九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版同济大学数学系编

教你用更多的自信面对未来！

高等数学
（第七版·下册）
同步辅导及习题全解

主编　苏志平　郭志梅

一书两用
同步辅导+考研复习

新版

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版的，同济大学数学系编写的《高等数学（第七版·下册）》一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

《高等数学（第七版·下册）》共有5章，分别介绍向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习导引、课后习题全解两部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《高等数学（第七版·下册）》课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2015.2

（高校经典教材同步辅导丛书）

ISBN 978-7-5170-2898-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①苏… ②郭… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第020923号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 高等数学（第七版·下册）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　苏志平　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	148mm×210mm　32开本　6印张　206千字
版　次	2015年2月第1版　2015年2月第1次印刷
印　数	0001—7000册
定　价	12.80元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

前言

同济大学数学系编写的《高等数学(第七版·下册)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《高等数学(第七版·下册)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《高等数学(第七版·下册)》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 学习导引。介绍要求掌握的知识点,以及本章的主要内容。

2. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2014 年 12 月

目 录

第八章　向量代数与空间解析几何

学习导引

空间解析几何与平面解析几何的思想方法类似，都是用代数方法研究几何问题，其重要工具就是向量代数，空间解析几何知识是进一步学好多元函数微积分的重要基础.

第一节　向量及其线性运算

课后习题全解

1. $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于 M(如图 8-1 所示)，且 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{CD}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

图 8-1

图 8-2

3. 解　如图 8-2 所示：

由题意　$\overrightarrow{D_4D_3}=\overrightarrow{D_3D_2}=\overrightarrow{D_1B}$

$$=-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a};$$

$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$;

$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_2B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$;

$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_3B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$;$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

4. 分析　若已知 $M_1(a_1,a_2,a_3)$ 和 $M_2(b_1,b_2,b_3)$，

$\overrightarrow{M_1M_2}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$;

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 分析　单位向量 $\mathbf{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

解　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{11}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11}\right).$$

6. 解　A 点在第 4 卦限;B 点在第 5 卦限;C 点在第 8 卦限;D 点在第 3 卦限.

7. 解　在 xOy 平面、xOz 平面以及 yOz 平面上的点的坐标分别具有如下形式:$(x,y,0)$,$(x,0,z)$ 以及$(0,y,z)$,在 Ox、Oy、Oz 轴上的点的坐标分别为$(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$.A 在 xOy 平面上,B 在 yOz 平面上,C 在 x 轴上,D 在y 轴上.

8. 解　(1) 点(a,b,c) 关于 xOy 面的对称点是$(a,b,-c)$;

关于 yOz 面的对称点是$(-a,b,c)$;

关于 zOx 面的对称点是$(a,-b,c)$.

(2) 点(a,b,c) 关于 x 轴的对称点是$(a,-b,-c)$;

关于 y 轴的对称点是$(-a,b,-c)$;

关于 z 轴的对称点是$(-a,-b,c)$.

(3) 点(a,b,c) 关于坐标原点的对称点是$(-a,-b,-c)$.

9. 解　答案如图 8-3 所示.

10. 解　过 P_0 且平行于 z 轴的直线上的点有相同的横坐标 x_0 和相同的纵坐标 y_0,过 P_0 且平行 xOy 的平面上的点具有相同的竖坐标 z_0.

图 8-3

11. 解　如图 8-4 所示，各点的坐标 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$；$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$；$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；$D\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$；$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；$B'\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$；$C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$；$D'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

图 8-4

12. 解　M 到 x 轴上的投影 M' 为 $(4,0,0)$，故 M 到 x 轴的距离为 $|\overrightarrow{MM'}|$. 故点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，同理点 M 到 y 轴的距离为 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

13. 两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

解　设点 $P(0,y,z)$ 与 A、B、C 三点等距，则

$$|\overrightarrow{PA}|^2=3^2+(y-1)^2+(z-2)^2$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2$$

$$|\overrightarrow{PC}|^2=(y-5)^2+(z-1)^2.$$

因为 $|\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$，因而

$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\\4^2+(y+2)^2+(z+2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}y=1\\z=-2\end{cases}$，故所求点为 $(0,1,-2)$.

14. 分析　要证三角形为等腰直角三角形，即证 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{AC}|$ 和 $|\overrightarrow{BC}|$ 满足勾股定理且其中两个向量的模相等，也可证 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

证　因为 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(10-2)^2+(-1-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

所以 $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$，$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$，从而$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

15. 解　$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$，

$|\overrightarrow{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2} = 2.$

所以 $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}, \cos\beta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos\gamma = \dfrac{1}{2}, \alpha = \dfrac{2}{3}\pi, \beta = \dfrac{3}{4}\pi, \gamma = \dfrac{\pi}{3}.$

16. 解　(1) $\cos\alpha = 0$，则向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面；

(2) $\cos\beta = 1$，则向量与 y 轴同向，垂直 zOx 面；

(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$，则向量既垂直于 x 轴，又垂直于 y 轴，即向量垂直于 xOy 面，亦即与 z 轴平行.

17. 分析　由投影的性质：$(\boldsymbol{a})_u = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$.

解　$\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{r} = 4\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}\times 4 = 2.$

18. 解　设 A 点坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB} = \{2-x, -1-y, 7-z\}$，由已知得

$$2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7,$$

所以
$$x=-2, y=3, z=0$$

故 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 解　$\boldsymbol{a} = 4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}) = 13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$

故 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

第二节　数量积　向量积 * 混合积

课后习题全解

1. 分析　(3) 夹角的余弦 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

解　(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3\times 1+(-1)\times 2+(-2)\times(-1) = 3$

$$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k};$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times 3=-18$,

$(\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$;

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,

从而 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\overset{\text{交换律}}{=\!=\!=}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(-\boldsymbol{c})$

$=\boldsymbol{c}^2=-1$.

同样 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-1$,

于是 $2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=-3$.

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$.

3. 分析　设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{M_2M_3}$,由右手定则和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同时垂直的向量为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1),\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$,

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

由向量积的定义知

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}(6,-4,-4)$$

$$=\pm\left(\frac{6}{2\sqrt{17}},-\frac{4}{2\sqrt{17}},-\frac{4}{2\sqrt{17}}\right)$$

$$=\pm\left(\frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{17}},-\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17}},-\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right)\text{即为所求单位向量.}$$

4. 解　$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=(0,0,-100\times 9.8)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$

$=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5880(\mathrm{J})$.

5. 解　建立坐标系如图 8-5 所示. $\boldsymbol{F}_1=(|\boldsymbol{F}_1|\cos\theta_1,|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1,0)$,

$\boldsymbol{F}_2=(-|\boldsymbol{F}_2|\cos\theta_2,|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2,0)$,

$\overrightarrow{OP_1}=(x_1,0,0),\overrightarrow{OP_2}=(-x_2,0,0)$,

由杠杆原理,杠杆保持平衡的条件是 $\overrightarrow{OP_1}\times\boldsymbol{F}_1+\overrightarrow{OP_2}\times\boldsymbol{F}_2=0$,

即 $\{0,0,x_1|\boldsymbol{F}_1|\sin\theta_1-x_2|\boldsymbol{F}_2|\sin\theta_2\}=0$.

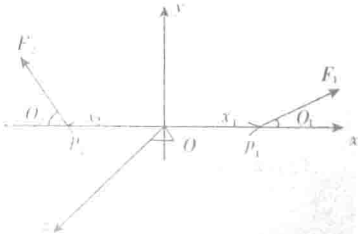

图 8-5

亦即

$$x_1 \boldsymbol{F}_1 \mid \sin\theta_1 = x_2 \mid \boldsymbol{F}_2 \mid \sin\theta_2.$$

6. 分析 由投影的性质 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，$\varphi$ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

于是 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

解 $$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = |\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

$$= \frac{8-6+4}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = 2.$$

7. 解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直的充要条件为$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=0$，

而 $$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b} = (3\lambda,5\lambda,-2\lambda)+(2\mu,\mu,4\mu)$$
$$= (3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,4\mu-2\lambda)$$

所以 $$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0$$

即 $$-2\lambda+4\mu=0, \lambda=2\mu,$$

故当且仅当 $\lambda=2\mu$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 证 设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle C=90°$，只需证$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 如图 8-6 所示.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\ &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\ &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO})\\ &= \overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{AO}^2\\ &= |\overrightarrow{OC}^2|-|\overrightarrow{AO}|^2=0\end{aligned}$$

故$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle C=90°$.

图 8-6

9. 解 (1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=[2\times1+(-3)(-1)+1\times3](\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})-[2\times1+(-3)\times(-2)](\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix} = -\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k};$$

$$(3)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix} = 2.$$

10. 解 利用向量积的几何意义知 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$

而 $$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

11. 分析　由向量行列式的知识 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$，再按混合积的坐标表示式

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

证　$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\text{，同理可证}$$

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b},$$

故 $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 证　设 $\boldsymbol{a}=\{a,a_2,a_3\}$ 与 $\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，

则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，故

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

因而 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$，

等号成立的条件是 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=1$，即 a、b 平行或重合.

第三节　平面及其方程

课后习题全解

1. 分析　已知点和平面，于是用平面的点法式方程求解，即 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$.

解　所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$，由点法式得所求的平面方程为

$$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)=0,$$

即

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 解　平面的法向量为$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$ 于是，所求的平面方程为

$$2(x-2)+9(y-9)-6(z+6)=0,$$

即

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 分析　已知三点 M_1,M_2,M_3，先要找出平面的法向量 $\boldsymbol{n}$.

向量积为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$，再根据平面点法式方程求解.

解　设这三点分别为 A,B,C，则$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 就是该平面的一法向量，$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$，因而所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&-3&3\\0&-2&3\end{vmatrix}=(-3,9,6)$$

从而平面方程为　$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$,

即　$x-3u-2z=0$.

也可用三点式求出方程即

$$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$ 表示过已知三点 $y_i(i=1,2,3)$ 的平面方程.

4. 解　(1) 是 yOz 坐标面；

(2) 是垂直于 y 轴的平面，垂足坐标为$\left(0,\dfrac{1}{3},0\right)$；

(3) 是平行于 z 轴并且在 x 轴、y 轴上截距分别为 3 与 -2 的平面；

(4) 是通过 z 轴，并且在 xOy 面上投影的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的平面；

(5) 是平行于 x 轴并且在 y、z 轴上截距均为 1 的平面；

(6) 是通过 y 轴的平面；

(7) 是通过原点的平面.

各图形如图 8-7 所示.

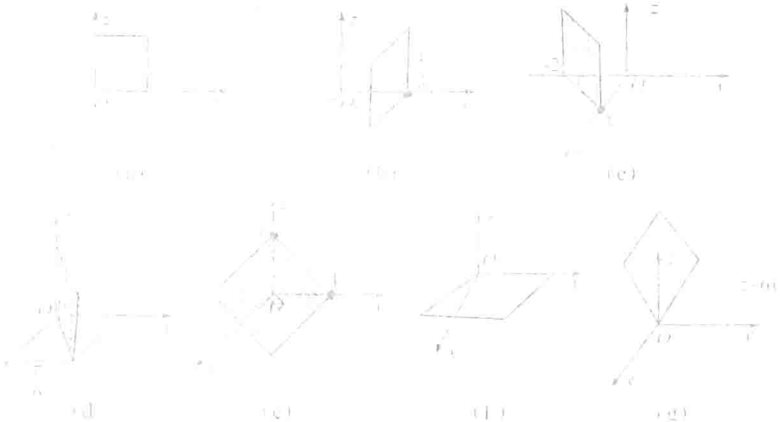

图 8-7

5. 分析　平面和平面夹角的余弦 $\cos\theta = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$，其中 $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 为两平面的法向量.

解　$\boldsymbol{n} = (2, -2, 1)$ 为此平面的法向量，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为 yOz 面、zOx 面以及 xOy 面的法向量.

因此该平面与坐标面的夹角即是 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 等的夹角，亦即是向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向角，它们的余弦即为 n 的方向余弦. 而

$$\boldsymbol{n}^0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{3}(2, -2, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

故所求的夹角余弦分别为 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$，$\cos\beta = -\frac{2}{3}$，$\cos\gamma = \frac{1}{3}$.

6. 分析　先求平面法向量 $\boldsymbol{n}$，由题意 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，再由点法式方程 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ 求出平面方程.

解　由已知，此平面的法向量可取作 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3)$.

故由点法式知此平面的方程为 $1\times(x-1)+1\times(y-0)-3\times(z+1)=0$，

即
$$x+y-3z-4=0.$$

7. 解 解方程 $\begin{cases}x+3y+z=1\\2x-y-z=0\\-x+2y+2z=3\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=1\\y=-1,\\z=3\end{cases}$

因此交点坐标为 $(1,-1,3)$.

8. 解 (1) 因为此平面平行于 xOz 面上，故可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$ 为其法向量，由点法式可得平面方程

$$0\times(x-2)+1\times(y+5)+0\times(z-3)=0,$$

即 $y+5=0$；

(2) 因为平面通过 z 轴，其方程可设为 $Ax+By=0$（A、B 不全为零），又因为点 $(-3,1,-2)$ 在此平面上，因而有 $-3A+B=0$，即 $B=3A$，故所求平面方程为 $Ax+3Ay=0$，即 $x+3y=0$；

(3) 设 $P(x,y,z)$ 为此面任一点，点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 分别用 A、B 表示，则 AP、AB、i 共面，从而 $[AP\ AB\ i]=0$，即

$$\begin{vmatrix}x-4 & y & z+2\\1 & 1 & 9\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

化简得 $9y-z-2=0$，即为所求的平面方程，也可设平面为 $By+Cz+D=0$，将两点代入得解.

9. 解 由点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

得所求距离 $d=\dfrac{|1\times1+2\times2+2\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1.$

第四节 空间直线及其方程

课后习题全解

1. 分析 直线 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其方向向量 $s=(m,n,p)$.