

考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学一 上册

 文都网校® 终身学习导师

领课码:

1. 刮开涂层获取领课码，访问 <http://moni.wenduedu.com>
2. 输入领课码免费领取书配课
3. 开始学习吧！

咨询热线: 400-010-8090
扫描二维码关注文都网校



正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

- ☑ 名师32课时导学精讲
- ☑ 数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+ 网络答疑



考研数学

常考题型 解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学一 上册



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学一/毛纲源编著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2014. 10

(毛纲源考研数学辅导系列)

ISBN 978-7-5680-0408-4

I. ①考… II. ①毛… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219411 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一)

毛纲源 编著

策划编辑: 王汉江(QQ:14458270)

责任编辑: 王汉江

特约编辑: 陈文峰 李 焕

封面设计: 杨 安

责任监印: 朱 霞

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)81321915

录 排: 北京世纪文都教育科技有限公司

印 刷: 北京市通州运河印刷厂

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 37.25

字 数: 923 千字

版 次: 2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 68.00 元(上、下册)



华中出版

本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

双清·园中

前言

本书在教育部制定的考研数学一“考试大纲”的指导下,经过多年的教学实践精心编写而成,完整的知识体系,更加符合当前考生复习备考的需求.全书共分为三篇:第1篇为高等数学,第2篇为线性代数,第3篇为概率论与数理统计.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题,内容丰富,题型广泛、全面,任何一年的真题均可在本书中找到对应的题型;同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结,对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调.讲解的方法通俗易懂,由浅入深,富于启发,是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学一的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,久销不衰.很多已考取理工类硕士研究生都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛

书结合起来学习,必将收到事半功倍的效果。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误、疏漏之处在所难免,恳请专家、读者指正。

毛纲源

2014 年 10 月于武汉理工大学

目 录

第 1 篇 高等数学

1.1 函数、极限、连续	(2)
1.1.1 求几类与复合函数有关的函数表示式	(2)
题型 1.1.1.1 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$	(2)
题型 1.1.1.2 求分段点相同的两分段函数的复合函数	(2)
1.1.2 函数的奇偶性	(3)
题型 1.1.2.1 判别(证明)函数的奇偶性	(3)
题型 1.1.2.2 奇、偶函数性质的应用	(4)
1.1.3 讨论函数的有界性和周期性	(5)
题型 1.1.3.1 判定有限开区间内连续函数的有界性	(5)
题型 1.1.3.2 判定无穷区间内连续函数的有界性	(5)
题型 1.1.3.3 讨论函数的周期性	(6)
1.1.4 理解极限概念	(7)
题型 1.1.4.1 正确理解极限定义中的“ ϵ 、 N ”, “ ϵ 、 δ ”, “ ϵ 、 X ” 语言的含义	(7)
题型 1.1.4.2 正确区别无穷大量与无界变量	(7)
1.1.5 求未定式极限	(8)
题型 1.1.5.1 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限	(8)
题型 1.1.5.2 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(11)
题型 1.1.5.3 求 $\infty - \infty$ 型极限	(12)
题型 1.1.5.4 求幂指函数型(0^0 型, ∞^0 型, 1^∞ 型) 极限	(12)
1.1.6 求数列极限	(15)
题型 1.1.6.1 求数列通项为 n 项和的极限	(15)
题型 1.1.6.2 求由递推关系式给出的数列极限	(17)
1.1.7 求几类特殊子函数形式的函数极限	(18)
题型 1.1.7.1 求须先考察左、右极限的函数极限	(18)
题型 1.1.7.2 求含根式差的函数极限	(21)
题型 1.1.7.3 求含或可化为含指数函数差的函数极限	(21)
题型 1.1.7.4 求含 $\ln f(x)$ 的函数极限, 其中 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 1$	(22)
题型 1.1.7.5 求含有界变量因子的函数极限	(22)
1.1.8 求含参变量的函数极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$	(22)
题型 1.1.8.1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$, 其中 $\varphi(n, x)$ 为或可化为 $F(x)^{g(n)}$ 指数函数型	(23)
题型 1.1.8.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$, 其中 $\varphi(n, x)$ 为或可化为 $g(n)^{F(x)}$ 幂函数型	(23)
题型 1.1.8.3 求 $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x)$, 其中 $\varphi(t, x)$ 可化为 $g(n)^{F(x)}$ 型或 $F(x)^{g(t)}$ 型	(24)
题型 1.1.8.4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n, x)$ 或 $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t, x)$, 其中 $\varphi(n, x) = F(n, x)^{g(t, n)}$ 或 $\varphi(t, x) = F(t, x)^{g(t, x)}$	(24)

1.1.9 已知一极限求其待定常数或含未知函数的另一极限	(25)
题型 1.1.9.1 由含未知函数的一些极限,求含该函数的另一极限	(25)
题型 1.1.9.2 已知极限式的极限,求其待定常数	(26)
1.1.10 比较和确定无穷小量的阶	(27)
题型 1.1.10.1 比较无穷小量的阶	(28)
题型 1.1.10.2 确定无穷小量为几阶无穷小量	(29)
1.1.11 讨论函数的连续性及其间断点的类型	(29)
题型 1.1.11.1 判别函数的连续性	(29)
题型 1.1.11.2 讨论分段函数的连续性	(30)
题型 1.1.11.3 判别函数间断点的类型	(32)
1.1.12 连续函数性质的两点应用	(33)
题型 1.1.12.1 证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使含 ξ 的等式成立	(34)
题型 1.1.12.2 证明方程实根的存在性	(35)
1.2 一元函数微分学	(37)
1.2.1 导数定义的三点应用	(37)
题型 1.2.1.1 判断函数在某点的可导性	(37)
题型 1.2.1.2 利用导数定义求某些函数的极限	(40)
题型 1.2.1.3 利用导数定义讨论函数性质	(42)
1.2.2 讨论分段函数的可导性及其导函数的连续性	(42)
题型 1.2.2.1 讨论分段函数的可导性	(42)
题型 1.2.2.2 讨论分段函数的导函数的连续性	(43)
题型 1.2.2.3 讨论一类特殊分段函数在其分段点的连续性、可导性及其导函数的连续性	(44)
1.2.3 讨论含绝对值函数的可导性	(44)
题型 1.2.3.1 讨论绝对值函数 $ f(x) $ 的可导性	(44)
题型 1.2.3.2 讨论函数 $f(x) = \varphi(x) g(x)$ 的可导性	(44)
1.2.4 求一元函数的导数和微分	(45)
题型 1.2.4.1 求复合函数的导数	(45)
题型 1.2.4.2 求反函数的导数	(46)
题型 1.2.4.3 求隐函数的导数	(47)
题型 1.2.4.4 求分段函数的一阶、二阶导数	(48)
题型 1.2.4.5 求幂指函数及含多个因子连乘积的函数的导数	(48)
题型 1.2.4.6 求由参数方程所确定的函数的导数	(49)
题型 1.2.4.7 求某些简单函数的高阶导数	(49)
题型 1.2.4.8 求一元函数的微分	(52)
1.2.5 利用函数的连续性、可导性确定其待定常数	(53)
题型 1.2.5.1 利用函数的连续性确定其待定常数	(53)
题型 1.2.5.2 根据函数的可导性确定其待定常数	(54)
1.2.6 利用微分中值定理的条件及其结论解题	(55)
1.2.7 利用罗尔定理证明中值等式	(56)

题型 1.2.7.1	证明中值等式 $f'(\xi) = 0$ 或 $f''(\xi) = 0$	(57)
题型 1.2.7.2	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $cf'(\xi) = bg'(\xi)$, 其中 c, b 为常数	(57)
题型 1.2.7.3	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $k(\xi)f'(\xi) + h(\xi)f(\xi) = Q(\xi)$	(58)
题型 1.2.7.4	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) = 0$	(59)
题型 1.2.7.5	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$ ($g(\xi) \neq 0$)	(59)
题型 1.2.7.6	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$	(60)
题型 1.2.7.7	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ (n 为正整数)	(60)
题型 1.2.7.8	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi)/g(\xi) = f''(\xi)/g''(\xi)$, 即 $f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0$	(60)
题型 1.2.7.9	证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - b\xi] = b$	(61)
题型 1.2.7.10	证明与定积分有关的中值等式	(62)
1.2.8	拉格朗日中值定理的应用	(63)
题型 1.2.8.1	证明与函数改变量(增量)有关的中值(不)等式	(64)
题型 1.2.8.2	证明函数与其导数的关系	(64)
题型 1.2.8.3	求解与函数差值有关的问题	(66)
题型 1.2.8.4	证明多个中值所满足的中值等式	(66)
题型 1.2.8.5	求中值的极限位置	(67)
1.2.9	利用柯西中值定理证明中值等式	(68)
题型 1.2.9.1	证明两函数差值(增量)比的中值等式	(68)
题型 1.2.9.2	证明两函数导数比的中值等式	(68)
1.2.10	泰勒定理的两点应用	(69)
题型 1.2.10.1	证明与高阶导数有关的中值(不)等式	(70)
题型 1.2.10.2	计算按常规方法不好求的未定式极限	(71)
1.2.11	利用导数证明不等式	(71)
题型 1.2.11.1	证明函数不等式	(72)
题型 1.2.11.2	证明数值不等式	(77)
1.2.12	讨论函数的性态	(77)
题型 1.2.12.1	证明函数在区间 I 上是一个常数	(77)
题型 1.2.12.2	证明(判别)函数的单调性	(78)
题型 1.2.12.3	讨论函数是否取得极值	(78)
题型 1.2.12.4	利用二阶微分方程讨论函数是否取极值, 其曲线是否有拐点	(80)
题型 1.2.12.5	求曲线凹凸区间与拐点	(80)
题型 1.2.12.6	求函数的单调区间、极值、最值	(83)
题型 1.2.12.7	求曲线的渐近线	(85)
1.2.13	利用函数性态讨论方程的根	(86)
题型 1.2.13.1	讨论不含参数的方程实根的存在性及其个数	(86)
题型 1.2.13.2	讨论含参数的方程实根的存在性及其个数	(87)
1.2.14	函数性态与函数图形	(88)
题型 1.2.14.1	利用函数性态作函数图形	(88)

题型 1.2.14.2	利用函数的图形,确定其导函数的图形	(89)
题型 1.2.14.3	利用导函数的图形,确定原来函数的性态	(90)
1.2.15	一元函数微分学的应用	(90)
题型 1.2.15.1	求平面曲线的切线方程和法线方程	(90)
题型 1.2.15.2	求解与切线在坐标轴上的截距有关的问题	(92)
题型 1.2.15.3	求解与两曲线相切的有关问题	(92)
题型 1.2.15.4	求解与平面曲线的曲率有关的问题	(93)
1.3	一元函数积分学	(94)
1.3.1	原函数与不定积分的关系	(94)
题型 1.3.1.1	原函数的概念及其判定	(94)
题型 1.3.1.2	求分段函数的原函数或不定积分	(95)
题型 1.3.1.3	利用积分运算与微分运算的互逆关系求解与原函数有关的问题	(95)
1.3.2	各类被积函数不定积分的算法	(96)
题型 1.3.2.1	求被积函数为 $f(x)/g(x)$ 的不定积分,其中 $f(x) = g'(x)$ 或 $f'(x) = 1/g(x)$	(96)
题型 1.3.2.2	计算被积表达式中出现或可化为 $f(\varphi(x))$ 和 $\varphi'(x)dx$ 乘积的不定积分	(97)
题型 1.3.2.3	计算被积函数仅为一类函数或为两类不同函数乘积的不定积分	(98)
题型 1.3.2.4	计算简单无理函数的不定积分	(99)
题型 1.3.2.5	求 $\int \frac{1}{(ax+b)^k} f\left(\frac{1}{(ax+b)^{k-1}}\right) dx$, 其中 $k \neq 1$ 为正实数	(102)
题型 1.3.2.6	求被积函数的分母为或可化为相差常数的两函数乘积的积分	(102)
题型 1.3.2.7	求三角函数的不定积分	(103)
题型 1.3.2.8	求被积函数含复合对数函数或复合反三角函数为因子函数的积分	(104)
题型 1.3.2.9	有理分式函数 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式) 的积分算法	(104)
1.3.3	利用定积分性质计算定积分	(106)
题型 1.3.3.1	利用其几何意义计算定积分	(106)
题型 1.3.3.2	计算对称区间上的定积分	(107)
题型 1.3.3.3	计算周期函数的定积分	(109)
题型 1.3.3.4	利用定积分的常用计算公式计算定积分	(110)
题型 1.3.3.5	计算被积函数含函数导数的积分	(111)
题型 1.3.3.6	比较和估计定积分的大小	(113)
题型 1.3.3.7	求解含积分值为常数的函数方程	(114)
题型 1.3.3.8	计算几类须分子区间积分的定积分	(114)
题型 1.3.3.9	计算含参数的定积分	(116)
题型 1.3.3.10	计算需换元计算的定积分	(117)
题型 1.3.3.11	求由定积分表示的变量极限	(117)
1.3.4	求解与变限积分有关的问题	(117)
题型 1.3.4.1	计算含变限积分的极限	(118)
题型 1.3.4.2	求变限积分的导数	(120)
题型 1.3.4.3	求变限积分的定积分	(122)

题型 1.3.4.4	讨论变限积分函数的性态	(123)
1.3.5	证明定积分等式	(124)
题型 1.3.5.1	证明定积分的变换公式	(124)
题型 1.3.5.2	证明含定积分的中值等式	(125)
1.3.6	证明定积分不等式	(126)
题型 1.3.6.1	证明积分限相等时不等式两端成为零的积分不等式	(126)
题型 1.3.6.2	证明 $\int_a^b f(x) dx$ (或 $\left \int_a^b f(x) dx \right \leq k$ (或 $\geq k$), k 为常数	(127)
题型 1.3.6.3	证明题设中有二阶导数大(或小)于等于零的定积分不等式	(128)
1.3.7	计算反常积分	(129)
题型 1.3.7.1	计算无穷区间上的反常积分	(129)
题型 1.3.7.2	判别无界函数的反常积分的敛散性,如收敛计算其值	(132)
题型 1.3.7.3	判别混合型反常积分的敛散性,如收敛计算其值	(133)
1.3.8	定积分的应用	(135)
题型 1.3.8.1	已知曲线方程,求其所围平面图形的面积	(135)
题型 1.3.8.2	已知曲线所围平面图形的面积(或其旋转体体积)反求该曲线	(136)
题型 1.3.8.3	计算平面曲线的弧长	(136)
题型 1.3.8.4	计算平行截面面积已知的立体体积	(137)
题型 1.3.8.5	求旋转体体积	(137)
题型 1.3.8.6	求旋转体的侧(表)面积	(140)
题型 1.3.8.7	求解几何应用与最值问题相结合的应用题	(141)
题型 1.3.8.8	计算变力所做的功	(142)
题型 1.3.8.9	计算液体的侧压力	(143)
题型 1.3.8.10	计算细杆对质点的引力	(143)
题型 1.3.8.11	计算函数在区间上的平均值	(144)
1.4	向量代数和空间解析几何	(145)
1.4.1	向量代数及其简单应用	(145)
题型 1.4.1.1	用坐标表达式进行向量运算	(145)
题型 1.4.1.2	计算向量的数量积、向量积、混合积	(146)
题型 1.4.1.3	利用向量运算证明(确定)向量关系	(148)
1.4.2	求平面方程	(148)
题型 1.4.2.1	求过已知点的平面方程	(149)
题型 1.4.2.2	求过已知直线的平面方程	(150)
题型 1.4.2.3	根据平面在坐标轴上的相对位置求其方程	(150)
题型 1.4.2.4	求过两平面交线的平面方程	(151)
1.4.3	求直线方程	(152)
题型 1.4.3.1	求过已知点的直线方程	(152)
题型 1.4.3.2	求过已知点且与已知直线相交的直线方程	(153)
题型 1.4.3.3	求与两直线相交的直线方程	(154)

题型 1.4.3.4	求直线在平面上的投影直线方程	(155)
1.4.4	讨论直线与平面的位置关系	(155)
题型 1.4.4.1	讨论平面间的位置关系	(155)
题型 1.4.4.2	讨论直线与直线的位置关系	(157)
题型 1.4.4.3	讨论直线与平面的位置关系	(157)
1.4.5	求点到平面或到直线的距离	(158)
题型 1.4.5.1	求点到平面的距离	(158)
题型 1.4.5.2	求点到直线的距离	(160)
1.4.6	求二次曲面方程和空间曲线在坐标面上的投影方程	(161)
题型 1.4.6.1	求坐标面上曲线绕坐标轴旋转所得的旋转曲面方程	(161)
题型 1.4.6.2	求空间曲线绕坐标轴旋转所得的曲面方程	(161)
题型 1.4.6.3	求母线平行于坐标轴的柱面方程	(162)
题型 1.4.6.4	求空间曲线在坐标面上的投影方程	(163)
1.4.7	求解空间解析几何与线性代数、微积分相结合的综合题	(164)
1.5	多元函数微分学及其应用	(167)
1.5.1	正确理解二元函数连续、可偏导及可微之间的关系	(167)
题型 1.5.1.1	依定义判别二元函数在某点是否连续、可偏导及可微	(167)
题型 1.5.1.2	判别二元函数连续、可偏导、可微之间的关系	(169)
1.5.2	计算多元函数的偏导数和全微分	(170)
题型 1.5.2.1	利用隐函数存在定理确定隐函数	(170)
题型 1.5.2.2	求抽象复合函数的偏导数	(170)
题型 1.5.2.3	计算隐函数的导数	(173)
题型 1.5.2.4	求方向导数和梯度	(175)
题型 1.5.2.5	求二元函数的全微分	(177)
1.5.3	多元函数微分学的应用	(177)
题型 1.5.3.1	已知空间曲线的参数方程,求其切线或法平面方程	(177)
题型 1.5.3.2	已知空间曲线为两曲面的交线,求其切线或法平面方程	(178)
题型 1.5.3.3	已知空间曲面方程,求其切平面或法线方程	(180)
题型 1.5.3.4	求二元函数的极值和最值	(181)
题型 1.5.3.5	求二(多)元函数的条件极值	(184)
1.6	多元函数积分学	(186)
1.6.1	利用区域的对称性化简多元函数的积分	(186)
题型 1.6.1.1	计算积分区域具有对称性,被积函数具有奇偶性的重积分	(186)
题型 1.6.1.2	计算积分区域关于直线 $y = x$ 对称的二重积分	(188)
题型 1.6.1.3	计算积分区域具有轮换对称性的三重积分	(189)
题型 1.6.1.4	计算积分曲线(面)具有对称性的第一类曲线(面)积分	(189)
题型 1.6.1.5	计算平面积分曲线关于 $y = x$ 对称的第一类曲线积分	(190)
题型 1.6.1.6	计算空间积分曲线(曲面)具有轮换对称性的第一类曲线(曲面)积分	(190)
1.6.2	交换积分次序及转换二次积分	(191)

题型 1.6.2.1	交换二次积分的积分次序	(191)
题型 1.6.2.2	转换二次积分	(192)
1.6.3	计算二重积分	(194)
题型 1.6.3.1	计算被积函数分区域给出的二重积分	(194)
题型 1.6.3.2	计算圆域或部分圆域上的二重积分	(195)
1.6.4	计算三重积分	(197)
题型 1.6.4.1	计算积分区域的边界方程均为一次的三重积分	(197)
题型 1.6.4.2	计算积分区域为旋转体的三重积分	(197)
题型 1.6.4.3	计算积分区域由球面或球面与锥面所围成的三重积分	(198)
题型 1.6.4.4	计算被积函数至少缺两个变量的三重积分	(199)
题型 1.6.4.5	计算易求出其截面区域上的二重积分的三重积分	(200)
1.6.5	计算曲线积分	(201)
题型 1.6.5.1	计算第一类平面曲线积分	(201)
题型 1.6.5.2	求解平面上与路径无关的第二类曲线积分有关问题	(202)
题型 1.6.5.3	计算平面上与路径有关的第二类曲线积分	(205)
题型 1.6.5.4	计算空间第二类曲线积分	(208)
题型 1.6.5.5	计算积分曲线具有对称性的第二类曲线积分	(210)
1.6.6	计算曲面积分	(211)
题型 1.6.6.1	计算第一类曲面积分	(211)
题型 1.6.6.2	计算第二类曲面积分	(215)
题型 1.6.6.3	计算积分曲面具有对称性的第二类曲面积分	(221)
题型 1.6.6.4	已知第二类曲面积分的值,求被积式中的未知函数	(222)
1.6.7	多元函数积分学的应用	(222)
题型 1.6.7.1	计算空间曲线的弧长	(222)
题型 1.6.7.2	求曲面面积	(223)
题型 1.6.7.3	计算立体体积	(224)
题型 1.6.7.4	求质量、质心、形心及转动惯量	(226)
题型 1.6.7.5	计算变力沿曲线所做的功	(229)
题型 1.6.7.6	计算物体对质点的引力	(231)
题型 1.6.7.7	计算向量场的散度与流量(通量)	(232)
题型 1.6.7.8	计算向量场的旋度与环流量	(233)
1.7	级数	(235)
1.7.1	判别三类常数项级数的敛散性	(235)
题型 1.7.1.1	判别正项级数的敛散性	(235)
题型 1.7.1.2	判别交错级数的敛散性	(239)
题型 1.7.1.3	判别任意项级数的敛散性	(242)
1.7.2	证明常数项级数的敛散性	(244)
题型 1.7.2.1	证明一般项为或可化为相邻两项代数数和的级数的敛散性	(244)
题型 1.7.2.2	已知一级数收敛,证明相关级数收敛	(245)

题型 1.7.2.3	已知一般项有极限,证明该级数的敛散性	(246)
题型 1.7.2.4	证明(判别)一般项为(含)定积分的级数的敛散性	(246)
题型 1.7.2.5	证明一般项用递推关系式给出的级数的敛散性	(247)
题型 1.7.2.6	已知函数高阶可导,证明由该函数值组成的级数的敛散性	(247)
1.7.3	幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法	(248)
1.7.4	求幂级数与数项级数的和	(250)
题型 1.7.4.1	求 $\sum_{n=1}^{\infty} P(n)x^n$ 的和函数, $P(n)$ 为 n 的多项式	(250)
题型 1.7.4.2	求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Q(n)} x^n$ 的和函数, $Q(n)$ 为 n 的多项式	(252)
题型 1.7.4.3	求含阶乘因子的幂级数的和函数	(254)
题型 1.7.4.4	求数项级数的和	(256)
1.7.5	将简单函数间接展开成幂级数	(259)
题型 1.7.5.1	求反三角函数的幂级数展开式	(259)
题型 1.7.5.2	将对数函数展成幂级数	(260)
题型 1.7.5.3	将有理分式函数展成幂级数	(260)
题型 1.7.5.4	将三角函数展成幂级数	(261)
题型 1.7.5.5	利用幂级数展开式求函数的高阶导数	(261)
1.7.6	傅里叶级数	(261)
题型 1.7.6.1	将周期函数展为傅里叶级数	(261)
题型 1.7.6.2	求傅里叶系数	(266)
题型 1.7.6.3	求傅里叶级数的和函数在某点的值	(267)
1.8	常微分方程	(268)
1.8.1	求解一阶线性微分方程	(268)
题型 1.8.1.1	求解可分离变量的微分方程	(268)
题型 1.8.1.2	求解齐次方程	(269)
题型 1.8.1.3	求解一阶线性方程	(270)
题型 1.8.1.4	求解几类可化为一阶线性方程的方程	(270)
题型 1.8.1.5	求解方程 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$	(272)
题型 1.8.1.6	求解由变量的增量关系给出的一阶方程	(274)
题型 1.8.1.7	求满足某种性质的一阶微分方程的特解	(274)
1.8.2	求解线性微分方程	(276)
题型 1.8.2.1	利用线性微分方程解的结构和性质求解有关问题	(276)
题型 1.8.2.2	求解可降阶的二阶微分方程	(277)
题型 1.8.2.3	求解高阶常系数齐次线性方程	(278)
题型 1.8.2.4	求解二阶常系数非齐次线性方程	(280)
题型 1.8.2.5	变换已知的微分方程为新的形式,并求其解	(283)
题型 1.8.2.6	求解欧拉方程	(284)
题型 1.8.2.7	求解含变限积分的方程	(285)

题型 1.8.2.8 求解可化为一阶线性微分方程的函数方程	(286)
1.8.3 已知特解反求其常系数线性方程	(286)
题型 1.8.3.1 已知特解反求其齐次方程	(286)
题型 1.8.3.2 已知特解反求其非齐次方程	(287)
1.8.4 用微分方程求解几何和物理中的简单应用题	(288)

2012—2013 年考研数学一各题型分值分布表

题 型	2012 年			2013 年			分 值
	选择题	填空题	解答题	选择题	填空题	解答题	
数 学	10 题	6 题	6 题	10 题	6 题	6 题	16 分
力 学	10 题	6 题	6 题	10 题	6 题	6 题	16 分
电 学	10 题	6 题	6 题	10 题	6 题	6 题	50 分
理 论	1. 选择题			1. 选择题			16 分
	2. 填空题			2. 填空题			
	3. 解答题			3. 解答题			
	4. 证明题			4. 证明题			
计 算	1. 选择题			1. 选择题			16 分
	2. 填空题			2. 填空题			
	3. 解答题			3. 解答题			
	4. 证明题			4. 证明题			
应 用	1. 选择题			1. 选择题			16 分
	2. 填空题			2. 填空题			
	3. 解答题			3. 解答题			
	4. 证明题			4. 证明题			

第 1 篇 高等数学

高等数学无论是试题量还是分值在考研真题中都占相当大的比重,分别约为 56%和 54%,是复习的重中之重。现将 2012—2014 年的考查题型及知识点进行了整理,希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014 年考研数学一高等数学题型及知识点分布表

题型/知识点 分布		2012 年试题		2013 年试题		2014 年试题	
		试题量	分值	试题量	分值	试题量	分值
题 量 分 值	选择题	4 道	16 分	4 道	16 分	4 道	16 分
	填空题	4 道	16 分	4 道	16 分	4 道	16 分
	解答题	5 道	50 分	5 道	50 分	5 道	50 分
考 查 知 识 点	选择题	① 渐近线的条数 ② 函数在一点处的导数 ③ 二元函数的可微性 ④ 比较定积分的大小		① 已知极限,求待定常数 ② 切平面方程 ③ 求傅里叶级数在某点的值 ④ 第二类曲线积分		① 渐近线的计算 ② 函数图形的凹凸性 ③ 交换累次积分的次序与坐标系的转换 ④ 定积分的计算	
	填空题	① 微分方程 ② 定积分的计算 ③ 梯度 ④ 第一类曲面积分		① 求极限 ② 非齐次线性微分方程 ③ 求二阶导数 ④ 计算反常积分		① 曲面的切平面 ② 函数的周期性 ③ 变量替换求解微分方程 ④ 斯托克斯公式	
	解答题	① 不等式的证明 ② 二元函数的极值 ③ 幂级数的收敛域、和函数 ④ 微分方程、无界图形的面积 ⑤ 第二类曲线积分		① 计算二重积分 ② 幂级数的和函数 ③ 求二元函数的极值 ④ 罗尔定理的应用 ⑤ 求旋转曲面方程和形心坐标		① 等价无穷小代换求极限 ② 函数的极值 ③ 二阶偏导数、二阶常系数非齐次线性微分方程 ④ 曲面积分的计算 ⑤ 级数收敛的比较判别法	

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 求几类与复合函数有关的函数表示式

定义 1.1.1.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 且当 x 在某一区间 I 取值时, 相应的 u 值要使 y 有定义, 则称 y 是 x 的定义于 I 的复合函数, 记为

$$y=(f \circ \varphi)(x)=f[\varphi(x)],$$

其中, u 称为中间变量, $\varphi(x)$ 称为内层函数, $f(x)$ 称为外层函数,

$$I=D_{f \circ \varphi}=\{x|\varphi(x) \in D_f, x \in D_{\varphi}\} \neq \emptyset.$$

由上述定义可知, 复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义区间 $D_{f \circ \varphi}$ 或者与 $\varphi(x)$ 的定义区间一致, 或者只是 $\varphi(x)$ 的定义区间的一部分.

在 $f(x)$, $\varphi(x)$ 和 $f[\varphi(x)]$ 这三个函数中, 若已知其中两个, 可求得另一函数.

题型 1.1.1.1 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$

常用分段代入法或代入法求之.

若 $f(x)$ 为分段函数, $\varphi(x)$ 为分段函数或为初等函数, 求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 时, 先将内(外)层函数的表示式代入, 然后再将外(内)层函数的表示式代入, 可简称为先内后外(先外后内)的求法.

求 $f[f(x)]$ 或 $\varphi[\varphi(x)]$ 一般采用先内后外的方法.

对分段函数, 求其复合函数的关键是对内层函数确定其定义域的区间段, 使得它的值域属于外层函数的某段定义域之中. 为此, 要将内层函数的值域属于外层函数的定义域的不等式与内层函数的定义域求交, 其交就是所求复合函数的部分定义域. 如果其交为空集, 则复合函数对应分支的定义域为空集, 则此分支函数不存在.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases} \varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0, \\ x^2-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 用先内后外的方法求之. 先将内层函数 $\varphi(x)$ 代入外层函数得到

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}=\begin{cases} e^{x+2}, & x+2<1, x<0 \\ x+2, & x+2 \geq 1, x<0 \\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1, x \geq 0 \\ x^2-1, & x^2-1 \geq 1, x \geq 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1, x<0 \\ x+2, & x \geq -1, x<0 \\ e^{x^2-1}, & x^2<2, x \geq 0 \\ x^2-1, & x^2 \geq 2, x \geq 0 \end{cases}=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1, \\ x+2, & -1 \leq x<0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x<\sqrt{2}, \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

题型 1.1.1.2 求分段点相同的两分段函数的复合函数

设两分段函数分段点相同, 且仅有一个分段点:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq a, \\ f_2(x), & x > a, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq a, \\ g_2(x), & x > a, \end{cases}$$

则其复合函数 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 是分段点含有 a 的分段函数. 常用分段代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$.

例 2 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为 ().

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$

解 仅(D)入选. 以分段点 0 为界点, 用分段代入法求之.

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 则 $g[f(x)] = f(x) + 2 = x^2 + 2$;

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x \leq 0$, 则 $g[f(x)] = 2 - f(x) = 2 - (-x) = 2 + x$,

故 $g[f(x)] = \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

1.1.2 函数的奇偶性

题型 1.1.2.1 判别(证明)函数的奇偶性

类型(一) 判别奇、偶函数经四则运算后所得函数的奇偶性.

命题 1.1.2.1 (1) 奇函数乘(除)偶函数 = 奇函数;

(2) 奇函数乘(除)奇函数 = 偶函数; (3) 偶函数乘(除)偶函数 = 偶函数;

(4) 奇函数加(减)奇函数 = 奇函数; (5) 偶函数加(减)偶函数 = 偶函数;

(6) 不恒为零的偶(奇)函数加(减)不恒为零的奇(偶)函数为非奇非偶函数;

(7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数, 一般不再是偶(奇)函数, 而是非奇非偶函数.

例 1 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是 ().

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 因 $|x \sin x|$ 与 $e^{\cos x}$ 都是偶函数, 由命题 1.1.2.1(3) 知, $f(x)$ 也是偶函数. 仅(D)入选.

类型(二) 判别自变量带相反符号的两同名函数代数和的奇偶性.

命题 1.1.2.2 设 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ (a 可为无穷) 上非常数的任意函数, 则

(1) $f(x) + f(-x)$ 为偶函数; (2) $f(x) - f(-x)$ (或 $f(-x) - f(x)$) 为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数, 之差为奇函数.

例 2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数的任意函数, 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x)$; (2) $f(x) - f(-x) + g(x) + g(-x)$;

(3) $f(x) - f(-x) - g(x) + g(-x)$; (4) $f(x) + f(-x) - g(x) - g(-x)$.

解 (1) 因 $f(x) + f(-x)$, $g(x) + g(-x)$ 均为偶函数, 故其和仍为偶函数;

(2) 因 $f(x) - f(-x)$ 为奇函数, $g(x) + g(-x)$ 为偶函数, 故其和为非奇非偶函数;

(3) 因 $f(x) - f(-x)$, $g(x) - g(-x)$ 均为奇函数, 故其差为奇函数;

(4) 因 $f(x) + f(-x)$, $g(x) + g(-x)$ 均为偶函数, 故其差为偶函数.

类型(三) 判别复合函数的奇偶性. 利用下述命题判别之.