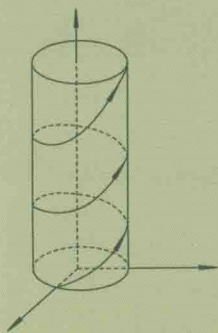


普通高等院校省级规划教材
高等院校数学专业教材



微分几何研究微分流形的几何性质,是现
主流,也是
对论的基础,与
学、代数几何及理
关系密切。

GAO GUANDIAN XIA DE JINGDIAN WEIFEN JIHE

高观点下的 经典微分几何

◎ 黄保军 编著

中国科学技术大学出版社

普通高等院校省级规划教材
高等院校数学专业教材

高观点下的经典微分几何

黄保军 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据多年的微分几何课程的教学经验,并参考国内外的微分几何著作,为本科生编写的微分几何教材.该教材已被列为安徽省省级规划教材.本书主要讲述经典微分几何的曲线论和曲面论,全书共7章,内容包括:预备知识、标架场、空间曲线的 Euclid 几何、曲面上的微积分、形状算子、 \mathbb{R}^3 中的曲面几何、曲面的内蕴几何学.

本书力图用近代微分几何的研究方法去处理经典微分几何问题,目的是让读者能够实现从学习经典微分几何到学习近代微分几何的自然过渡.本书阐述具体,条理清晰,突出几何理念,便于读者理解和掌握.

本书可作为综合性大学和师范院校数学与应用数学和理论物理等专业本科生的微分几何教材,也可作为其他相关专业的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高观点下的经典微分几何/黄保军编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2015.2

ISBN 978-7-312-03679-8

I. 高… II. 黄… III. 微分几何—高等学校—教材 IV. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 027186 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>

印刷 安徽省瑞隆印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×960 mm 1/16

印张 17.75

字数 325 千

版次 2015 年 2 月第 1 版

印次 2015 年 2 月第 1 次印刷

定价 32.00 元

高等院校数学专业教材 编 委 会

主 编 祝东进

副主编(按姓氏笔画排序)

叶森林 姚云飞 黄保军

编 委(按姓氏笔画排序)

王先超 朱玉扬 张节松

周其生 胡万宝 侯为波

郭明乐 唐小峰 黄旭东

前 言

从广义相对论的深入研究,到几何大师陈省身给出的 Gauss-Bonnet 定理的内蕴证明,再到 Yang-Mills 场论与联络论的奇妙对应,直到佩雷尔曼(Perelman)对 Poincaré 猜想正确性的论证,近代微分几何无不在向人们展示着其巨大的威力.而作为近代微分几何入门的本科“微分几何”课程,尽管其研究对象是经典微分几何的曲线论和曲面论,但其内容却集几何、分析、代数于一体,完美地体现了“数”与“形”的奇妙结合和分析与几何的合理交融.通过本课程的学习,学生不但能掌握继续深造所必需的近代几何的基础理论,同时该门课程的研究方法也对学生创新素质的培养和思维品质的提高起到其他课程无法替代的作用.但从十余年来国内出版的微分几何教材的使用情况来看,有些教材通俗易懂,但内容干瘪;有些教材虽用到一点近代几何的新方法,但也是蜻蜓点水,使初学者只知其然,而不知其所以然.随着新的人才培养方案的修订,对培养人才创新素质和实践能力的要求愈来愈高.就“微分几何”课程而言,当下急需编写一套用现代数学的新思想、新观点和新方法去打造经典微分几何内容的新教材.新教材的使用,不但应使学习者完全掌握经典微分几何的基本理论,还应使学习者学到研究近代几何的新方法和新技巧.

这本教材正是在上述背景下产生的.整本教材由 7 章内容组成:作为利用近代观点研究经典微分几何的准备,我们以简述 Euclid 空间上微积分的有关基本概念开篇.紧接着在第 2 章,我们用 E. Cartan 创立的“活动标架法”,对经典微分几何中的曲线论作了简洁而完备的处理.与用其他方法(如向量分析法等)去研究曲线论相比,这种处理方法的优势和利好或许不太明显,但重要的是这种方法的基本思想将深深影响后面对曲面论的研究.第 3 章将通过曲线的曲率和挠率的等距不变性的研究,去揭示空间曲线的 Euclid 几何特征.作为经典微分几何曲面论的开始,我们在第 4 章简要叙述了曲面上微积分的基本知识,本章有关概念的高观点表述,不但对后面各章结论的严格论证是必需的,还会使读者受到现代数学思想的熏陶.第 5 章和第 6 章是 3 维 Euclid 空间中经典微

分几何曲面论的全面展示,其中包括通过计算曲面的几何不变量,并挖掘这些不变量的几何意义,去探讨曲面的形状;还包括曲面的其他性质对曲面形状影响的研究,尤其是曲面的与其形状不直接相关的性质(内蕴性质),是我们在第6章感兴趣的主要内容.3维 Euclid 空间中的曲面既直观,也更接近我们的生活体验,但并非所有曲面都能置于3维 Euclid 空间中,我们将在第7章去挖掘这些曲面的内蕴性质.该章内容的学习,除意在拓宽学习者的几何知识视野外,还将帮助他们迈入近代几何(Riemann 几何与大范围分析)学习的门槛,实现由学习经典几何到学习近代几何的自然过渡.

与国内同类教材相比,本教材具有如下特点:① E. Cartan 的“活动标架法”作为研究经典微分几何的基本方法,外微分形式作为理论论证的基本工具.② 广泛涉及学生的前期基础,为已学知识提供充足的用武之地.学习微分几何,需用到“解析几何”和“数学分析”是自不待言的.本教材还将代数知识用于处理有关问题,充分挖掘代数工具在微分几何中的应用,使学习微分几何的过程成为学生运用“三基”工具的训练场.③ 描述直观,几何特色浓厚.本教材在给出抽象概念的同时,还举出一些具体例子;在简练的公式背后,也能让人看出一些直观的图形,使学习过程变成逻辑理解与形象认识有机结合的过程.④ 习题编排思路独到,有启发和启迪作用.按新的人才培养方案关于培养创新素质、提高实践能力的要求,本教材在编制习题时,将某些有拓广空间和发挥潜力的问题,先以浅显的特殊形式呈现出来,然后步步引申,启发做题者充分开拓思路,深入钻研,这无疑有利于学习者创新素质的培养.

在选材方面,本教材除包含经典微分几何的曲线论和曲面论外,还涉及一部分曲面的拓扑性质及抽象曲面上的 Riemann 几何学等,这些内容均用 * 号标出,供读者选学.在表述方式和结构安排方面,作者一方面大量借鉴了 B. O'Neill 的《Elementary Differential Geometry》一书,某些章节可以说是该书内容的意译,另一方面,也融入了作者多年来在讲授“微分几何”课程时的教学心得.限于作者的水平,书中不足之处肯定是存在的,诚恳希望读者能不吝指正.

最后需要提及的是,在淮北师范大学有关职能部门的大力支持下,这部教材已被安徽省教育厅列为省级规划教材,同时,中国科学技术大学出版社对本教材的编写与出版也给予了大力的支持.作者在此谨表示诚挚的谢意.

黄保军

2014年12月

目 录

前言	(i)
第 1 章 预备知识	(1)
1.1 Euclid 空间	(1)
1.2 切向量	(3)
1.3 方向导数	(6)
1.4 \mathbb{R}^3 中的曲线	(9)
1.5 1-形式	(14)
1.6 微分形式	(18)
1.7 映射	(22)
第 2 章 标架场	(28)
2.1 基本概念	(28)
2.2 Frenet 公式	(32)
2.3 一般曲线	(39)
2.4 协变导数	(48)
2.5 标架场	(51)
2.6 联络形式	(53)
2.7 结构方程	(57)
第 3 章 空间曲线的 Euclid 几何	(61)
3.1 \mathbb{R}^3 上的等距变换	(61)
3.2 等距的切映射	(64)
3.3 定向保持等距	(66)
3.4 空间曲线的 Euclid 几何特征	(69)
3.5 曲线的叠合	(72)

第 4 章	曲面上的微积分	(79)
4.1	\mathbb{R}^3 中的曲面	(79)
4.2	卡的性质	(86)
4.3	可微函数与切向量	(94)
4.4	曲面上的微分形式	(102)
4.5	曲面映射	(108)
4.6	形式的积分*	(114)
4.7	曲面的拓扑性质*	(121)
4.8	流形*	(128)
第 5 章	形状算子	(134)
5.1	$M \subset \mathbb{R}^3$ 的形状算子	(134)
5.2	法曲率	(139)
5.3	Gauss 曲率	(144)
5.4	计算技巧	(150)
5.5	隐式情形	(157)
5.6	曲面上的特殊曲线	(161)
5.7	旋转曲面*	(168)
第 6 章	\mathbb{R}^3 中的曲面几何学	(177)
6.1	基本方程	(177)
6.2	形式运算	(181)
6.3	某些整体定理*	(185)
6.4	等距与局部等距	(190)
6.5	\mathbb{R}^3 中曲面的内在几何	(196)
6.6	正交坐标	(200)
6.7	积分和定向*	(203)
6.8	全曲率*	(208)
6.9	曲面的叠合	(216)
第 7 章	曲面的内蕴几何学*	(221)
7.1	几何曲面	(221)
7.2	Gauss 曲率	(226)

7.3 协变导数	(234)
7.4 测地线	(240)
7.5 Clairaut 参数化	(246)
7.6 Gauss-Bonnet 定理	(254)
7.7 Gauss-Bonnet 定理的应用	(263)
参考文献	(273)

第 1 章 预 备 知 识

这一章的目的是建立本书所要用到的数学语言,其中多数内容是三元函数的微分和曲线微积分的简单回顾.为确保能将这些知识顺利应用于后面曲面的研究,我们将其中的有关概念予以规范表述是有必要的.

1.1 Euclid 空间

3 维空间在数学中一般不被定义而直接运用.为描述空间中一个点的位置,我们可以通过引入直角坐标轴和三个用于度量的数去形象化这一过程,而实现这种形象描述的一个具体定义如下:

定义 1.1.1 有序三数组的全体称为 3 维 Euclid 空间,记作 \mathbb{R}^3 ;数组 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ 称为 \mathbb{R}^3 的一个点.

众所周知, \mathbb{R}^3 依自然的方式构成一个实向量空间,同时,以 \mathbb{R}^3 为背景空间的微积分也是我们今后研究工作的出发点.因此,我们对这方面的基本知识予以梳理.

定义 1.1.2 设 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$,称定义在 \mathbb{R}^3 上的实值函数 $x: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x(\mathbf{p}) = p_1; y: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, y(\mathbf{p}) = p_2; z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, z(\mathbf{p}) = p_3$ 为 \mathbb{R}^3 的自然坐标函数.将这些函数用下标记号记作 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

上述定义表明,坐标函数 x_i 在 \mathbf{p} 的函数值是 p_i ,且对 $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$,有恒等式

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) = (x_1(\mathbf{p}), x_2(\mathbf{p}), x_3(\mathbf{p})).$$

在普通微积分中,对数 p_1, p_2, p_3 与函数 x_1, x_2, x_3 一直未作严格的区别.事实上,对实直线情形,它们的区别或许是不重要的,但对高维情形,它们的混淆有可能导致某些歧义(本质上,这种区别类似于定义在 \mathbb{R}^3 上的函数 f 和其在 \mathbf{p} 的函数值 $f(\mathbf{p})$ 之间的区别).

在微分几何的研究中,常常会涉及高阶偏导数的内容.在实际运算中,为打消

对函数存在多少阶导数的担忧,我们给出如下的定义:

定义 1.1.3 \mathbb{R}^3 上的实函数 f 是可微的(或无限可微的,或光滑的,或 C^∞ 的),如果 f 的任意阶偏导数存在且连续.

“可微实值函数”的语言或许有点啰嗦,因此,我们约定:除特别声明外,本书所涉及的函数均为实值函数,所有函数都假设是可微的,偶尔遇到与假设不相符的情形,我们会随时提醒.

大家已经注意到,微分是函数的局部运算,为计算 $\partial f/\partial x$ 在 \mathbb{R}^3 中点 p 处的值,只需知道 f 在充分靠近 p 处点的值.可见,定义 1.1.3 对 f 的限制有点过, f 不必在整个 \mathbb{R}^3 上都有定义,只需定义在 \mathbb{R}^3 的一个开集上即可(所谓 \mathbb{R}^3 的一个开集 O ,是指如果 p 在 O 中,则充分靠近 p 的 \mathbb{R}^3 中的点也在 O 中.开集严格定义需要拓扑学的知识,这里从略).例如, \mathbb{R}^3 中使得 $p_1 > 0$ 的所有点 $p = (p_1, p_2, p_3)$ 构成的集合即是开集,而且定义在该集合上的函数 $yz \ln x$ 是可微的,显然该函数的定义域不是整个 \mathbb{R}^3 .一般而言,用 \mathbb{R}^3 的任意开集去代替 \mathbb{R}^3 ,本章的结果仍成立.

基于后面绝大部分内容仅以 3 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^3 作为背景空间,所以本章内容只给出 \mathbb{R}^3 中的有关知识,其实,尽管将这些知识向 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 作推广是我们所期待的,但也是容易做到的: n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n 的点是 n 数组 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$,而且,它有 n 个坐标函数 $x_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x_i(p) = p_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

练习 1.1

1. 设 $f = x^2 y, g = y \sin z$ 是 \mathbb{R}^3 上的函数,求下列函数:

(1) fg^2 ; (2) $\frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial g}{\partial x}f$; (3) $\frac{\partial^2 (fg)}{\partial y \partial z}$; (4) $\frac{\partial (\sin f)}{\partial y}$.

2. 求函数 $f = x^2 y - y^2 z$ 在下列点处的函数值:

(1) $(1, 1, 1)$; (2) $(3, -1, 1/2)$; (3) $(a, 1, 1-a)$; (4) (t, t^2, t^3) .

3. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$:

(1) $f = x \sin xy + y \cos xz$;

(2) $f = \sin g, g = e^h, h = x^2 + y^2 + z^2$.

4. 若 g_1, g_2, g_3 和 h 是 \mathbb{R}^3 上的实函数,则

$$f = h(g_1, g_2, g_3)$$

是满足 $f(\mathbf{p}) = h(g_1(\mathbf{p}), g_2(\mathbf{p}), g_3(\mathbf{p}))$ 的实函数. 设 $h = x^2 - yz$, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$(1) f = h(x + y, y^2, x + z);$$

$$(2) f = h(e^z, e^{x+y}, e^x);$$

$$(3) f = h(x, -x, x).$$

1.2 切 向 量

直观上, \mathbb{R}^3 中一个向量是一个有向线段或一个“箭头”, 它在物理和力学中常用来表示力、速度和位移等. 为得到一个实用定义, 我们将利用向量的始点 \mathbf{p} 及其变化 \mathbf{v} 去描述它. 事实上, 若将 \mathbf{p} 固定, 则 \mathbf{v} 恰是 \mathbb{R}^3 中的一个点.

定义 1.2.1 \mathbb{R}^3 的一切向量 \mathbf{v}_p , 由 \mathbb{R}^3 的两个点——其向量部分 \mathbf{v} 和作用点 \mathbf{p} 构成.

注意: 我们说切向量 \mathbf{v}_p 等于 \mathbf{w}_q , 记作 $\mathbf{v}_p = \mathbf{w}_q$, 当且仅当它们有相同的向量部分 $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, 且有相同的作用点 $\mathbf{p} = \mathbf{q}$; 只有相同的向量部分但没有相同的作用点的两切向量, 称为是平行的. 用物理学中的力矩的概念去解释上述切向量相等的定义, 是十分恰当的: 若点 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 不同, 则同一个力 \mathbf{v} 作用在刚体的点 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 处, 将产生完全不同的旋转效果.

定义 1.2.2 设 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, 所有以 \mathbf{p} 为作用点的切向量之集 $T_p \mathbb{R}^3$ 称为 \mathbb{R}^3 在 \mathbf{p} 的切空间(图 1.1).

我们认定 \mathbb{R}^3 在其每一点有不同的切空间. 另外, 我们借助 \mathbb{R}^3 中的向量加法和纯量乘法: $\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p = (\mathbf{v} + \mathbf{w})_p$, $c\mathbf{v}_p = (c\mathbf{v})_p$, 使 $T_p \mathbb{R}^3$ 成为一个向量空间, 且该空间与 \mathbb{R}^3 间存在一个平凡的同构.

定义 1.2.3 \mathbb{R}^3 的一向量场 \mathbf{V} , 是指定义在 \mathbb{R}^3 上的一个向量函数, 即对 \mathbb{R}^3 的每一点 \mathbf{p} , 对应 \mathbb{R}^3 在 \mathbf{p} 的唯一切向量 $\mathbf{V}(\mathbf{p}) \in T_p \mathbb{R}^3$.

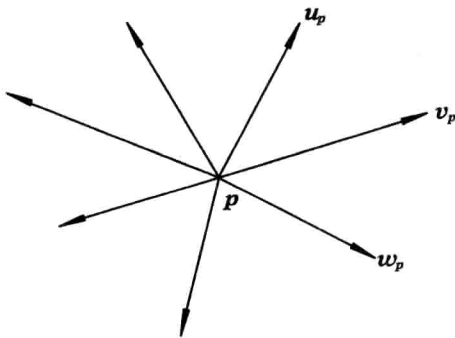


图 1.1

我们可用自然的方式去描述向量场集上的代数运算: 设 V, W 是 \mathbb{R}^3 上的两个向量场, f 是 \mathbb{R}^3 上的实函数, 规定: $(V+W)(p) = V(p) + W(p)$, $(fV)(p) = f(p)V(p)$ (今后把这种描述方式称为逐点化原理). 特别地, 可用此方式引入三个特殊且有用的向量场, 它们将作为所有向量场的“基”.

定义 1.2.4 对 $\forall p \in \mathbb{R}^3$, 设 U_1, U_2, U_3 满足

$$U_1(p) = (1, 0, 0)_p, \quad U_2(p) = (0, 1, 0)_p, \quad U_3(p) = (0, 0, 1)_p,$$

它们统称为 \mathbb{R}^3 上的自然标架场(图 1.2).

显然, $U_i (i=1, 2, 3)$ 是沿 x_i 轴正向的单位向量场.

引理 1.2.1 若 V 是一向量场, 则存在唯一的一组实函数 v_1, v_2, v_3 , 使得

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3,$$

这里函数 v_1, v_2, v_3 称为向量场 V 的 Euclid 坐标函数.

证明 由定义 1.2.3, 对每一点 $p \in \mathbb{R}^3$, 向量场 V 在 p 点的值 $V(p) \in T_p \mathbb{R}^3$, 该向量依赖于 p , 记 $V(p) = (v_1(p), v_2(p), v_3(p))$, 其中 v_1, v_2, v_3 为 \mathbb{R}^3 上的实函数. 从而对每

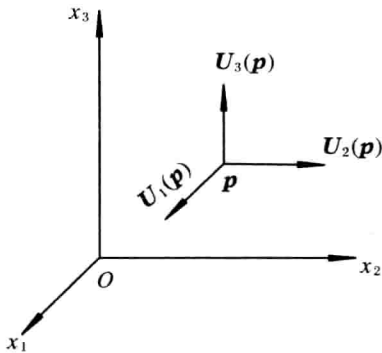


图 1.2

一点 $p \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} V(p) &= (v_1(p), v_2(p), v_3(p))_p \\ &= v_1(p)(1, 0, 0)_p + v_2(p)(0, 1, 0)_p + v_3(p)(0, 0, 1)_p \\ &= v_1(p)U_1(p) + v_2(p)U_2(p) + v_3(p)U_3(p) \end{aligned}$$

(图 1.3). 这意味着 V 和 $\sum v_i U_i$ 在每一点有相同的值, 由逐点化原理, $V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3$.

上述证明过程中出现的恒等式 $(v_1, v_2, v_3)_p = \sum v_i U_i(p)$, 今后常常是有用的. 另外, 涉及向量场的运算总能通过其 Euclid 坐标函数表示:

$$\begin{aligned} \sum v_i U_i + \sum w_i U_i &= \sum (v_i + w_i) U_i, \\ f(\sum v_i U_i) &= \sum (fv_i) U_i. \end{aligned}$$

按本书的基本要求, 我们自然假设所涉及的各对象都是可微的: 向量场 V 是可微的, 若其 Euclid 坐标函数都是可微的, 且从现在起, 我们将假定: “向量场”即“可微向量场”.

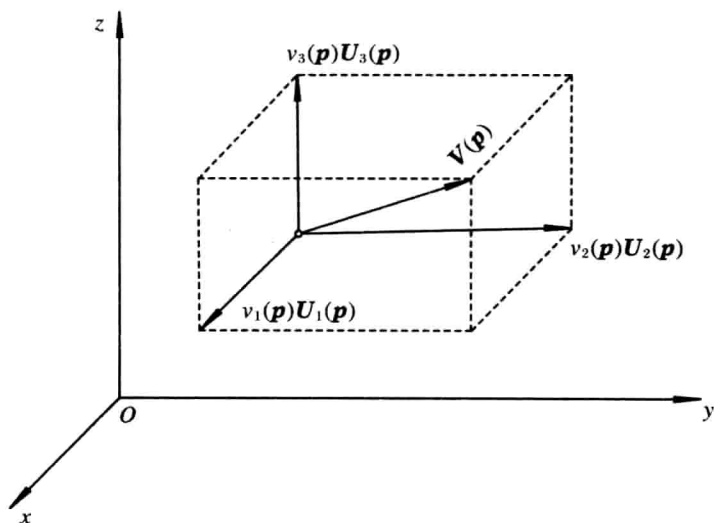


图 1.3

练习 1.2

1. 设 $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$.

(1) 在任一点 \mathbf{p} , 将切向量 $3\mathbf{v}_p - 2\mathbf{w}_p$ 表示为 $\mathbf{U}_1(\mathbf{p})$, $\mathbf{U}_2(\mathbf{p})$, $\mathbf{U}_3(\mathbf{p})$ 的线性组合;

(2) 对 $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$, 作图表示切向量 \mathbf{v}_p , \mathbf{w}_p , $-2\mathbf{v}_p$ 和 $\mathbf{v}_p + \mathbf{w}_p$.

2. 设 $\mathbf{V} = x\mathbf{U}_1 + y\mathbf{U}_2$, $\mathbf{W} = 2x^2\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_3$. 试计算向量场 $\mathbf{W} - x\mathbf{V}$, 并求它在点 $\mathbf{p} = (-1, 0, 2)$ 的值.

3. 在下列每种情形下, 用标准形式 $\sum v_i \mathbf{U}_i$ 表示给定的向量场 \mathbf{V} :

(1) $2z^2 \mathbf{U}_1 = 7\mathbf{V} + xy\mathbf{U}_3$;

(2) $\mathbf{V}(\mathbf{p}) = (p_1, p_3 - p_1, 0)_p$, 对 $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$;

(3) $\mathbf{V} = 2(x\mathbf{U}_1 + y\mathbf{U}_2) - x(\mathbf{U}_1 - y^2\mathbf{U}_3)$;

(4) 在每一点 \mathbf{p} 处, $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ 是从点 (p_1, p_2, p_3) 到 $(p_1 + 1, p_2 p_3, p_2)$ 的向量;

(5) 在每一点 \mathbf{p} 处, $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ 是从点 (p_1, p_2, p_3) 到原点的向量.

4. 若 $\mathbf{V} = y^2 \mathbf{U}_1 - x^2 \mathbf{U}_3$, $\mathbf{W} = x^2 \mathbf{U}_1 - z \mathbf{U}_2$, 求函数 f, g , 使得向量场 $f\mathbf{V} + g\mathbf{W}$

仅用 U_2 和 U_3 表示.

5. 设 $V_1 = U_1 - xU_3, V_2 = U_2, V_3 = xU_1 + U_3$.

(1) 证明: 向量 $V_1(\mathbf{p}), V_2(\mathbf{p}), V_3(\mathbf{p})$ 在每一点都是线性无关的;

(2) 把向量场 $xU_1 + yU_2 + zU_3$ 表示为 V_1, V_2 和 V_3 的线性组合.

1.3 方向导数

对 \mathbb{R}^3 的每一个切向量 \mathbf{v}_p , 有对应的一条直线 $t \mapsto \mathbf{p} + t\mathbf{v}$. 若 f 是 \mathbb{R}^3 上的可微函数, 则 $t \mapsto f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})$ 是实直线上的一元可微函数. 显然, 该函数在 $t=0$ 时的导数表示当 \mathbf{p} 沿 \mathbf{v} 移动时, f 的初始变化速度.

定义 1.3.1 设 f 是 \mathbb{R}^3 上的可微函数, 而 \mathbf{v}_p 是 \mathbb{R}^3 的一切向量, 则称数

$$\mathbf{v}_p[f] \triangleq \left. \frac{d}{dt}(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})) \right|_{t=0}$$

为 f 关于 \mathbf{v}_p 的导数.

上述定义在微积分中出现过, 但那里要附加 \mathbf{v} 是单位向量的条件. 这里我们不加此限制, 仍称 $\mathbf{v}_p[f]$ 为方向导数. 例如, 对于 $f = x^2yz$, $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$, 则

$$\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (1 + t, 1, -3t)$$

描述了通过 \mathbf{p} 且沿方向 \mathbf{v} 的直线. 沿此直线考察 f , 我们给出

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) &= f(1 + t, 1, -3t) = (1 + t)^2 \cdot 1 \cdot (-3t) \\ &= -3t(1 + t)^2 = -3t - 6t^2 - 3t^3, \end{aligned}$$

计算得

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{p} + t\mathbf{v})) = -3 - 12t - 9t^2.$$

因此 $\mathbf{v}_p[f] = -3$, 即当 \mathbf{p} 沿方向 \mathbf{v} 移动时, f 是初始下降的.

下面的引理告诉我们如何用 f 在 \mathbf{p} 点的偏导数去计算 $\mathbf{v}_p[f]$.

引理 1.3.1 若 $\mathbf{v}_p = (v_1, v_2, v_3)_p$ 是 \mathbb{R}^3 的一切向量, 则

$$\mathbf{v}_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

证明 设 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, 则 $\mathbf{p} + t\mathbf{v} = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$. 我们可用链式法则去计算函数 $f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = f(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, p_3 + tv_3)$ 在 $t=0$ 时的

导数. 由于 $\frac{d}{dt}(p_i + tv_i) = v_i$, 所以

$$\mathbf{v}_p[f] = \left. \frac{d}{dt}f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})v_i = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

应用上述引理, 我们重新计算上面的例子: 由 $f = x^2yz$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y.$$

在 $\mathbf{p} = (1, 1, 0)$ 处, $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}) = 1$. 再由引理 1.3.1, 有

$$\mathbf{v}_p[f] = 0 + 0 + (-3) \cdot 1 = -3,$$

与前面的结果一致.

方向导数的主要性质如下:

定理 1.3.1 设 f, g 是 \mathbb{R}^3 上的函数, $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$ 是切向量, a, b 是实数, 则:

$$(1) (a\mathbf{v}_p + b\mathbf{w}_p)[f] = a\mathbf{v}_p[f] + b\mathbf{w}_p[f];$$

$$(2) \mathbf{v}_p[af + bg] = a\mathbf{v}_p[f] + b\mathbf{v}_p[g];$$

$$(3) \mathbf{v}_p[fg] = \mathbf{v}_p[f]g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\mathbf{v}_p[g].$$

证明 这三条结论都可从引理 1.3.1 容易推出, 这里我们仅证明(3). 由引理 1.3.1, 若 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, 则

$$\mathbf{v}_p[fg] = \sum v_i \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

又由于

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p[fg] &= \sum v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \left(\sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right) g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}) \left(\sum v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \mathbf{v}_p[f]g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\mathbf{v}_p[g]. \end{aligned}$$

上述定理中的前两条性质可以解释为 $\mathbf{v}_p[f]$ 关于 \mathbf{v}_p 和 f 是线性的, 而第三条性质, 从其证明中显然可以看出, 本质上是积的微分的 Leibniz 公式.

我们现在用逐点化原理去定义向量场 \mathbf{V} 在函数 f 上的作用, 该作用的结果是一实值函数 $\mathbf{V}[f]$, 它在点 \mathbf{p} 的值正是 $\mathbf{V}(\mathbf{p})[f]$, 即 f 关于切向量 $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ 的导数.

上述定义的方法不值得我们奇怪,因为这完全类似于对实直线上的函数 f , 我们也是先定义它在每一点的导数, 而其导函数 $\frac{df}{dx}$ 在每一点的值正是取其在该点的导数值.

作为引理 1.3.1 的一个直接推论, 我们看到: 若 U_1, U_2, U_3 是 \mathbb{R}^3 上的自然标架场, 则 $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. 例如, $U_1(p) = (1, 0, 0)_p$, 则

$$U_1(p)[f] = \left. \frac{d}{dt}(f(p_1 + t, p_2, p_3)) \right|_{t=0}.$$

这正是 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)$ 的具体定义. 由于上式对所有点都成立, 所以 $U_1[f] = \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

由于我们更多的是在向量场的情形而非切向量的情形下应用方向导数, 所以下面的推论是有用的.

推论 1.3.1 若 V, W 是 \mathbb{R}^3 上的向量场, f, g, h 是 \mathbb{R}^3 上的实函数, 则:

- (1) $(fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h]$;
- (2) 对所有实数 a, b , $V[af + bg] = aV[f] + bV[g]$;
- (3) $V[fg] = V[f]g + fV[g]$.

证明 由逐点化原理和定理 1.3.1 立即推得.

注意, 推论 1.3.1(1) 表明: $V[f]$ 关于 V 是线性的, 这里将函数看作“纯量”; 而在(2)中, 需把数作为纯量, 这主要源自 fV 表示相乘, 而 $V[f]$ 表示微分的事实. 另外, 恒等式 $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, 再加上推论 1.3.1, 使得我们计算时更方便. 例如, $V = xU_1 - y^2U_3$, $f = x^2y + z^3$, 则

$$\begin{aligned} V[f] &= xU_1[x^2y] - y^2U_3[x^2y] + xU_1[z^3] - y^2U_3[z^3] \\ &= x(2xy) - y^2 \cdot 0 + x \cdot 0 - y^2 \cdot 3z^2 \\ &= 2x^2y - 3y^2z^2. \end{aligned}$$

练 习 1.3

1. 设 v_p 是 \mathbb{R}^3 中的切向量, $v = (2, -1, 3)$, $p = (2, 0, -1)$. 用定义直接计算方向导数 $v_p[f]$, 其中:

- (1) $f = y^2z$; (2) $f = x^7$; (3) $f = e^x \cos y$.