

创新

科技部
教育部
《中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究》项目研究成果

创新人才培养

马云鹏 韩继伟◎主编

数学探究活动开发与指导



行知工程
创新人才培养系列

组编单位

科技部教育部《中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究》项目组

江苏教育出版社

科技部
教育部
《中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究》项目研究成果

创新人才培养

数学探究活动开发与指导

马云鹏 韩继伟◎主编

组编单位 科技部教育部《中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究》项目组

图书在版编目(CIP)数据

创新人才培养:数学探究活动开发与指导/马云鹏,韩继伟主编.

—南京:江苏教育出版社,2012.12

ISBN 978-7-5499-2522-3

I. ①数… II. ①马… ②韩… III. ①中学数学课—教学研究

②小学数学课—教学研究 IV. ① G633.602 ② G633.502

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第292120号



书 名 创新人才培养:数学探究活动开发与指导

作 者 马云鹏 韩继伟

责任编辑 林 琬 马春霞

出版发行 凤凰出版传媒股份有限公司

江苏教育出版社(南京市湖南路1号A楼 邮编210009)

苏教网址 <http://www.1088.com.cn>

照 排 吕 龙

印 刷 九洲财鑫印刷有限公司

厂 址 河北省三河市灵山大口

开 本 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 16.75

字 数 274千字

版 次 2012年12月第1版 2012年12月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5499-2522-3

定 价 30.00元

网店地址 <http://jsfhjy.taobao.com/>

邮购电话 025-85406265, 85400774 短信 02585420909

E-mail jsep@vip.163.com

盗版举报 025-83658579

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换

提供盗版线索者给予重奖

《创新人才培养系列》

编委会名单

丛书编委会

主 任

曹志祥 付宜红

编 委

(以姓氏拼音为序)

安桂清	曹志祥	陈 澄	陈 峰	陈晓萍	董洪亮	付宜红
顾建军	韩继伟	郝京华	何成刚	侯新杰	廖伯琴	李志贵
刘长铭	刘 刚	刘克文	陆 静	卢新祁	罗 滨	马廷喜
马云鹏	宋修玲	王殿军	王晶莹	王 磊	汪笑梅	吴国锋
吴新胜	夏志芳	杨军林	杨明全	叶勇军	曾 莹	曾 卫
张建珍	张迎春	张玉生				

序 言

在中国，人们对创新人才的期盼，从来没有像今天这样强烈。1999年，《中共中央国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》（中发〔1999〕9号）中就指出要转变教育观念，改革人才培养模式，积极实行启发式和讨论式教学，激发学生独立思考和创新的意识，切实提高教学质量，培养学生的科学精神和创新思维习惯。2001年，《国务院关于基础教育改革与发展的决定》（国发〔2001〕21号）及教育部颁布的《基础教育课程改革纲要（试行）》（教基〔2001〕17号）中，都进一步强调要重视培养学生的创新精神和实践能力，为学生的全面发展和终身发展奠定基础。

在《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》中，对“创新人才培养”论述更加深刻、全面。该文件指出，创新人才培养是一个系统工程，要努力发挥各学段、各环节、各要素在创新人才培养方面的积极作用；要做好小学、中学、大学有机衔接，教学、科研、实践紧密结合，学校、家庭、社会密切配合；大力推进教育教学改革，探索多种培养方式。

为贯彻中共中央、国务院关于创新人才培养的重要指示与精神，从2009年起，我们积极承担了科技部“创新方法工作专项”中的重要课题“中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究”（项目编号：2009IM010300），并成立了“中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究”项目组，着重探索、研究在基础教育领域推进科学探究学习与创新人才培养的工作机制与模式。

在科技部条件财务司、教育部基础教育二司和21世纪议程管理中心的指导下，我们遴选当前基础教育领域的知名专家成立了项目专家指导工作组，并在全

国建立起三大实验区和 125 所项目试点学校。经过近三年的研究、实践，该项目带动了试点校整体办学水平的提高，特别是促进了基于学科的科学探究活动的广泛开展和推广。各试点校呈现出中小学生主动参与科学探究活动，学习兴趣浓厚，积极思考、乐于交流的良好风气，有力地促进了中小学生的自主与个性发展，培养了他们积极健康的科学态度和科学精神。而且，很多学校还形成了有代表性的人才培养模式。

为更好地传播、推广项目研究成果，使更多中小学校师生受益，我们选编了部分项目研究成果，希望在更大范围内深入推进我国中小学校的科学探究学习与创新人才培养工作。

中小学科学探究学习与创新人才培养机制实验研究项目组

2012 年 12 月 6 日

目 录

CONTENTS

第一章 数学探究学习基础理论研究 /1

第一节 数学探究学习的内涵分析 / 3

第二节 课堂中的数学探究学习 / 13

第三节 数学探究学习的意义 / 20

第二章 数与代数 / 25

第一节 数与代数（小学部分）/ 27

探究主题 / 27

主题论证 / 27

经典案例 / 30

案例 1 “分一分”的教学设计 / 30

案例 2 用字母表示数 / 34

案例 3 分数与除法的关系 / 38

案例 4 生活中的负数 / 42

第二节 数与代数（初中部分）/ 44

探究主题 / 44

主题论证 / 45

经典案例 / 48

案例 1 对反比例函数的图象和性质的探究 / 48

案例 2 一次函数应用的探究 / 52

案例 3 用函数观点看一元二次方程 (1) / 55

案例 4 再探一次函数与一元一次方程 / 62



第三章 空间与图形 / 65

第一节 空间与图形 (小学部分) / 67

探究主题 / 67

主题论证 / 67

经典案例 / 69

案例 1 圆的周长 / 69

案例 2 课桌有多长 / 74

案例 3 “长方形纸卷成圆柱形”的实践探索活动 / 77

第二节 空间与图形 (初中部分) / 81

探究主题 / 81

主题论证 / 83

经典案例 / 85

案例 1 三角形三边关系定理 / 85

案例 2 对直角三角形中的圆的一些探究 / 90

案例 3 矩形的性质 / 94

案例 4 菱形的性质和判定 / 99

案例 5 探索三角形全等的条件——“边边边” / 103

案例 6 勾股定理 / 107



第四章 统计与概率 / 115

第一节 统计与概率 (小学部分) / 117

探究主题 / 117

主题论证 / 117

经典案例 / 118

案例 1 等可能性 / 118

案例 2 掷一掷 / 122

第二节 统计与概率（初中部分） / 125

探究主题 / 125

主题论证 / 125

经典案例 / 128

案例 1 生活中的数据分析 / 128

案例 2 用频率估计概率 / 132

案例 3 统计调查探究 / 137

案例 4 随机事件的概率 / 140

第三节 统计与概率（高中部分） / 143

探究主题 / 143

主题论证 / 143

经典案例 / 146

案例 1 古典概型 / 146

案例 2 随机事件的概率 / 149

第五章 综合实践 / 153

探究主题 / 155

主题论证 / 155

经典案例 / 157

案例 1 看一看，摆一摆 / 157

案例 2 打电话 / 159

案例 3 算出它们的普及率 / 162

案例 4 大蒜有几瓣 / 165

第六章 数列 / 169

探究主题 / 171

主题论证 / 171

经典案例 / 173

案例 1 等差数列 / 173

案例 2 等差数列与函数 / 177

案例 3 等比数列 / 182

案例 4 等比数列的前 n 项和 / 185

第七章 不等式 / 193

探究主题 / 195

主题论证 / 195

经典案例 / 195

案例 1 二元一次不等式（组）与平面区域 / 195

案例 2 基本不等式 / 202

案例 3 简单的线性规划问题 / 204

第八章 函数 / 211

探究主题 / 213

主题论证 / 213

经典案例 / 214

案例 1 指数函数 / 214

案例 2 导数在研究函数对称性中的应用 / 220

案例 3 几种不同增长类型的函数模型 / 227

第九章 三角函数 / 233

探究主题 / 235

主题论证 / 235

经典案例 / 236

案例 1 正弦定理 / 236

案例 2 余弦定理 / 241

案例 3 解斜三角形应用举例（1） / 247

参考文献 / 257

第一章

数学探究学习基础理论研究

探究学习的理论是开展探究学习的基础，对于指导教师开展探究教学有重要意义。本章分析了探究学习的内涵、数学课堂中的探究学习及探究学习的意义。在探究内涵的分析中，作者追根溯源，从“探究”一词的起源着手，分析了探究学习的概念及历史，并具体阐述了数学探究学习。同时，作者将探究学习与一些容易与之混淆的学习概念进行了辨析比较。在“课堂中的数学探究学习”部分，作者分析了针对不同课程内容、不同年龄阶段学生的数学探究学习，并给出了切实可行的实施建议。在此基础上，作者分析了数学探究学习的意义。本章内容有助于教师夯实探究理论基础。

第一节 数学探究学习的内涵分析

（一）关于探究

要理解数学探究学习,就必须懂得什么是“探究”。“探究”一词起源于拉丁文,原意是“指向问题”,之后,“探究”被赋予了更深刻的含义。我国1989年出版的《辞海》对“探究”是这样定义的:“深入探讨、反复探求事物的本质和规律。”而《牛津英语词典》中则认为,“探究(inquiry)是指求索知识、信息,特别是求真的活动;是搜寻、研究、调查、检验的活动;是提问和质疑的活动”。不难看出,所谓“探究”,是对事物本质进行深入剖析的过程,同时也是以问题为起点对未知事物进行探索的活动。探究的过程既是求知的过程,又是创新和实践的过程。而《美国国家科学教育标准》对“探究”给出了这样的定义:“探究是多层面的活动,它包括:观察;提出问题;通过浏览书籍和其他信息资源发现什么是已经知道的结论,制订调查研究计划;根据实验证据对已有的结论作出评价;用工具收集、分析、解释数据;提出解答、解释和预测;交流结果。”探究要求确定假设,进行批判的和逻辑的思考,并且考虑其他可以替代的解释。

（二）关于探究学习

如果说“探究”是一种对事物本质进行深入剖析的过程,那么科学探究指的就是个体对自然现象进行调查和研究的过程,也就是说此时的科学探究不仅指科学家探索自然的活动,也指普通个体探究自然界的活动。尤其是《美国国家科学教育标准》给出的关于“探究”的定义相当于拟定了一个探究的固定模式,从提出问题、制订计划、作出评论、收集数据、解释预测到交流结果,而这个探究的过程正好类似于以自然界为研究对象的科学探究。虽然众多研究者对科学探究的过程表述并不统一,但基本按照“提出问题、建立假设、制订方案、得出结论、交流结果”这个相对统一的模式进行的。

如果把科学探究作为一种学习活动引入教育领域,就形成了一般的探究学

习理论。早期的探究学习始于物理、化学、生物和地理等自然学科的研究中。美国著名教育家施瓦布认为探究学习指的是“儿童通过自主地参与获得知识的过程，掌握研究自然所必需的探究能力；同时，形成认识自然的基础——科学概念；进而培养探索未知世界的积极态度”。

现阶段的学者一般认为探究学习是以科学探究的模式进行学习的一种活动，这种提法显然具有一定的局限性，它过于强调探究学习对科学探究的依赖作用，同时也过于强调科学探究的固定模式。而部分教师在教学活动中也持这种观点，导致他们在进行探究学习时，无论是什么课程的探究学习都按照“提出问题、建立假设、制订方案、得出结论、交流结果”这个相对固定的模式进行，这使得探究学习的活动安排过于形式化，不能灵活变通，同时也使得部分课堂的探究学习根本无法进行下去。我们认为这是一种对探究学习窄化的理解，它过于拘泥于固定的程式，局限在了科学探究模式的条框中。

另一种观点认为，探究学习是一种学生主动参与并发现问题、解决问题的学习活动。这种观点注意到了学生在探究学习活动中不可忽视的作用，同时也强调了探究学习是以问题为起点的，认为探究学习实则是对学生的一种培养活动，但不难发现，这种观点完全忽略了探究学习与科学探究的关系，忽视了科学探究的固定模式，这实则是对探究学习的一种泛化理解。在这种观点看来，探究学习具有一般性，也就是说，我们比较常见的问题解决学习、发现学习、研究性学习甚至启发式教学都可以被称为探究学习。因为以上这些学习方法具有一个共性，那就是每个学习活动都需要学生的主动参与，并需要学生去发现问题、解决问题，这种对探究学习的泛化显然没有注意到这些学习活动之间的不同之处。相当于把探究学习由一个极端推向了另一个极端。

我们理解的探究学习一方面必须有学生的主动参与，学生在探究学习的过程中通过独立或合作思考，解决问题，最终获得相应的“科学概念”和“探究能力”。另一方面，我们也不能完全忽略探究学习的模式，探究学习是以科学探究为基础的，应该有相对固定的模式，只是它不应该完全局限在这个模式里，要做到灵活变通。无论是教师在教学活动的安排中，还是研究者对探究学习的研究中，都需要针对不同学科特点和不同课程内容进行具体安排。所以，我们理解的探究学习指的是学生以类似科学探究的方式主动地参与学习过程，通过思考、探索，最终

获得知识和技能的学习活动。

（三）探究学习的历史发展

探究的思想自古有之，从古希腊著名教育家苏格拉底让学生勇于质疑权威、要教师做知识的“助产婆”开始，探究的思想就在教育中孕育。

1. 杜威的探究学习理论

到了19世纪末20世纪初，杜威认为“教育即生活”“教育即生长”“教育即经验改造”，并提出“从做中学、从做中思维”的教育理念，提倡问题解决和主动探究，希望培养有科学精神的人。杜威的实用主义哲学强调的是思想和行动上的统一，认为“知识绝不是固定的、永恒不变的，它既是一个探究过程的结果，又是一个探究过程的起点，始终有待于再考察、再检验、再证明，如同人们始终会遇到新的、不明确的、困难的情景一样”。所以有人曾这样评价他：将“实验的探究法”引入教育领域是杜威在教育上的一大功绩。这个时期的探究学习只是一种宏观的思想，还没有发展到各个学科中去。

2. 萨奇曼的探究学习理论

到了20世纪五六十年代，在美国“学科结构运动”中，萨奇曼等一批美国教育家为探究学习理论体系的形成做出了突出的贡献，并把理论性的思想推广到具体的学科中去，论证了探究学习的可行性。萨其曼的“探究训练模式”可以说是探究学习的先驱性尝试。他通过三年旨在培养学生探究能力的小学理科课程的研究，提出这样的主张：探究重在过程和方法的训练，要使学生明白一切知识都是尝试性的，如果想教给学生具有某种意义的范型和规则，就必须教给他们积极、有计划、有目的地做出假设的方法、验证的方法、解释结果的方法。

3. 施瓦布的探究学习理论

施瓦布是著名的生物学家、教育家，他试图从“科学的结构”出发，以生物学科为基础，进而研究整个探究学习理论。他希望每个学生都能像科学家做研究那样进行学习，让学生体会作为探究过程的学习。他针对教师（教材）和学生探究过程中的不同地位，首先提出课堂教学中存在着不同类型的探究，并将探究分为三种差异显著的水平，详见下表。

施瓦布的科学探究水平分类（1962）

主 体		要 素		
		提出问题	设计方案	得出结论
水平	水平 1	教师 / 教材	教师 / 教材	学生
	水平 2	教师 / 教材	学生	学生
	水平 3	学生	学生	学生

施瓦布提出的分层次的探究水平在很大程度上促进了探究学习的发展，并衍生出很多关于探究水平的研究。

4. 其他方面的理论研究

在这一时期的研究中，布鲁纳的发现学习理论同样也对探究学习理论的形成起到了推动作用。因为无论是发现学习还是探究学习，都强调知识的过程性而非结果。与此同时，同样致力于探究学习理论研究的还有美国教育心理学家加涅，他着重研究的是探究中所需的学习条件，并以数学案例为基础，分析了两个基本的前提条件——知识条件和学生能力。

（四）关于数学探究学习

探究学习理论最初是应用于物理、化学、生物和地理等实验性比较强的学科中，是以实验取证的方式进行的。随着探究学习理论的发展，数学学科逐渐成为探究学习的一部分，它有别于其他学科，需要动手操作的实验并不多，显然一味地实验取证的方式在数学中是行不通的。所以，以数学学科为依托的探究学习和其他实验性比较强的学科的探究学习相比较，会有很多不同之处，也会有很大变化，那么我们就不能把适合其他学科的探究模式和探究水平照搬到数学学科中来。因此，数学探究学习在实施的过程中不仅要以其他学科的探究学习理论为参照，更应该关注和把握数学学科自身的特点。下面我们就通过对数学问题、数学推理和数学实验的说明来具体阐述数学探究学习。

1. 数学探究学习过程中的数学问题

在数学学科中，数学问题是数学探究学习的起点。因为数学问题解决的过程实质上是一个探究学习的过程，而数学探究活动的主要形式正是解决各类数学问题。

值得强调的是,所谓的数学问题,指的并不是单一的数学习题,数学问题的来源除了数学本身之外,还来自于生活,如可以是学生对生活中的数学现象进行思考而产生的问题,也可以是教师以生活为依据向学生提出的问题,而这些问题是学生更感兴趣的。另外,数学问题也可以来自于其他学科,在其他学科的学习过程中,学生会发现一些让他们感兴趣的数学问题,而这种跨学科的问题会带给学生更多的思考空间,从而成为探究学习的出发点。

在解决这些数学问题的过程中,学生有时自发地以探究学习的形式进行,有时在教师的指导下进行探究学习,所以,我们说数学问题是数学探究学习的起点。在数学探究学习实施的过程中,教师经常会设计一个数学问题,或者用数学问题引发一个情境,激发学生思考,或者引发他们认识上的矛盾,这可以使学生有主动解决这个数学问题的意愿,或者学生以这个问题为起点引发新的数学问题,然后进一步地思考验证,最终解决这一系列数学问题。

所以,部分数学探究学习的过程也可以理解为学生发现问题、解决问题的过程,在这个过程中学生收获了问题的答案,也就是数学知识,同时也参与了探究数学问题的过程。相较于数学知识,这个过程更加重要,学生可以从中获得一种数学技能,而这是进行数学探究学习的主要目的所在。这种以问题为起点进行的数学探究学习,在一定程度上提高了学生学习数学的兴趣,并提高了他们解决问题的能力 and 数学创造力,这在数学探究学习中是十分重要的。

2. 数学探究学习过程中的数学推理

数学学科与其他学科相比的另一个显著的特点就是数学推理。在数学探究学习活动中,类似调查、实验、数据分析等实验验证的方法虽然也存在,但已经不再是关键活动,数学探究学习的关键在于“头脑实验”,也就是数学推理。

数学推理又可以分为演绎推理与合情推理。演绎推理,又叫“证明推理”,也有人称之为逻辑推理,它具有严格的逻辑性,是一种必真推理,对数学命题、定理、定义、公式、法则的证明是必不可少的,这也是现阶段数学探究学习的一个重要部分,很多教师也注意到了它的重要性。合情推理指的是“合乎情理”的推理,带有明显的猜测性,属于一种或然性推理,个人的直觉在推理中占据了主要地位,个性化特点十分明显,在数学探究学习的活动中往往因为它本身具备的或然性而被忽略。其实不然,如果从结论直接入手解决问题显然依赖于演绎推理,