文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学一 上册

正版图书配套视频讲解（网校买课送书）

☑ 名师32课时导学精讲

☑ 数学中的超级复习全书

超值赠送：《经典常考题型同步测试题》+网络答疑

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

文都教育®

2016

考研数学

常考题型解题方法技巧归纳

毛纲源◎编著

文都考研命题研究中心◎编

数学一 上册

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常考题型解题方法技巧归纳. 数学一/毛纲源编著. —武汉：华中科技大学出版社，2014.10

（毛纲源考研数学辅导系列）

ISBN 978-7-5680-0408-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①毛… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219411 号

考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一) 毛纲源 编著

策划编辑：王汉江(QQ:14458270)

责任编辑：王汉江

特约编辑：陈文峰 李 焕

封面设计：杨 安

责任监印：朱 霞

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321915

录 排:北京世纪文都教育科技发展有限公司

印 刷:北京市通州运河印刷厂

开 本：787mm×1092mm 1/16

印 张：37.25

字 数：923 千字

版 次：2014 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

定 价：68.00 元(上、下册)

前　言

本书在教育部制定的考研数学一“考试大纲”的指导下,经过多年的教学实践精心编写而成,完整的知识体系,更加符合当前考生复习备考的需求.全书共分为三篇:第1篇为高等数学,第2篇为线性代数,第3篇为概率论与数理统计.

书中重点讲述与考纲中基本概念、基本理论、基本方法有关的经典试题,内容丰富,题型广泛、全面,任何一年的的真题均可在本书中找到对应的题型;同时作者还对各类重点常考题型的解题思路、方法和技巧进行归纳、总结,对容易出错的地方以“注意”的形式作了详尽的注解加以强调.讲解的方法通俗易懂,由浅入深,富于启发,是一本广度、深度及难度均适合广大考生使用的考研辅导书.

本书有以下几个特点.

首先,本书根据考研数学大纲的要求,将历年考研数学试题按题型分类,对各类题型的解法进行了归纳总结,使考生能做到举一反三.数学试题是无限的,而题型是有限的,掌握好这些题型及其解题方法与技巧,会减少解题的盲目性,从而提高解题效率,考生的应试能力自然就得到了提高.同时也便于考生掌握考研数学一的大部分题型及其解题思路、方法与技巧,因而,本书能起到指航引路、预测考向的作用.

本书特别强调对考研数学大纲划定的基本概念、基本定理、基本方法和基本公式的正确理解.为此每一题型在讲解例题前常对上述“四个基本”进行剖析,便于考生理解、记忆,避免常犯错误.

本书另一特点是总结了许多实用快捷的简便算法,这些简便算法新颖、独特,它们是作者多年来教学经验的总结,会大大提高考生的解题速度和准确性,使考生大大节省时间,因而有助于考生应试能力和水平的提高.

本书还注重培养提高综合应用多个知识点解决问题的能力,对综合型题型进行了较多的分析和解法,以期提高考生在这方面的能力.与此同时,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能灵活地解决问题.

本书的讲述方法由浅入深,适于自学,并尽量使选用的例题精而易懂、全而不滥.

为使考生具有扎实的数学基础知识,也为了更好地阅读本书,特向读者推荐一套可以指导你全面、系统、深入复习考研数学的参考书,这就是本人编写的理工类数学学习指导、硕士研究生备考指南丛书:《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册)、《线性代数解题方法技巧归纳》、《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》.这套丛书自出版以来一直受到全国广大读者的一致好评,久销不衰.很多已考取理工类硕士研究生都受益于这套丛书.本人在撰写本书时,多处引用了这套丛书的内容和方法,如果能把这套丛

书结合起来学习，必将收到事半功倍的效果.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误、疏漏之处在所难免，恳请专家、读者指正.

毛纲源

2014 年 10 月于武汉理工大学

目 录

第1篇 高等数学

第1篇 高等数学

高等数学无论是试题量还是分值在考研真题中都占相当大的比重，分别约为56%和54%，是复习的重中之重。现将2012—2014年的考查题型及知识点进行了整理，希望能对广大考生的备考有所帮助。

2012—2014年考研数学一高等数学题型及知识点分布表

题型/知识点分布		2012年试题		2013年试题		2014年试题	
		试题量	分值	试题量	分值	试题量	分值
题量分值	选择题	4道	16分	4道	16分	4道	16分
	填空题	4道	16分	4道	16分	4道	16分
	解答题	5道	50分	5道	50分	5道	50分
考查知识点	选择题	① 渐近线的条数 ② 函数在一点处的导数 ③ 二元函数的可微性 ④ 比较定积分的大小		①已知极限，求待定常数 ② 切平面方程 ③ 求傅里叶级数在某点的值 ④ 第二类曲线积分		①渐近线的计算 ②函数图形的凹凸性 ③交换累次积分的次序与坐标系的转换 ④定积分的计算	
	填空题	① 微分方程 ② 定积分的计算 ③ 梯度 ④ 第一类曲面积分		① 求极限 ② 非齐次线性微分方程 ③ 求二阶导数 ④ 计算反常积分		①曲面的切平面 ②函数的周期性 ③变量替换求解微分方程 ④斯托克斯公式	
	解答题	① 不等式的证明 ② 二元函数的极值 ③ 幂级数的收敛域、和函数 ④ 微分方程、无界图形的面积 ⑤ 第二类曲线积分		① 计算二重积分 ② 幂级数的和函数 ③ 求二元函数的极值 ④ 罗尔定理的应用 ⑤ 求旋转曲面方程和形心坐标		①等价无穷小代换求极限 ②函数的极值 ③二阶偏导数、二阶常系数非齐次线性微分方程 ④曲面积分的计算 ⑤级数收敛的比较判别法	

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 求几类与复合函数有关的函数表示式

定义 1.1.1.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且当 x 在某一区间 I 取值时，相应的 u 值要使 y 有定义，则称 y 是 x 的定义于 I 的复合函数，记为

$$y=(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)],$$

其中，u 称为中间变量，$\varphi(x)$ 称为内层函数，$f(x)$ 称为外层函数，

$$I=D_{f\cdot\varphi}=\{x|\varphi(x)\in D_f, x\in D_\varphi\}\neq\varnothing.$$

由上述定义可知，复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义区间 $D_{f\cdot\varphi}$ 或者与 $\varphi(x)$ 的定义区间一致，或者只是 $\varphi(x)$ 的定义区间的一部分.

在 $f(x)$，$\varphi(x)$ 和 $f[\varphi(x)]$ 这三个函数中，若已知其中两个，可求得另一函数.

题型 1.1.1.1 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$

常用分段代入法或代入法求之.

若 $f(x)$ 为分段函数，$\varphi(x)$ 为分段函数或为初等函数，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 时，先将内(外)层函数的表示式代入，然后再将外(内)层函数的表示式代入，可简称为先内后外(先外后内)的求法.

求 $f[f(x)]$ 或 $\varphi[\varphi(x)]$ 一般采用先内后外的方法.

对分段函数，求其复合函数的关键是对内层函数确定其定义域的区间段，使得它的值域属于外层函数的某段定义域之中. 为此，要将内层函数的值域属于外层函数的定义域的不等式与内层函数的定义域求交，其交就是所求复合函数的部分定义域. 如果其交为空集，则复合函数对应分支的定义域为空集，则此分支函数不存在.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 用先内后外的方法求之. 先将内层函数 $\varphi(x)$ 代入外层函数得到

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}e^{x+2}, & x+2<1, x<0\\ x+2, & x+2\geqslant 1, x<0\\ e^{x^2-1}, & x^2-1<1, x\geqslant 0\\ x^2-1, & x^2-1\geqslant 1, x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1, x<0\\ x+2, & x\geqslant -1, x<0\\ e^{x^2-1}, & x^2<2, x\geqslant 0\\ x^2-1, & x^2\geqslant 2, x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

题型 1.1.1.2 求分段点相同的两分段函数的复合函数

设两分段函数分段点相同，且仅有一个分段点：

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\leqslant a,\\ f_2(x), & x>a,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}g_1(x), & x\leqslant a,\\ g_2(x), & x>a,\end{cases}$$

则其复合函数 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 是分段点含有 a 的分段函数. 常用分段代入法求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$.

例 2 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为( ).

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 仅(D)入选. 以分段点 0 为界点，用分段代入法求之.

当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$；

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$，则 $g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$，

故
$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.1.2 函数的奇偶性

题型 1.1.2.1 判别(证明)函数的奇偶性

类型(一) 判别奇、偶函数经四则运算后所得函数的奇偶性.

命题 1.1.2.1 (1) 奇函数乘(除)偶函数=奇函数；

(2) 奇函数乘(除)奇函数=偶函数； (3) 偶函数乘(除)偶函数=偶函数；

(4) 奇函数加(减)奇函数=奇函数； (5) 偶函数加(减)偶函数=偶函数；

(6) 不恒为零的偶(奇)函数加(减)不恒为零的奇(偶)函数为非奇非偶函数；

(7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数，一般不再是偶(奇)函数，而是非奇非偶函数.

例 1 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是( ).

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 因 $|x\sin x|$ 与 $e^{\cos x}$ 都是偶函数，由命题 1.1.2.1(3) 知，$f(x)$ 也是偶函数. 仅(D)入选.

类型(二) 判别自变量带相反符号的两同名函数代数和的奇偶性.

命题 1.1.2.2 设 $f(x)$ 为定义在 $[-a,a]$(a 可为无穷)上非常数的任意函数，则

(1) $f(x)+f(-x)$ 为偶函数； (2) $f(x)-f(-x)$(或 $f(-x)-f(x)$)为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数，之差为奇函数.

例 2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非常数的任意函数，试判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)+f(-x)+g(x)+g(-x)$； (2) $f(x)-f(-x)+g(x)+g(-x)$；

(3) $f(x)-f(-x)-g(x)+g(-x)$； (4) $f(x)+f(-x)-g(x)-g(-x)$.

解 (1) 因 $f(x)+f(-x)$，$g(x)+g(-x)$ 均为偶函数，故其和仍为偶函数；

(2) 因 $f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$g(x)+g(-x)$ 为偶函数，故其和为非奇非偶函数；

(3) 因 $f(x)-f(-x)$，$g(x)-g(-x)$ 均为奇函数，故其差为奇函数；

(4) 因 $f(x)+f(-x)$，$g(x)+g(-x)$ 均为偶函数，故其差为偶函数.

类型(三) 判别复合函数的奇偶性. 利用下述命题判别之.