2015

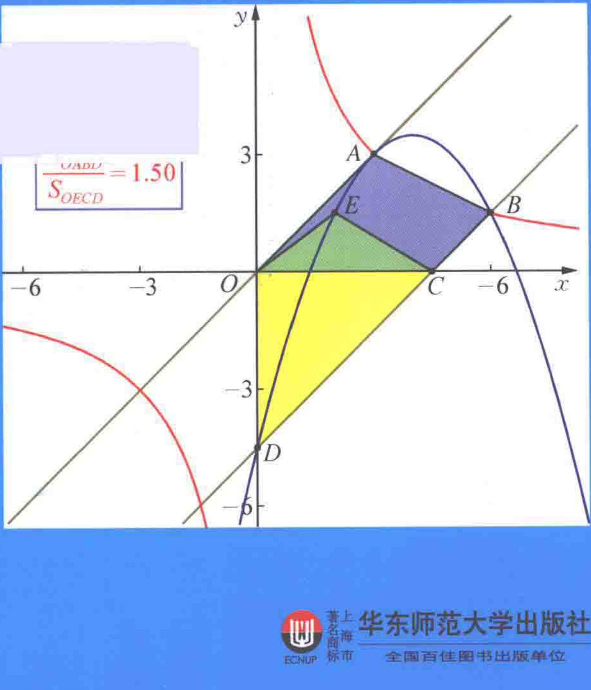
挑战压轴题

高考数学

文卫星 编著

精讲解读篇

（第五版）



华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

挑战压轴题

高考数学

精讲解读篇

（第五版）

文卫星　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题.高考数学.解读篇/文卫星编著.—5版.
—上海:华东师范大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5675-2452-1

Ⅰ.①挑… Ⅱ.①文… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—
升学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第185438号

挑战压轴题·高考数学:精讲解读篇(第五版)

编　　著　文卫星
总 策 划　倪　明
项目编辑　徐　平
组稿编辑　徐慧平　陈　震
审读编辑　宋亚洲
装帧设计　高　山
漫画设计　孙丽莹　胡　艺
责任发行　王　祥

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海崇明裕安印刷厂
开　　本　787×1092　16开
印　　张　17.75
字　　数　473千字
版　　次　2014年8月第5版
印　　次　2014年8月第1次
印　　数　1—28000
书　　号　ISBN 978-7-5675-2452-1/G·7571
定　　价　39.00元(含光盘)

出 版 人　王　焰

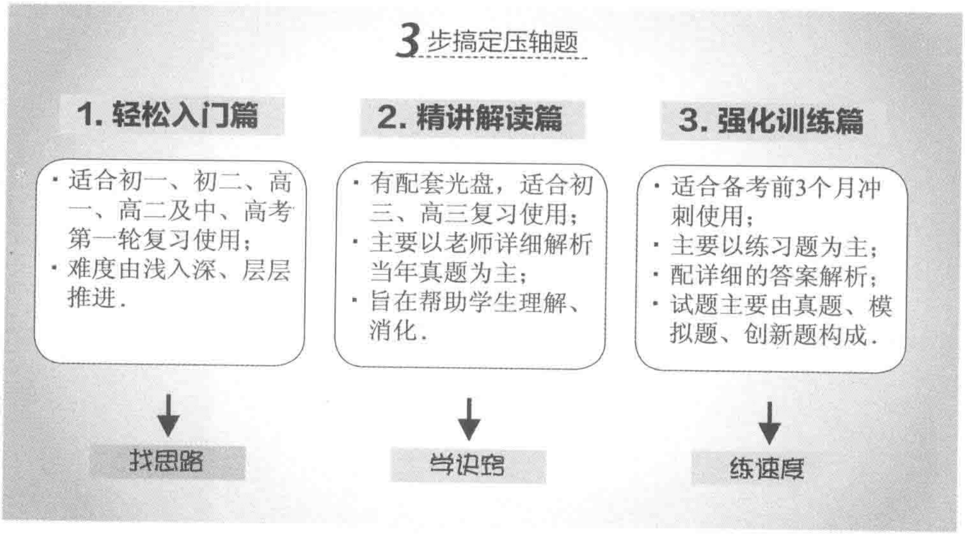
致亲爱的读者

亲爱的读者朋友，看到本书封面上的二维码了吗？一定要扫一扫加“关注”哦！那是我们开通的《挑战压轴题》专属微信公众号（微信号：tiaozhanyazhouti）．关注了它，你不仅可以随时随地反馈图书的使用情况，还可以享受我们提供的一系列增值服务，比如说“学霸经验介绍”、“考试技巧与攻略”等等，并且可以与全国各地众多备考学子进行交流哦！！

无论中考还是高考，能拉开差距的其实只有压轴题．

但压轴题有点难，如何攻关？

为了帮助备考的莘莘学子攻克压轴题，圆名校梦．我们邀请了众多一线名师，打造了这套《挑战压轴题》丛书，深受考生欢迎．本丛书涉及中考、高考的数学、物理、化学三门学科，共计 18 种．



3步搞定压轴题

1. 轻松入门篇
- 适合初一、初二、高一、高二及中、高考第一轮复习使用；
- 难度由浅入深、层层推进．

↓ 找思路

2. 精讲解读篇
- 有配套光盘，适合初三、高三复习使用；
- 主要以老师详细解析当年真题为主；
- 旨在帮助学生理解、消化．

↓ 学诀窍

3. 强化训练篇
- 适合备考前3个月冲刺使用；
- 主要以练习题为主；
- 配详细的答案解析；
- 试题主要由真题、模拟题、创新题构成．

↓ 练速度

如果你想搞定压轴题，不妨按照我们的“找思路→学诀窍→练速度”3 步骤进行训练哦！

愿这套备考丛书能够帮助你顺利通过中高考升学考试，迈入新的理想校园．

挑战压轴题，轻松进名校！

华东师范大学出版社教辅分社

前 言

这是一本供高三同学复习迎考、研究压轴题,挑战满分的书!

高考压轴题通常是指解答题的最后两三题中的部分较难的小题或客观题中部分较难的题目,它们的功能是突出选拔性.

客观题中的难题知识点可以是高中数学的各个分支,而解答题的难题则主要集中在函数与导数、数列和解析几何三大分支,近年概率统计和立体几何比例有所增加.每个分支都可以涉及不等式,尤其是放缩法使得有些试题的难度较大.以下是2010年(统计35套)、2011年(统计35套)、2012年(统计35套)、2013年(统计37套)、2014年(统计37套)压轴题中最后三题考点的分布情况:

年份	函数	数列	解析几何	导数	其他
2010年	8	13	33	27	24
2011年	4	22	30	30	19
2012年	4	17	33	31	20
2013年	8	14	35	32	23
2014年	3	13	37	33	25

注:其中函数内容为:函数基本性质(不涉及导数)、三角;其他部分的内容为:立体几何和概率与统计.这些试题大多数是安排在倒数第二、三题.

本书分上、下两篇:第一篇是解答题,第二篇是客观题.解答题分函数、数列、解析几何、导数和其他压轴题等五章.客观题根据解法特点分为九章.本书选题主要是2011年、2012年、2013年和2014年全国各地高考题中的思想性、方法性强的典型试题,按“分析与解、解题反思、发散训练”的形式展开.

分析与解——分析每种方法是怎么想出来的,在遇到困难的时候应该如何突破,结合具体问题谈一些思维方法.

解题反思——指出容易失误(思维不缜密或运算易错处)的地方以及原因,分析到某一步卡住(思想方法有偏差或技能技巧不熟练)的原因,并提出解决办法.

同时,引导读者注意对一些看似平淡问题的追根求源,对某些考题适当拓展,培养读者的探究性能力,还针对本题所涉及的典型思想方法和技能技巧进行评析,等等.

发散训练——给出与考题相近的问题以便练习、巩固、提高.每题都给出详细的解答,以方便自学.

这些题目往往是题海战术无法企及的,解答这些题目不仅需用扎实的数学基础知识,更需要数学思想方法(有时要在哲学思想指导下)的指引和顽强的意志以及良好的心理素质.

解答压轴题不仅是高考的需要,也是培养综合运用所学知识解决问题和创新能力的需要,它能教会你在遇到陌生问题时要以什么样的心态对待,以什么样的方法进行怎么思考,即

使不能完全做对，也要充分展示自己的实际水平.

解答压轴题的途径：

1. 认真审题——条件预示可知并启发解题手段，结论预告需知并诱导解题方向.

2. 解题实践——沟通已知与需知. 由已知能得到什么，结论需要什么，如果由已知条件能直接得到结论，则解题成功. 如果由条件不能直接得到结论，就要转化，可以是数形结合，可以是恒等变形，也可以构造模型，……各种思想方法在此大有用武之地(详见绪论).

当解题不能进行的时候，回到已知！已知条件本身是解这道题的信息源，凡是结论需要而条件没有给出的一定是隐含的，要仔细挖掘.

3. 等价转化——转化必须等价，因此前一步到后一步往往会有附加条件约束，它是正确解题的前提，也是检验的依据，必须充分重视.

4. 规范书写——逻辑层次清楚，表达简略得当.

5. 几点注意——数学考试的偶然性较大，有些问题必须特别注意：

(1) 毅力在解题中的作用十分重要.

(2) 心理因素对考试的影响值得关注.

(3) 准确运算，减少各种“低级错误”是提高正确率的重要途径.

本书在写作过程中得到华东师大第二附属中学任念兵老师的悉心帮助. 上海市行知中学特级教师赵传义，江苏省锡山高级中学特级教师、教授级教师杨志文，北京市(北京市宏志中学)骨干教师王芝平，北京一中王坤，上海市闵行中学曹东辉，上海交大附中嘉定分校徐辉等老师审阅了部分书稿，在此谨向他们表示衷心感谢！

本书在写作过程中参考了众多杂志中的文章，由于不便一一列举，在此谨向作者们表示感谢！

本书有45道题的视频全解，方便读者加深理解。由于水平有限，书中缺点和错误在所难免，欢迎读者批评指正.

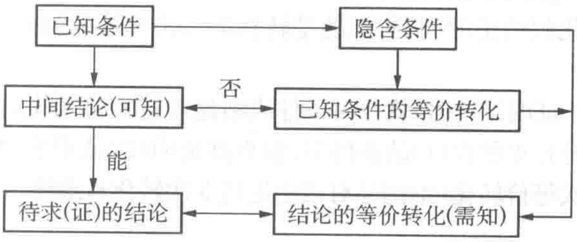
联系方式：sh197803@163.com.

文卫星

2014年6月于上海市七宝中学

绪　论

高考压轴题怎么解？罗增儒教授把解题总结为“条件预示可知并启发解题手段，结论预告需知并诱导解题方向.”即从已知条件入手推出中间结论(可知)，当中间结论能直接证明最终结论时，则解题成功. 当中间结论不能直接证明最终结论时，可把最终结论等价转化为“需知”，再用中间结论证明“需知”从而达到解题目的. 有时还要挖掘题目的隐含条件. 从某种意义上说，解题就是“找关系”——找出已知与未知的联系，不断缩小以至消除二者之间的差距，从而达到解题目的. 可以用框图表示如下：



以下通过例题说明解答压轴题的基本策略.

1. 学会分析转化

所谓转化，简言之，就是缩小已知和求证(解)之间的差距，其方法就是不断等价转化，或转化条件，或转化结论，使解题得以实施.

例1　设 $b>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$，$a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；(2) 证明：对于一切正整数 n，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$.

解　求通项好像没有头绪的题目，第一想法就是要把它转化成熟悉的形式，这时就要看脑子里有哪些熟悉的模型，如果记得形如 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+2}$ (教材有类似的习题)的求通项的解法：两边取倒数得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}}=\dfrac{2}{a_{n-1}}+1$，从而转化成 $c_n=pc_{n-1}+q$ 的形式来求解. 那么对(1)下述解法是自然的：

两边取倒数得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+n-1}{bna_{n-1}}$，即 $\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}+n-1}{ba_{n-1}}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{n-1}{a_{n-1}}$. 记 $c_n=\dfrac{n}{a_n}$，则 $c_n=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}\cdot c_{n-1}=\dfrac{1}{b}+\cdots+\dfrac{1}{b^{n-1}}+\dfrac{1}{b^{n-1}}c_1=\dfrac{1}{b}+\cdots+\dfrac{1}{b^{n-1}}+\dfrac{1}{b^n}$. 所以

$$a_n=\begin{cases}1, & b=1,\\ \dfrac{nb^n(b-1)}{b^n-1}, & b\neq 1.\end{cases}$$

(2) 当 $b=1$ 时，$2a_n=b^{n+1}+1=2$，结论成立.

当 $b\neq 1$，直接证明无法入手，于是想到把结论进行等价转化：

$2a_n=\dfrac{2nb^n(b-1)}{b^n-1}\leqslant b^{n+1}+1$，等价于 $2nb^n\leqslant (b^{n+1}+1)\cdot\dfrac{b^n-1}{b-1}$.

若通分 $(b^{n+1}+1)\cdot\dfrac{b^n-1}{b-1}=\dfrac{b^{2n+1}-b^{n+1}+b^n-1}{b-1}$，右边不好化简，于是转而把$\dfrac{b^n-1}{b-1}$化成 $b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b+1$，再乘以$(b^{n+1}+1)$得

$$(b^{n+1}+1)\cdot\frac{b^n-1}{b-1}=b^{2n}+b^{2n-1}+b^{2n-2}+\cdots+b^{n+1}+b^{n-1}+b^{n-2}+\cdots+b^2+b+1.$$

注意等号右边距两端“距离”相等的两项之积为 b^{2n}，因此对这 $2n$ 项用重要不等式，得右边 $>2\cdot(b^n+b^n+\cdots+b^n)=2nb^n$，即 $2a_n=\dfrac{2nb^n(b-1)}{b^n-1}<1+b^{n+1}$.

综上所述，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$.

由此我们看出解压轴题的基本思路：

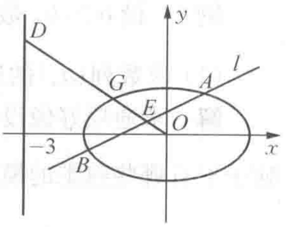
1. 把已知条件转化到熟悉的问题，本题是转化为二阶递推数列 $c_n=pc_{n-1}+q$ 的形式，从而顺利完成(1)的解答.

2. 当条件不能直接证明结论时，就要对条件或结论进行等价转化，直至转化后的条件能证明结论（或转化后的结论）. 本题在(1)的条件下，要直接证明(2)是困难的，因此就要对此作等价转化，有时可能需要多次等价转化（本例是对结论进行 3 次转化），最终达到要证明的目标.

2. 熟悉基本模型

对一些综合问题，常有一些同学说没有思路，或即使有思路，但太繁，以致很难做到底. 其实，有些问题有简单方法，但这些似乎不是书本上的“正统”内容，但平时学习中又似曾相识. 若能把这些似曾相识的内容整理成基本模型，对解答综合题不仅能提供思路，还能给出简单解法.

例 2 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. 如图所示，斜率为 $k\ (k>0)$ 且不过原点的直线 l 交椭圆 C 于 A、B 两点，线段 AB 的中点为 E，射线 OE 交椭圆 C 于点 G，交直线 $x=-3$ 于点 $D(-3,\ m)$.



(1) 求 m^2+k^2 的最小值；

(2) 若 $|OG|^2=|OD|\cdot|OE|$，

(i) 求证：直线 l 过定点；

(ii) 试问点 B、G 能否关于 x 轴对称？若能，求出此时$\triangle ABG$ 的外接圆方程；若不能，请说明理由.

解 如果熟悉结论：若椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弦 AB（不与坐标轴平行）的中点为 P，则 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-\dfrac{b^2}{a^2}$（证明只要设 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，代入椭圆方程，作差整理即得），那么(1)的证明很简单：$k_{OE}\cdot k=-\dfrac{1}{3}$，所以直线 OE 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3k}x$，因 D 在直线 OE 上，故 $m=-\dfrac{1}{3k}\cdot(-3)=\dfrac{1}{k}$，即 $mk=1$，$m^2+k^2\geqslant 2mk=2$，当且仅当 $m=k$，即 $k=1$ 时取等号.

(2) (i) 设 $G(s, t)$ $(s<0, t>0)$，则 $\frac{s^2}{3}+t^2=1$，再设 $E(x_0, y_0)$，$l: y=kx+n$. 因 $|OG|^2=|OD|\cdot|OE|$ 可变形为 $\frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OD}}=\frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{OG}}$，若把它投影到坐标轴上，则可得

$$\begin{cases} s^2=-3x_0, \\ t^2=my_0=\frac{y_0}{k}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_0=-\frac{s^2}{3}, \\ y_0=kt^2. \end{cases}$$

因点 E 在直线 l 上，所以 $y_0=kx_0+n$，即 $kt^2=-k\cdot\frac{s^2}{3}+n$，亦即 $n=k\left(\frac{s^2}{3}+t^2\right)=k$. 所以直线 l 的方程为 $y=kx+k=k(x+1)$，从而直线 l 过定点 $(-1, 0)$.

(ii) 设 B、G 能关于 x 轴对称，则 $B(s, -t)$，因 B 在 l 上，所以 $-t=k(s+1)$，$k=-\frac{t}{s+1}$.

又 $k_{OE}=k_{OG}$，所以 $\frac{t}{s}=-\frac{1}{3k}$，即 $k=-\frac{s}{3t}$，与上式联立得 $s^2+s=3t^2$，又 $\frac{s^2}{3}+t^2=1$，解得 $s=-\frac{3}{2}$，$t=\frac{1}{2}$，此时 $k=1$，从而 $G\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$、$B\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

由于直线 l 的方程为 $y=x+1$ 过点 $(0, 1)$ 在椭圆上，所以 $A(0, 1)$，因圆心在弦 AG、BG 的垂直平分线上，所以圆心坐标 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，圆方程为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$.

所以当 B、G 关于 x 轴对称时，$\triangle ABG$ 的外接圆方程为 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$.

评述：从上述解答过程中读者能看出思考途径：(1) 是利用已知结论，对焦点在 y 轴上的椭圆有类似结论，对双曲线也有类似结论，证明都是用解决中点弦问题常用方法——“点差法”. 在平时学习中应该多注意积累，把一些典型的例题、习题的结论推广到一般情况，总结成模型，就能解答一类问题，这对压轴题是十分有利的，不仅解题思路开阔，还能选择简捷的方法、又好又快地解题. 2010 年上海卷最后一题(见本书§3.2 例 3)用此解法十分简单.

(2) 是把线段乘积转化为比例问题，从而想到投影到坐标轴上，转化为坐标间的乘积. 有些同学要问，是怎么想到投影到坐标轴上？其实，这是向量坐标法的本质所在，读者不妨回忆一下向量的坐标是怎么定义的. 回到定义，往往能使较难问题获得非常简单的解法，复习要格外注意.

本题常规解法是把直线方程代入椭圆方程，计算冗长，极易出错，即使对理科同学也不是轻而易举就能得到正确答案的.

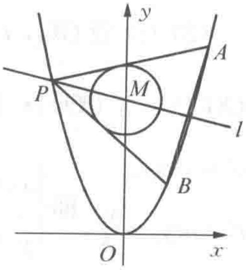
3. *有了想法就写*

解答综合题往往有“看不到底”的经历，即不能从开始到结束都能有明确的思路，但若能根据条件，写出由此能得到的相应结论，一步一步摸索向前，并运用分析转化等方法，最终得到正确结论. 然而，实际上不少同学遇到问题是首先看是否做过或有没有明确思路，一旦不是熟悉的问题，就不自信，不能冷静分析，坐失良机.

例 3 已知抛物线 $C_1: x^2=y$，圆 $C_2: x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为点 M.

(Ⅱ) 已知点 P 是抛物线 C_1 上一点(异于原点)，过点 P 作圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于 A、B 两点，若过 M、P 两点的直线 l 垂直于 AB，求直线 l 的方程.

解 由 $MP\perp AB$，得 $k_{AB}\cdot k_{MP}=-1$，因此要用某个量(选择参数)表示 k_{AB}、k_{MP}. 由题



意，点 P 是“主动”点，故以点 P 的坐标为参数. 设 $P(t,\ t^2)$，则 $k_{MP}=\dfrac{t^2-4}{t}$.

还要再求直线 AB 的方程，一时还没有明确方向，从已知条件看，只能从切线入手.

设 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，由题意 $t\neq 0$，$t\neq \pm 1$，$x_1\neq x_2$. 那么过点 P 的圆 C_2 的切线 PA 的方程为 $y=(x_1+t)(x-t)+t^2$，即 $(x_1+t)x-y-tx_1=0$.

因 M 到直线 AP 的距离为 1，则 $\dfrac{|-4-tx_1|}{\sqrt{1+(t+x_1)^2}}=1$，即 $6tx_1+(t^2-1)y_1-t^2+15=0$.

同理，$6tx_2+(t^2-1)y_2-t^2+15=0$，由此可知，点 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$ 在 $6tx+(t^2-1)y-t^2+15=0$ 上，故 $k_{AB}=\dfrac{6t}{1-t^2}$，所以 $k_{MP}\cdot k_{AB}=\dfrac{t^2-4}{t}\cdot\dfrac{6t}{1-t^2}=-1$，解得 $t=\pm\dfrac{\sqrt{115}}{5}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{115}}{5}x+4$.

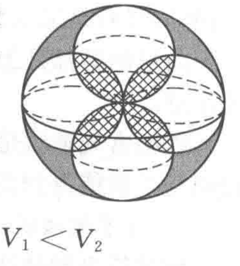
评述：虽然开始并没有想到直线求 AB 方程的方法，但在根据已知条件得出的结论中发现了 AB 的方程，难点就此突破，解题也就妙在其中. 由 PA、PB 方程得到 AB 的方程可能有些同学未必一眼看出，这是对曲线和方程的概念理解不深所致. 因为点 A、B 的坐标适合方程 $6tx+(t^2-1)y-t^2+15=0$，故它是直线 AB 的方程.

由此我们看出解答没有明确思路的压轴题，可以把已知条件具体化，再结合结论的要求，一步步向结论靠近，最终达到证明的目的. 关键是要自信，要敢于动手，同时要审时度势，把陌生问题转化成熟悉的问题.

4. 巧解客观题

填空题的最后两题，选择题的最后一题通常也是压轴题. 应尽可能不当成解答题来做，而运用数学思想方法，比如合情推理、特殊化思想、数形结合、利用已知结论等，找到简单的解法.

例 4　如图，体积为 V 的大球内有 4 个小球，每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点，4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点. V_1 为小球相交部分（图中阴影部分）的体积，V_2 为大球内、小球外的图中黑色部分的体积，则下列关系中正确的是（　　）.



(A) $V_1>\dfrac{V}{2}$　　(B) $V_2<\dfrac{V}{2}$　　(C) $V_1>V_2$　　(D) $V_1<V_2$

解析　由于选择支出现 V_1、V_2、$\dfrac{1}{2}V$，因此只要比较 V_1、V_2 与 $\dfrac{1}{2}V$ 的大小. 直接计算 V_1 是麻烦的，可以先估计其大致范围.

设大球半径为 r，则小球半径为 $\dfrac{1}{2}r$，那么 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，内部 4 个小球的体积之和为 $4\cdot\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{r}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}V$，而 V_1 只是 4 个球相交的部分，因此 $V_1<\dfrac{1}{2}V$，$V_2>\dfrac{1}{2}V$，所以 $V_1<V_2$，选 D.

这其实是合情推理，有一点计算，还有一点估算.

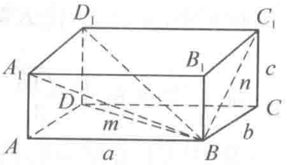
例5 （11·上海文）设 A_1、A_2、A_3、A_4 是平面上给定的 4 个不同的点，则使 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=\vec{0}$ 成立的点 M 的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）4

可以先考虑 3 点的情况：$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}=\vec{0}$，这时 M 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心，只有 1 个，由此可知 M 是四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心，因而选 B.

解答复杂问题时若直接解答有困难，从特殊化入手是常用方法，即华罗庚先生说的“退到不失本质”的地方，直到突破口再完成解答. 当然，本题也可以设出各点坐标来解.

例6 长方体的一条对角线长为 $\sqrt{7}$，它在过一个顶点的 3 个侧面上的投影长分别为 $\sqrt{6}$、m 和 n，则 $m+n$ 的最大值为________.



解析 如图，设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，$a^2+b^2=6$，$a^2+c^2=m^2$，$b^2+c^2=n^2$. 因要求 $m+n$ 的最大值，且 m 和 n 是对称的，可令 $m=n$，则 $a=b$，由 $a^2+b^2=6$ 得 $a^2=3$，又 $a^2+b^2+c^2=7$，所以 $c=1$，从而 $m=n=2$，$m+n$ 的最大值为 4.

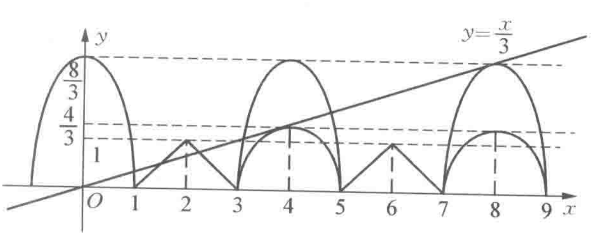
本题之所以能令 $m=n$，是基于法国物理学家皮埃尔·居里（1859—1906）的对称原理：对称性原理是凌驾于物理规律之上的自然界的一条基本原理，它是宇宙间超越物理各个领域的普遍法则. 它在数学领域的应用之一就是极值问题的对称性原理：“如果一个函数（代数式）中的若干变量具有对称性，则这个函数（代数式）的极值往往在这些变量都相等时取得. 至于它是极大值或极小值，或由问题本身决定，或靠理论作出判断.”

对具有对称性的问题，特殊化思想往往会使解答变得简单，在客观题中更是解题“秘笈”.

例7 已知以 $T=4$ 为周期的函数 $f(x)=\begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1], \\ 1-|x-2|, & x\in(1,3], \end{cases}$ 其中 $m>0$. 若方程 $3f(x)=x$ 恰有 5 个实数解，则 m 的取值范围为（　　）.

（A）$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　（B）$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$　（C）$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　（D）$\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{7}\right)$

解析 因为当 $x\in(-1,1]$ 时，将函数化为方程 $x^2+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (y\geqslant 0)$，其图象是 x 轴上方的一个半椭圆；当 $x\in(1,3]$ 时，$y=\begin{cases} x-1, & 1<x\leqslant 2, \\ 3-x, & 2<x\leqslant 3. \end{cases}$ 其图象是折线段，由于周期是 4，作出它们的图象（如图）. 由图易知直线 $y=\dfrac{x}{3}$ 与第二个半椭圆 $(x-4)^2+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (y\geqslant 0)$ 相交，而与第三个半椭圆 $(x-8)^2+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (y\geqslant 0)$ 无公共点时，方程恰有 5 个实数解.



当 $m=\frac{4}{3}$ 时，从图象很难发现在区间(3, 4) 直线与半椭圆的交点情况，同样当 $m=\frac{8}{3}$ 时，也难以从图象发现在区间(7, 8)直线与半椭圆的交点情况，正如华罗庚先生所说“形缺数时难入微”，所以还是把直线方程与椭圆方程联立，消去一个变量，得到一元二次方程，利用判别式来解：

将 $y=\frac{x}{3}$ 代入 $(x-4)^2+\frac{y^2}{m^2}=1\ (y\geqslant 0)$ 得 $(9m^2+1)x^2-72m^2x+135m^2=0$，

令 $t=9m^2(t>0)$，则 $(t+1)x^2-8tx+15t=0$.

由 $\Delta>0$ 得 $t>15$，解得 $m>\frac{\sqrt{15}}{3}$.

同样把 $y=\frac{x}{3}$ 代入第二个椭圆 $(x-8)^2+\frac{y^2}{m^2}=1\ (y\geqslant 0)$，由 $\Delta<0$ 可计算得 $m<\sqrt{7}$.

综上知 $m\in\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$，选 B.

希望以上方法对解答压轴题能起到抛砖引玉的作用，相信同学们在老师的指导下，通过自己的努力，切实提高解答压轴题的能力.

目 录

上篇 解答题

下篇 客观题

训练题详解

上篇 解答题

上篇 解答题

第 1 章 函数

函数综合题通常是指函数的定义域、对应法则(可以是解析式、也可以是图象和表格)、单调性、奇偶性、周期性等内容的综合考查. 涉及的具体函数主要有正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及它们的和函数与积函数等. 应用问题也常以函数内容呈现.

在这部分,起到压轴作用的试题往往都涉及不等式等知识.

§1.1 函数性质

近年以三角函数为载体考查函数、不等式性质以及求最值的考题时有出现.

例 1 (13·上海理)已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$,其中常数 $\omega>0$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增,求 ω 的取值范围;

(2) 令 $\omega=2$,将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位,再向上平移 1 个单位,得到函数 $y=g(x)$ 的图象,区间 $[a,\ b]$($a,\ b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$) 满足:$y=g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上至少含有 30 个零点,在所有满足上述条件的 $[a,\ b]$ 中,求 $b-a$ 的最小值.

【分析与解】

(1) 因为正弦函数最简单的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$,由于 $\omega>0$,根据题意有

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\omega\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}\omega\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}\quad \text{解得 } 0<\omega\leqslant\frac{3}{4}.$$

(2) $f(x)=2\sin(2x)$, $g(x)=2\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,由 $g(x)=0$ 得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$,解得 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ 或 $x=k\pi-\frac{7}{12}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

因 $k\pi-\frac{\pi}{4}-\left(k\pi-\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,又 $g(x)$ 的最小正周期是 π,所以 $g(x)$ 的零点相离间隔依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$.

因 $y=g(x)$,所以先取 14 个完整的周期,其长度为 14π,比如取 $a=-\frac{7\pi}{12}$,则 $\left[-\frac{7\pi}{12},\ 14\pi-\frac{7\pi}{12}\right)$ 内有 28 个零点,再加两个间隔最近的零点 $14\pi-\frac{7\pi}{12}$, $14\pi-\frac{\pi}{4}$ 则 $b-a$ 的

最小值为 $14\pi-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{43\pi}{3}$.

【解题反思】

求在 $[a,b]$ 上至少含有 $2n$ 个零点的区间长，a 要取间隔最近的两个零点的左端点，这样自 a 起的 $n-1$ 个周期有 $2(n-1)$ 个零点，再加两个间隔最近的两个零点，故 $b-a$ 的最小值为 $(n-1)T+$间隔最近两个零点的区间长，其中 T 为周期.

【发散训练】

1. (13·福建理)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π，图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，将函数 $f(x)$ 图象上的所有点的横坐标伸长为原来的2倍(纵坐标不变)，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象.

(1) 求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $f(x_0)$，$g(x_0)$，$f(x_0)g(x_0)$ 按照某种顺序成等差数列?若存在，请确定 x_0 的个数;若不存在，说明理由.

(3) 求实数 a 与正整数 n，使得 $F(x)=f(x)+ag(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内恰有 2013 个零点.

例 2 (14·上海市七宝中学 5 月试题)已知函数 $f(x)=a(1-|x-1|)$，a 为常数，且 $a>1$.

(1) 证明:函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称;

(2) 当 $a=2$ 时，讨论方程 $f(f(x))=m$ 解的个数;

(3) 若 x_0 满足 $f(f(x_0))=x_0$，但 $f(x_0)\neq x_0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的二阶周期点. $f(x)$ 是否有两个二阶周期点? 说明理由. 看视频

【分析与解】

对(1)，只要证明 $f(2-x_0)=f(x_0)$;对(2)、(3)，关键是要求出 $f(f(x))$ 的解析式，为此要进行分类讨论，以便去掉绝对值.

(1) 设点 (x_0,y_0) 为 $y=f(x)$ 上任意一点，则

$$f(2-x_0)=a(1-|2-x_0-1|)=a(1-|1-x_0|)=a(1-|x_0-1|)=f(x_0),$$

所以，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

(2) 当 $a=2$ 时，$f(f(x))=2[1-|f(x)-1|]=2[1-|2(1-|x-1|)-1|]$

$$=\begin{cases}2[1-|2x-1|], & x<1,\\ 2[1-|2(2-x)-1|], & x\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}4x,\ x<\frac{1}{2},\\ 4-4x,\ \frac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 4x-4,\ 1\leqslant x<\frac{3}{2},\\ 8-4x,\ x\geqslant\frac{3}{2}.\end{cases}$$