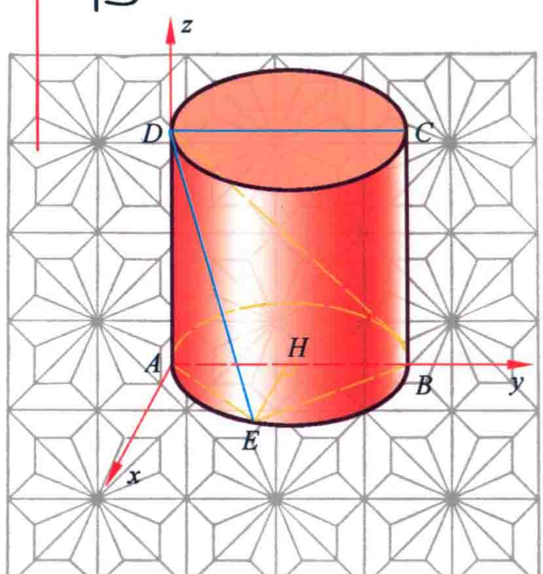
直线与平面

新编中学数学解题方法1000招丛书

高中版 08

刘培杰数学工作室 编



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 08

新编中学数学解题方法1000招丛书

直线与平面

刘培杰数学工作室 编

一切西学皆从算学出，西人十岁外无不习算。今欲采西学，自不可不学算。或师西人，或师内地人之知算者俱可。由是而历算之术，而格致之理，而制器尚象之法，兼综条贯，轮船火器之外，正非

采西学议》

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书以专题的形式对高中数学中直线与平面的重点、难点进行了归纳、总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解直线与平面概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力。

本书适合中学生、中学教师以及数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书. 直线与平面/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5603-4477-5

Ⅰ.①新… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291510号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 宋晓翠
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张14.5 字数340千字
版　　次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4477-5
定　　价 28.00元

⊙ 总序

俗话说:“自古华山一条路”,如果将学数学比作爬山如果将学数学比做爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题。

华罗庚曾将光看书不做习题比作“入宝山而空返”。

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道。近年来,能加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌。正所谓“踏遍坎坷成大路”。

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:“解题同钓鱼术一样永远不会学会”。但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学的,至少是可模仿的。华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:“相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸。”

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Halmos, Paul Richard)一句“问题是数学的心脏”的惊人之语,将解题运动推向高潮。1987 年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的 J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:“如果说确一股贯穿 20 世纪 80 年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流”。

为了配合这股潮流，世界各国大量出版数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现。光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从1981年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就出版了20多种。我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在1949年2月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并"希望各大书局大量编印中学解题参考用"。近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育社的《数学方法论丛书》(13册)，北大出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书。

哈尔滨工业大学出版社作为一"边陲小社"，出版这样套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算做一块引玉之砖。

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以"贪大求全"为原则，试图穷尽一切方法，妄称"解题精技，悉数其间"。然而这实是不可能的，也是不必要的。正所谓"有法法有尽，无法法无穷"。况且即使是已有的方法也不能生搬硬套。我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能"执一而论"，死记硬背为"呆法"，"题目一变即无所用之矣"，须"兼综各法"以解之，方可有效。数学家惠特霍斯(Whitworth)说过"一般的解题这成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法"。

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题。正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性实战性的特征，解题策略要在解题中掌握。

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Pringsheim，Alfred)的名言："不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教育方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度。"

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事。

刘培杰

2013年12月15日

于哈工大

前言

台湾地区知名人士俞大维先生自谓平生受益的书仅一部半，即半部《论语》，教会处世做人道理；一部《几何原理》，给以敏锐逻辑思考和高度判断能力.

俞大维先生曾留学哈佛大学，其专业是数理逻辑. 在国民党高级将领中算是一员儒将. 抗日战争时期在重庆还专门为破译日军密码请教过华罗庚先生，他对《几何原理》如此推崇也体现了几何在培养人逻辑思维能力中不可或缺的地位.

立体几何是平面几何的继续，它对学习者有更高的智力要求，有人将人的智力分成了七大方面. 其中空间想象能力是一大方面. 据研究还是先天带来的，后天很难培养，但由于高考还考它，所以还要加强辅导和培训，正所谓知不可为而为之，不过由于高考对考生的要求不是很高，普通考生还是完全有可能后天补足的.

我们先概述一下立体几何的研究对象及其地位和作用.

立体几何的研究对象是空间图形. 具体地讲，它主要研究空间图形的基本位置关系、主要性质、画法及其有关的度量问题.

首先，立体几何是平面几何的发展.

中学立体几何课程是在初中数学特别是平面几何课程的基础上开设的. 进行立体几何教学常常需要综合运用初中数学特别是平面几何、锐角三角函数、解三角形的基础知识.

平面几何的研究对象是平面图形，平面图形是空间图形的特殊情况．因此，在立体几何中，平面几何的一系列内容得到了深化和发展．例如：

在平面几何中图形的基本元素是点和直线，而在立体几何中则增加了平面这个基本元素，这就使基本元素的相关位置由点与直线、直线与直线拓展到点与直线、点与平面、直线与直线、直线与平面和平面与平面；

在平面几何中两条直线的相关位置只有相交和平行两种，而在立体几何中由于突破了面的限制，两条直线的相关位置有了异面的可能，从而使我们对两条直线相关位置的认识进一步深化，对客观世界空间形式的认识更近乎真实．

关于平行的概念和平行线的传递性，在平面几何中不可能获得全面的认识，而在立体几何中我们不只认识了不在同一平面内多条直线的平行关系，对比异面直线的特性进一步完善了对直线平行关系的认识，而且从直线与平面平行、两个平面平行丰富了平行概念的内涵．

角的概念在立体几何中不只从相交直线的夹角拓展到两条异面直线所成的角，而且拓展到直线与平面所成的角和两个平面所成的角，使角的概念深化．

射影概念、距离概念在立体几何中也得到了进一步的拓展和深化．

在立体几何中有关立体图形的度量问题，既要运用空间图形的基本概念和相互关系，又要将立体几何问题回归为平面几何问题来求解，这就为平面几何、锐角三角函数和解三角形等提供了更加广阔的应用范围，对初中数学知识起到了加深理解、提高综合、灵活应用和分析、解决问题能力的作用．

在基本研究方法上，立体几何和平面几何也有一定的继承和发展的关系．例如：

不论是平面几何还是立体几何，都要运用推证通法来进行推理论证，但由于立体几何常用的定理数量少，空间图形往往可以分解为若干平面图形，所以在推证中间接证法和转化思想的运用有了进一步的发展；

不论是平面几何还是立体几何，都需要从对图形、模型或实物的观察、分析入手，通过逻辑方法进行严格的推证．但是在立体几何中，由于立体图形绘制在平面上时必然会产生畸变，这就要求在观察、分析立体图形直观图时有丰富的空间想象力，同时对于运用逻辑方法的要求也更加严格；

在平面几何里求长度和面积，可用割补法将欲解问题转化为已知问题来求解，立体几何沿用这一思想，并进一步发展得到展平、分解、作截面等方法，将转化思想进一步深化；

在处理直、曲矛盾上，平面几何运用了以直代曲无限逼近的方法，立体几何继承了这个思想，并进一步发展到无限细分求和的高度．

总之，立体几何是建立在初中数学主要是平面几何基础上的，同时深化、发

展了平面几何的内容,并为平面几何、锐角三角函数、解三角形以及初中代数等许多知识的综合、灵活运用提供了机会.

在深化、发展初中数学基础知识和综合、灵活运用这些知识的过程中,逻辑思维能力、运算能力、尤其是空间想象能力是必不可少的.由此可见,立体几何在学生数学能力的发展中占有重要的地位,有着独特的作用.

其次,立体几何是后续课程中有关图形研究的基础.

立体几何的基础知识和通过学习立体几何培育起来的数学能力是学习解析几何、微积分、制图等后续课程中的前提和基础.同时,如同立体几何深化、发展了平面几何的有关内容一样,上述后续课程的学习也深化、发展了立体几何和平面几何的某些概念和方法,使人们对空间图形的认识达到了更加完善的程度.例如:

在解析几何里引进了坐标系,几何图形作为动点轨迹加以研究的方法才得以完善,相切的概念于是更加清晰,用代数方法研究几何图形把转化思想推向更高的层次;

在学习了微积分以后,立体几何中简单多面体和旋转体的表面积、体积公式的推导就有了理论依据,并使各种形体间的内在联系得到进一步的揭示;

在画法几何和制图学里,立体几何直观图画法规则得到深化、完善,分解结构的思想反映在画图上出现了视图,使空间想象从整体形象发展为整体与部分的辩证统一.

总之,立体几何是后续课程有关图形研究的基础,是几何学系统中承前启后的重要环节.

最后需要指出的是:立体几何是实用性较强的一门课程.

立体几何的基础知识和基本方法在解决实际问题中有着广泛的应用.例如:

在检验、测定平面时常应用平面的基本性质;

在判断立柱与板面垂直时要利用直线与平面垂直的判定定理;

过平面外一点作与平面内一直线垂直相交的直线时常利用三垂线定理;

在计算几何体的表面积和体积时要用有关的表面积、体积公式.

在制造各种形状的容器或物体时要用有关的侧面展开图,等等.

总之,立体几何是中学数学中实用性较强、应用范围较广的一门课程.

综上所述,立体几何是平面几何的发展,又是后续课程中有关图形研究的基础;是培养学生数学能力特别是空间想象能力的极好素材,它在解决实际问题上的作用十分突出,是中学数学的重要组成部分.

中国古代虽在求体积中有著名的“祖恒原理”提出,但其教学体系还是学习

西方的.

1840年,英国传教士麦都思在上海所创办的"墨海书馆".除了传播宗教类读物之外,亦翻译、出版过一些自然科学类书籍.其中《续几何原本》是当时书馆最著名的译文科学书籍.

在本书即将成书之际浙江省宁波甬江职高的一位教师邵剑波发来了一篇论文,正好是属于用初等方法来研究四面体体积公式的,附于本书后,希望对喜欢在教学之余进行研究的高中数学教师和学有余力致力于进一步探讨的优秀高中生有所启发.

有一位网友用立体几何思维写了一个有趣的段子:"伸手触摸你身体的每一寸肌肤,与心的距离,总是相等."看到这首诗,我想了一会儿,觉得作者爱上了一个球.

读完本书你也会爱上立体几何这门课的.

刘培杰
2013年12月15日
于哈工大

⊙ 目录

第一编　解题方法编

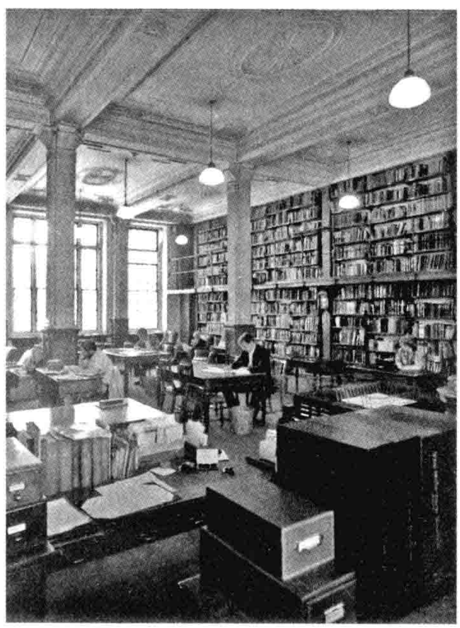
怎样在立体几何中使用反证法　/3
怎样用反证法解立体几何问题　/6
怎样用公式法求异面直线间的距离　/9
怎样解异面直线的有关问题　/14
怎样推导和使用异面直线间的距离公式(Ⅰ)　/18
怎样推导和使用异面直线间的距离公式(Ⅱ)　/22
怎样用射影法求异面直线间的距离　/26
怎样用极值法求异面直线间的距离　/29
怎样求异面直线所成的角　/32
怎样在立体几何中计算角和距离　/34
怎样确定点在平面上的射影位置　/40
怎样用射影法解立体几何题　/42
怎样利用立体几何中的基本体解题　/45
怎样用基本图形解立体几何题(Ⅰ)　/49
怎样用基本图形解立体几何题(Ⅱ)　/54
怎样理解和应用体积比　/58
怎样应用立体几何中的三射线定理　/64
怎样在非常态图上活用三垂线定理　/67
怎样使用三垂线定理逆定理的推广　/70

怎样利用“三面角的余弦定理”解一类立体几何题 /72
怎样使用推广后的射影定理 /76
怎样求二面角(Ⅰ) /79
怎样求二面角(Ⅱ) /83
怎样求二面角(Ⅲ) /85
怎样应用“侧面积＝底面积/cos α”解题 /87
怎样使用含有一个直二面角的三面角公式 /90
怎样解证立体几何中的折叠问题 /92
怎样解立体几何中的极值问题 /99
怎样解立体几何中的最值问题 /103
怎样用函数思想和方法解立体几何最值问题 /108
怎样在立体几何中应用角与射影的关系解题 /112
怎样应用空间余弦定理 /115
怎样判断简单平面图形能否折叠成封闭多面体 /117
怎样进行空间图形的变式 /120
怎样使用内切球半径公式 /126
怎样计算平面垒球的高度 /128
怎样应用立体几何中的“定比分点”公式 /130
怎样解解析几何中的立体几何问题 /132
怎样用向量法处理高考中与角有关的立体几何探索题 /135
怎样利用空间向量证明线面平行 /140
怎样求二面角大小 /142
怎样解立体几何中最值问题 /145
怎样剖析立体几何六类易错点 /148
怎样解在立体图形中透视平面轨迹问题 /152
怎样解立体几何中图形的翻折与展开问题 /155
怎样解矩形折叠问题 /158
怎样确定垂足的位置 /161
怎样解空间图形中的轨迹问题 /164
怎样解角与其在平面上的射影角的大小问题 /170
怎样解高考立体几何的综合应用题 /173

第二编 试题精粹编

第一编

解题方法编



怎样在立体几何中使用反证法

我们知道,除公理以外的所有数学命题必须经过证明才能判断是否正确,如何证明呢?由于每种命题都有它的等价命题,这样在证明一个数学命题时就有两种方法:一种是从已知出发,根据公理、定理,按逻辑推理,一直推到命题的结论;另一种是证明原命题的等价命题,间接证明原命题的正确性.前种证法是直接证法,后种证法是间接证法.间接证法中常用的是反证法.

反证法是一种重要的逻辑推理形式,在数学研究中,它是一件精良的武器.它的特点是:否定命题的结论后去推出与某公理、某定理、题设或临时假设不相容或自相矛盾,从而证明命题的结论成立.

例 1　已知:如图 1 所示,$a \not\subset \alpha$,$b \subset \alpha$,$a /\!/ b$,求证:$a /\!/ \alpha$.

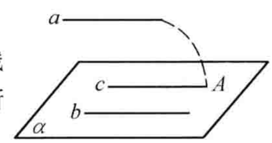


图 1

证法 1　因为 $a \not\subset \alpha$,所以 $a /\!/ \alpha$ 或 $a \cap \alpha = A$.

假设 $a \cap \alpha = A$,因为 $a /\!/ b$,$A \notin b$,在平面 α 内过点 A 作直线 $c /\!/ b$,可知 $a /\!/ c$,这与 $a \cap c = A$ 矛盾,所以不存在 $a \cap \alpha = A$.所以 $a /\!/ \alpha$.

证法 2　假设 $a \cap \alpha = A$,因为 $a /\!/ b$,所以 $A \notin b$.

a 和 b 确定一个平面 β,则平面 α 与平面 β 都有过直线 b 和直线 b 外一点 A.故 α 与 β 重合,所以 $a \subset \alpha$.

这与已知 $a \not\subset \alpha$ 矛盾.

证法 3　假设 $a \cap \alpha = A$,因为 $a /\!/ b$,所以 $A \notin b$,a 和 b 确定一个平面 β.

因为 $b \subset \alpha$,所以 b 是 α 和 β 的交线.又 $A \in \beta$,$A \in \alpha$,所以 $A \in b$.

这与 $A \notin b$ 矛盾.

证法 4　因为 $a \not\subset \alpha$,所以存在一点 $B \in a$ 且 $B \notin \alpha$.

假设 $a \cap \alpha = A$,因为 $a /\!/ b$,所以 $A \notin b$,而 $b \subset \alpha$.

由平面内一点与平面外一点的连线和平面内不经过该点的直线是异面直线,可推出 a 与 b 异面,与已知 $a /\!/ b$ 矛盾.

证法 5　假设 $a \cap \alpha = A$,因为 $a /\!/ b$,所以 b 和平面 α 相交,与已知 $b \subset \alpha$ 矛盾.

用反证法证明这个问题是以下的思考过程:假设 a,α 不平行,以它为条件,经过一系列的正确推理,最后得出与已知矛盾的结论.这是怎么造成的呢?已知条件没错,公理定理不会错,推理也没错,那么唯一的错误就是一开始假设 a 与 α 相交.根据排中律,“结论不成立”与“结论成立”必然有一个正确,即然“结论不成立”有错误,就是肯定结论必然成立了,所以 $a /\!/ \alpha$.

在反证法的实际运用中,第一步反设非常重要,务求准确、恰当,用词要十分讲究,不能出现漏洞,否则后面的推导会失败.例如,“小于”的否定是“不小于”,而不是“大于”;“垂直”的否定是“不垂直”,而不是“平行”.有了正确的反设之后,以反设为已知条件之一,进行推

理，务必合乎逻辑，严密，根据充分，直至导出矛盾. 最后根据所得的矛盾，明确地给予结论以肯定，这样才能算完成命题的证明.

当然，否定原命题的结论时，否定的事项有时不止一个，而是多个，在这种情况下，应用反证法，就要把这多种否定的情况逐个推倒，这种反证法叫穷举法.

那么证明一个命题，如何适当地采用反证法呢？一般说来，以下几种类型的证明问题，用反证法比较合适.

1. 证明两条直线为异面直线宜用反证法.

例 2 已知：如图 2 所示，两个相交平面 α，β，过它们交线上两点 A，B，在平面 α 内作直线 AC，在平面 β 内作直线 BD，C，D 均不在交线 AB 上. 求证：AC，BD 是异面直线.

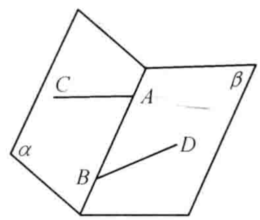


图 2

证明 假设 AC，BD 在同一平面内.

因为 $B \notin AC$，所以 AC 与点 B 确定平面 α，则 AC，$BD \subset \alpha$.

因为 $A \notin BD$，所以 BD 与点 A 确定平面 β，所以 AC，$BD \subset \beta$，所以 α，β 重合，这与已知 α 与 β 相交矛盾.

所以 AC，BD 是异面直线.

2. 基本定理或某章、节的起始定理，宜用反证法.

例 3 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

这是两个平面平行的判定定理，证明可参见课本.

3. 某些命题的结论是属于否定型的，宜用反证法.

例 4 如图 3 所示，已知四面体 $P-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 中，$\angle A \neq 90°$，一条侧棱 $PA \perp$ 底面 $\triangle ABC$. 求证：点 A 在侧面 PBC 上的射影 A' 不可能是 $\triangle PBC$ 的垂心.

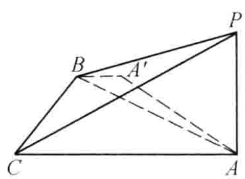


图 3

证明 假设点 A 在侧面 PBC 的射影 A' 是 $\triangle PBC$ 的垂心，联结 BA'，由 $BA' \perp PC$ 得 $AB \perp PC$. 因为 $PA \perp$ 底面 ABC，所以 $PA \perp AB$，所以 $AB \perp$ 平面 PCA，则 $AB \perp AC$，即 $\angle BAC = 90°$. 这与已知 $\angle A \neq 90°$ 矛盾.

所以 A' 不是 $\triangle PBC$ 的垂心.

4. 当题目结论的反面比结论本身更具体、更明确时，宜用反证法.

例 5 设 A，B，C，D 是空间四点，且 $\angle ABC = \angle ADC = \angle DAB = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$. 求证：$A$，$B$，$C$，$D$ 四点共面.

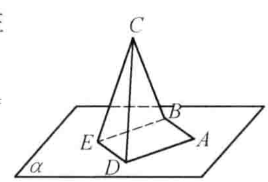


图 4

证明 假设 A，B，C，D 不共面，不妨设 A，B，D 在同一个平面 α 内，则 $C \notin \alpha$. 在 α 内过 B，D 两点分别作 AD，AB 的平行线，相交于点 E，由已知易证 $ABED$ 是矩形. 联结 CE.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}AD\perp CD\\ AD\perp DE\\ CD\cap DE=D\end{array}\right\}\Rightarrow AD\perp \text{平面}\, CDE\\ \\ AD\parallel BE\end{array}\right\}\Rightarrow BE\perp \text{平面}\, CDE$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}BC\perp AB\\ AB\parallel ED\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp ED\\ \\ BC\perp CD\\ ED\cap CD=D\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp \text{平面}\, CDE$$

这样，过平面 CDE 外一点 B，有两条直线 BE，BC 都与该平面垂直，这是不可能的，则点 C 在平面 α 外不成立.

所以 A,B,C,D 四点共面.

5. 某些唯一性定理的证明，宜用反证法.

例 6　求证：与两条异面直线都垂直相交的直线有且仅有一条.

已知：如图 5 所示，a，b 为两条异面直线. 求证：a，b 的公垂线有且仅有一条.

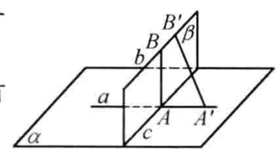


图 5

证明　过 a 作与 b 平行的平面 α，过 b 作与 a 垂直的平面 β. 设 $\alpha\cap\beta=c$，则 $c\cap a=A$. 在平面 β 内过点 A 作 b 的垂线 AB 交 b 于点 B.

因为 $b\parallel c$，所以 $AB\perp c$，$AB\perp b$.

又因 $\beta\perp\alpha$，$AB\subset\beta$，所以 $AB\perp\alpha$，则 $AB\perp a$.

所以 AB 是异面直线 a，b 的公垂线.

唯一性：设与 AB 不重合的直线 $A'B'$ 也是 a，b 的公垂线，$A'B'\perp a$，$A'B'\perp b$.

因为 $b\parallel c$，所以 $A'B'\perp c$，则 $A'B'\perp\alpha$. 由 $AB\perp\alpha$，所以 $AB\parallel A'B'$.

则 AB，$A'B'$ 可以确定一个平面，这样 a，b 共面，与已知 a，b 为异面直线矛盾.

所以直线 AB 是唯一的. 即 a，b 的公垂线有且仅有一条.

能够用反证法的题型绝不止以上几种，比如，题目的结论涉及"无限"，题目的结论涉及"至少"，等等，用反证法来证会比较适宜，容易获得成功.

一般地说，当从已知条件要证出结论很困难，而否定结论之后就相当于新添了假设，较容易推出更多的结论时，采用反证法就比较方便.

怎样用反证法解立体几何问题

在中学数学中有些问题,特别是几何问题,往往不易从原题中的条件出发直接进行证明,而采用间接证明,例如,反证法,可达到证明命题的目的,这种证题方法叫作间接证法.反证法在立体几何中应用较多.

一、证诸直线共面

例 1 求证:过一点和一条直线垂直的所有直线都在一个平面内.

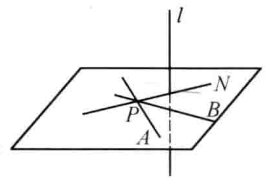


图 1

如图 1 所示,已知一点 P 与直线 l,PA,PB,…,PN 都垂直于 l.求证:PA,PB,…,PN 在同一平面内.

证明 因为 $PA \cap PB = P$,$PA \perp l$,$PB \perp l$,所以 $l \perp$ 平面 PAB.

假设 $PN \not\subset$ 平面 PAB,因为 $PN \perp l$,$PA \perp l$,$PN \cap PA = P$.所以 $l \perp$ 平面 PAN.这样过点 P 有两个平面和 l 垂直,与过一点只能有一个平面和一条直线垂直矛盾,故 $PN \subset$ 平面 PAB.则所有过点 P 且与 l 垂直的直线都在平面 PAB 内,即 PA,PB,…,PN 在同一平面内.

二、证诸点共面

例 2 如图 2 所示,已知空间四点 A,B,C,D 满足 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$,求证:$A$,$B$,$C$,$D$ 在同一平面内.

证明 假定 A,B,D 在平面 α 内,C 不在 α 内,C' 是 C 在 α 上的射影,联结 $C'D$.

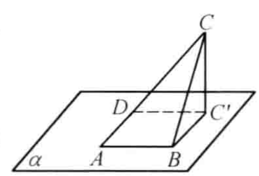


图 2

因为 $CD \perp AD$,$CC' \perp \alpha$,所以 $C'D \perp AD$,$CD > C'D$.同理

$$C'B \perp AB, CB > C'B \quad ①$$

又

$$C'D \perp AD, C'B \perp AB \quad ②$$

且 $AB \perp AD$,A,B,D,$C' \in \alpha$.所以 $ABC'D$ 为矩形,$\angle BC'D = 90^\circ$,所以

$$BC'^2 + CD^2 = BD^2 \quad ③$$

另外,已知 $\angle BCD = 90^\circ$,因而

$$BC^2 + CD^2 = BD^2 \quad ④$$

由 ①,② 得

$$CD^2 + CB^2 > C'B^2 + C'D^2 \quad ⑤$$

由 ③,④ 得

$$CD^2 + CB^2 = C'B^2 + C'D^2 \quad ⑥$$

⑤ 与 ⑥ 是矛盾的,可见 C 一定在 α 内,因此,A,B,C,D 四点在同一平面内.