“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数习题全解(第二版)

张学奇 主编

中国人民大学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数习题全解

（第二版）

张学奇　主编

中国人民大学出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题全解(第二版)/张学奇主编. —北京：中国人民大学出版社，2015.1

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-300-20790-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数—高等学校—题解 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 029046 号

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

线性代数习题全解(第二版)

张学奇　主编

Xianxing Daishu Xiti Quanjie

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511770(质管部)
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http:www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河市汇鑫印务有限公司		
规　　格	185mm×260mm　16 开本	**版　　次**	2015 年 2 月第 1 版
印　　张	7.25	**印　　次**	2015 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	130 000	**定　　价**	18.00 元

内容简介

本书是与“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》（第二版）相配套的习题全解．主要作为学生学习线性代数课程时演算习题的解题指导以及复习应试的参考书，同时也可供讲授线性代数课程的教师备课和批改作业时参考．

全书按教材章节顺序编排，与教材同步．对线性代数教材中各章的全部习题与总习题都给出了完整、典型、翔实的解答，对重点习题给出了分析和解题指导，对提高学生的解题能力具有积极促进作用．

前　　言

本书是与“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》(第二版)相配套的习题全解．主要作为学生学习线性代数课程时演算习题的解题指导以及复习应试的参考书,同时也可供讲授线性代数课程的教师备课和批改作业时参考．

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《线性代数》(第二版)是依据经济类、管理类各专业对线性代数课程的教学基本要求,在总结线性代数课程教学改革成果,吸收国内外同类教材的优点,结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的．《线性代数》教材习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度;按节配有适量的基本练习题,主要用于巩固和加深对基本概念、基本定理、基本方法的理解和掌握;按章配有总习题,总习题包括单项选择题、计算题和证明题,总习题是对单元基本教学内容理解和掌握的进一步强化,可供读者提高综合解题能力和检测对基本教学内容掌握程度练习选用．

全书按教材章节顺序编排,与教材同步．对线性代数教材中各章的全部习题与总习题都给出了完整、典型、翔实的解答,对重点习题给出了分析和解题指导,对提高学生的解题能力具有积极促进作用．

本书由张学奇教授主编,参加本书编写的有何胜美、王响、宁光荣,全书由张学奇统稿定稿．

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请同行和读者批评指正!

编　者

2014年9月

目　　录

第一章 矩 阵

习题 1.1

1. 某工厂生产三种产品，它们的成本包括三类：原料费、工资、管理费和其他，生产单位产品的成本见下表．试将其用矩阵表示．

成 本	产 品		
	A	B	C
原料费	2	6	3
工资	6	8	5
管理费和其他	2	4	3

解 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&6&3\\6&8&5\\2&4&3\end{pmatrix}$.

2. 某班 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程（数学、计算机、英语）的期末考试成绩见下表．试将其用矩阵表示．

学生	课 程		
	数学	计算机	英语
甲	91	85	93
乙	78	81	72
丙	93	90	95
丁	65	76	78

解 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}91&85&93\\78&81&72\\93&90&95\\65&76&78\end{pmatrix}$.

3. 试确定 a、b、c 的值，使得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a+b & 3 & 5 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

解 由矩阵相等，得 $a=6$，$a+b=-2$，$c=2$，解得 $a=6$，$b=-8$，$c=2$.

习题 1.2

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$；

$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -8 \\ 12 & -1 & -19 \end{pmatrix}$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x_1-4 & x_2+2 \\ x_3+2 & x_4-4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -x_1 & -2-x_2 \\ -2-x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$$

利用矩阵相等的定义，得 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. 计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

（2）$(1, 2, 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, 2)$；

（4）$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

（5）$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^3$；

（6）$(1, -1, 2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(7) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$;　　(8) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^4$.

解　(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times7+3\times2+1\times1 \\ 1\times7+(-2)\times2+3\times1 \\ 5\times7+7\times2+0\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}$.

(2) $(1, 2, 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=(1\times3+2\times2+3\times1)=(10)$.

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1, 2)=\begin{pmatrix} 2\times(-1) & 2\times2 \\ 1\times(-1) & 1\times2 \\ 3\times(-1) & 3\times2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) $(1, -1, 2)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=(5, 1, -3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=(15)$.

(7) $(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=(a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+a_{22}x_2^2)$.

(8) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^4 \end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，讨论以下等式是否成立：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

解　(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&14\\14&29\end{pmatrix}$，但

$$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&8\\8&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16\\15&27\end{pmatrix}$$

故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\0&9\end{pmatrix}$，而

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}3&8\\4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\1&7\end{pmatrix}$$

故$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

5. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可交换，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，证明：

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；

(3) $(\boldsymbol{AB})^3=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}^3$.

证 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，由矩阵乘法的运算规则可得

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；

(3) $(\boldsymbol{AB})^3=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})^2\boldsymbol{B}$

$=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{B}^3$.

6. 求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 显然与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为二阶方阵，设为 $\boldsymbol{X}$，并令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$$

由可交换条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，可得 $b=0$，$a=d$（其中 a，d，c 为任意常数），即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}.$$

(2) 显然与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为三阶方阵，设为 $\boldsymbol{X}$，并令 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{XA}=\begin{pmatrix}a&a+b&b+c\\d&d+e&e+f\\g&g+h&h+i\end{pmatrix}$$

由可交换条件 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，可得 $d=0$，$g=0$，$h=0$，$a=e=i$，$b=f$（其中 a，b，c，e，f，i 均

为任意常数)，即 $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

7. 设 A，B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

证 因为 A 为对称矩阵，所以 $A^T=A$，则

$$(B^TAB)^T=B^T(B^TA)^T=B^TA^TB=B^TAB$$

所以，B^TAB 也是对称矩阵.

8. 设 A，B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

证 由 A，B 都是 n 阶对称矩阵知 $A^T=A$，$B^T=B$.

充分性 $AB=BA\Rightarrow AB=B^TA^T\Rightarrow AB=(AB)^T$，即 AB 是对称矩阵.

必要性 $(AB)^T=AB\Rightarrow B^TA^T=AB\Rightarrow BA=AB$.

习题 1.3

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 (1) 由二阶行列式对角线法则得 $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=2\times7-3\times5=-1$.

（2）由三阶行列式对角线法则得

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$$

$$=-24+8+16-4=-4$$

（3）利用行列式性质将行列式化为三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 12$$

（4）第二行提取 2 后与第一行互换，再化简展开得

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 196 & 203 & 199 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

（5）将行列式的第二、三、四列全加到第一列，并提公因子，再化为三角行列式得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-3$$

（6）把第二、三、四行均加到第一行，并在第一行中提取 10，再化为三角行列式得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160$$

（7）这是一个第二行元素为 1、2、3、4 的范得蒙行列式，因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdot(4-3)=12$$

（8）由行列式展开定理，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=12\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-192$$

2. 求解下列方程：

（1）$\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=0$；　　（2）$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=0.$

解　（1）因为 $\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}=-(x+2)(x-1)=0$，所以方程的解为 $x_1=1$，$x_2=-2$.

（2）因为

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)(x^2-3)$$

所以方程的解为 $x_1=-3$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{3}$.

3. 证明：

（1）$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$；　　（2）$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$.

证　（1）将行列式的第二、三列加到第一列，则第一列元素全为零，有

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}=0$$

（2）由行列式性质，得

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & z+x & x+y \\ x & y+z & z+x \\ z & x+y & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & z+x & x+y \\ y & y+z & z+x \\ x & x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x+y \\ x & y & z+x \\ z & x & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x & z & z+x \\ z & y & y+z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & x+y \\ y & z & z+x \\ x & y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

解　(1) 把第二、三行均加到第一行，并在第一行中提取 $2(x+y)$，得

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix}=-2(x^3+y^3)$$

(2) 按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+(-b_4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

(3) 第二行乘-1加到第一行上，第四行乘-1加到第三行上，再由行列式性质得

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

（4）按第一列展开

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^5 + b^5$$

5. 计算下列 n 阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解　（1）各列都加到第 1 列后，再从第 1 列中提取 $\sum_{i=1}^{n} a_i - b$；然后，第 1 行乘以-1 后加到其余各行，得

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right)$$

（2）将第 3 行的（-1）倍分别加到其余各行后，再按第 3 列展开，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix}$$

$$=3!\ (n-3)!$$

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$，计算 $|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

解 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2+b^2$，而 $|3\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=3^2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=9|\boldsymbol{A}|^2=9(a^2+b^2)^2$.

习题 1.4

1. 判断下列矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，因为 $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由于 $A_{11}=5$，$A_{21}=2\times(-1)$，$A_{12}=2\times(-1)$，$A_{22}=1$，所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 伴随矩阵为

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，因为 $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 又

$$A_{11}=\cos\theta,\quad A_{21}=\sin\theta,\quad A_{12}=-\sin\theta,\quad A_{22}=\cos\theta.$$

从而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$