$,所以 $x<x_2$,则 $x-x_2<0$,因此$(x-x_1)(x-x_2)>0$.

当 $a>0$ 时,$ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,$ax^2+bx+c<0$.

因此,若 $b^2-4ac>0$,$x<x_1$,则二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(ⅲ) 如果 $x>x_2$,则 $x-x_2>0$,因为 $x_2>x_1$,所以 $x>x_1$,则 $x-x_1>0$,因此 $(x-x_1)(x-x_2)>0$.

当 $a>0$ 时,$ax^2+bx+c>0$;

当 $a<0$ 时,$ax^2+bx+c<0$.

因此,当 $b^2-4ac>0$,$x>x_2$ 时,二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号与 a 的符号相同.

(ⅳ) 若 $x=x_1$,则 $x-x_1=0$,$ax^2+bx+c=0$;

若 $x=x_2$,则 $x-x_2=0$,$ax^2+bx+c=0$.

因此,若 $b^2-4ac>0$,当 $x=x_1$ 或 $x=x_2$ 时,二次三项式 ax^2+bx+c 的值为零.

由以上讨论可以知道:

当 x 取实数值时,实系数二次三项式 ax^2+bx+c 的值的符号由下面的条件来决定:

(1) 如果 $\Delta<0$,那么 ax^2+bx+c 的值与 a 同号.

(2) 如果 $\Delta=0$,而 $x=-\dfrac{b}{2a}$,那么 ax^2+bx+c 的值等于零;如果 $\Delta=0$,而 $x\neq\dfrac{b}{2a}$,那么 ax^2+bx+c 的值与 a 同号.

(3) 如果 $\Delta>0$,而 $x=x_1$ 或 $x=x_2$,那么 ax^2+bx+c 等于零;如果 $\Delta>0$,而 $x<x_1$ 或者 $x>x_2$,那么 ax^2+bx+c 和 a 同号;如果 $\Delta>0$,而 $x_1<x<x_2$,那么 ax^2+bx+c 和 a 异号.

这里 $\Delta=b^2-4ac$,x_1 和 x_2 是 $\Delta>0$ 时二次方程 ax^2+bx