



教育部中国教育科学研究院
基础教育课程研究中心组织专家审定

2014-2015

国家教师资格考试专用系列教材

数学学科知识与教学能力

《国家教师资格考试专用系列教材》编委会◎编著

高级中学

【适用于改革试点省、区、市】

学科专业知识——基础知识 经典例题 教学知识与能力——教学教法 教学案例



教育科学出版社

ESPH Educational Science Publishing House



教育部中国教育科学研究院
基础教育课程研究中心组织专家审定

2014-2015

国家教师资格考试专用系列教材

数学学科知识与教学能力

《国家教师资格考试专用系列教材》编委会◎编著

高级中学

教育科学出版社
· 北京 ·

出版人 所广一
责任编辑 张新国
版式设计 贾艳凤
责任校对 贾静芳
责任印制 曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力. 高级中学/《国家教师资格考试专用系列教材》编委会编著. —北京: 教育科学出版社, 2014. 1

国家教师资格考试专用系列教材

ISBN 978-7-5041-8339-2

I. ①数… II. ①国… III. ①中学数学课—教学法—高中—中学教师—资格考试—自学参考资料 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 2014 第 018170 号



数学学科知识与教学能力 高级中学

SHUXUE XUEKE ZHISHI YU JIAOXUE NENGLI GAOJI ZHONGXUE

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号

邮 编 100101

传 真 010-64891796

市场部电话 010-64989009

编辑部电话 010-64981275

网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

印 刷 三河市延风印装厂

开 本 205 毫米×280 毫米 16 开

印 张 22.25

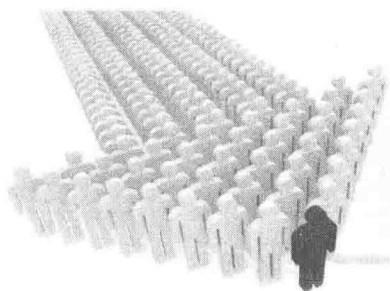
字 数 712 千字

版 次 2014 年 2 月第 1 版

印 次 2014 年 2 月第 1 次印刷

定 价 45.00 元

如有印装质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。



Foreword

前言

教师资格制度是国家实行的教师职业从业许可制度。拥有教师资格是国家对专门从事教育教学工作人员的基本要求,是公民获得教师职位、从事教师工作的前提条件。《中华人民共和国教育法》和《中华人民共和国教师法》明确规定,凡在各级各类学校和其他教育机构中从事教育教学工作的教师,必须具备相应的教师资格。

2001年,我国开始全面实施教师资格考试制度。2011年下半年,国家以浙江和湖北两省为试点开始了教师资格的统考进程。2012年上半年扩大到上海、广西,下半年又扩大到海南、河北。到2013年下半年,国家教师资格统考在之前河北、上海、浙江、湖北、广西、海南6个省份开展的基础上,又新增山西、安徽、山东、贵州4个省份进入试点。至此,教师资格考试由国家统一命题的省份增加到10个。这对于把好教师职业入口关、拓宽教师来源渠道、促进教师专业化、提高教师地位等发挥了重要作用。

为了帮助全国各地参加教师资格考试的广大考生顺利通关,华图教育专门选聘了各学科具有较高理论水平和丰富实践经验的专家,撰写了本系列学科专业与教学能力教材。本系列教材包括初级中学、高级中学两个学段的26门专业课程,涉及语文、英语、数学、物理、化学、生物、历史、地理、思想品德(思想政治)、信息技术、美术、音乐、体育与健康等科目。

具体来说,本系列教材具有以下特点。

一、严格依据最新国家教师资格考试大纲及最新课程标准编写

本系列教材是在认真研读了最新国家教师资格考试大纲及最新课程标准的基础上,严格遵循考试大纲及课程标准的要求进行编写,力求最大限度地贴合考情,为考生提供一本实用性很强的参考教材。

二、体例设置合理、科学

本系列教材在对考试大纲进行科学整理的基础上,将考试内容分为学科知识部分和教学知识与能力两部分来进行编写。学科知识部分主要涉及各学科的专业知识,教学知识与能力部分涉及与各学科相关的教学教法。而且各部分在体例编排上,均设置了“核心考点提示”“知识体系导览”“名师要点精讲”“经典例题”“命题热点集训”等模块。其中,“核心考点提示”为考生指明了考试的重点内容及考生需要掌握的程度,便于考生有侧重地进行复习考

试;“知识体系导览”是对各章知识架构的提炼,可帮助考生形成系统的知识结构;“名师要点精讲”是本系列教材的核心内容,是由一线名师精心编写,涵盖了需要考生掌握的知识内容;“经典例题”穿插在正文当中,根据最新考试趋势及考试重点,模拟真题进行解析;“命题热点集训”放在每一章的末尾,有助于考生对各章知识的掌握程度进行自我检测。

三、精编精选大量案例与习题

本系列教材在各科目的教学教法部分,专门设置了经典教学案例与教学设计。这些教学案例和教学设计经过了华图教育专家的精心挑选,具有较强的代表性。名师点评部分精准、明确地点出了各教学案例和教学设计的优缺点,便于考生学习借鉴。

同时,本系列教材在每一章后均配有练习题,供考生练习和检测复习效果之用。

总之,本系列教材力求全面、科学地编排各学科知识,在内容丰富的同时做到重点突出,以满足不同层次、不同专业考生的需求。

本系列教材在编写过程中得到了有关高校和一些中小学校的大力支持,我们在此表示衷心感谢。

答疑网站: www.huatu.com

电子邮箱: htbjb2008@163.com

编者

2014年2月

数学学科知识与教学能力(高级中学)考试大纲

一、考试目标

1. 数学学科知识的掌握和运用. 掌握大学本科数学专业基础课程的知识 and 高中数学知识. 具有在高中数学教学实践中综合而有效地运用这些知识的能力.
2. 高中数学课程知识的掌握和运用. 理解高中数学课程的性质、基本理念和目标, 熟悉《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称《课标》)规定的教学内容和要求.
3. 数学教学知识的掌握和应用. 理解有关的数学教学知识, 具有教学设计、教学实施和教学评价的能力.

二、考试内容模块与要求

1. 学科知识

数学学科知识包括大学本科数学专业基础课程和高中课程中的数学知识.

大学本科数学专业基础课程的知识是指: 数学分析、高等代数、解析几何、概率论与数理统计等大学课程中与中学数学密切相关的内容, 包括数列极限、函数极限、连续函数、一元函数微积分、向量及其运算、矩阵与变换等内容及概率与数理统计的基础知识.

其内容要求是: 准确掌握基本概念, 熟练进行运算, 并能够利用这些知识去解决中学数学的问题.

高中数学知识是指《课标》中所规定的必修课全部内容、选修课中的系列 1、2 的内容以及选修 3—1(数学史选讲)、选修 4—1(几何证明选讲)、选修 4—2(矩阵与变换)、选修 4—4(坐标系与参数方程)、选修 4—5(不等式选讲).

其内容要求是: 理解高中数学中的重要概念, 掌握高中数学中的重要公式、定理、法则等知识, 掌握中学数学中常见的思想方法, 具有空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用能力.

2. 课程知识

了解高中数学课程的性质、基本理念和目标.

熟悉《课标》所规定教学内容的知识体系, 掌握《课标》对教学内容的要求.

了解《课标》各模块知识编排的特点.

能运用《课标》指导自己的数学教学实践.

3. 教学知识

了解包括备课、课堂教学、作业批改与考试、数学课外活动、数学教学评价等基本环节的教学过程.

掌握讲授法、讨论法、自学辅导法、发现法等常见的数学教学方法.

掌握概念教学、命题教学等数学教学知识的基本内容.

掌握合作学习、探究学习、自主学习等中学数学学习方式.

掌握数学教学评价的基本知识和方法.



4. 教学技能

(1) 教学设计

能够根据学生已有的知识水平和数学学习经验,准确把握所教内容与学生已学知识的联系.

能够根据《课标》的要求和学生的认知特征确定教学目标、教学重点和难点.

能正确把握数学教学内容,揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质,渗透数学思想方法,体现应用与创新意识.

能选择适当的教学方法和手段,合理安排教学过程和教学内容,在规定的时间内完成所选教学内容的教案设计.

(2) 教学实施

能创设合理的数学教学情境,激发学生的数学学习兴趣,引导学生自主探索、猜想和合作交流.

能依据数学学科特点和学生的认知特征,恰当地运用教学方法和手段,有效地进行数学课堂教学.

能结合具体数学教学情境,正确处理数学教学中的各种问题.

(3) 教学评价

能采用不同的方式和方法,对学生知识与技能、过程与方法 and 情感、态度与价值观等方面进行恰当地评价.

能对教师数学教学过程进行评价.

能够通过教学评价改进教学和促进学生的发展.

三、试卷结构

模块	比例	题型
学科知识	41%	单项选择题 简答题 解答题
课程知识	18%	单项选择题 简答题 论述题
教学知识	8%	单项选择题 简答题
教学技能	33%	案例分析题 教学设计题
合计	100%	单项选择题:约27% 非选择题:约73%

四、题型示例

1. 单项选择题

(1) 函数 $f(x) = x \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是

- A. 单调增函数 B. 单调减函数 C. 上凸函数 D. 下凸函数

(2) 在高中数学教学中,课堂小结的方式多种多样.有一种常见的小结方式是:结合板书内容梳理本





课教学重点和难点的学习思路,同时提醒学生课下复习其中的要点.这种小结方式的作用在于

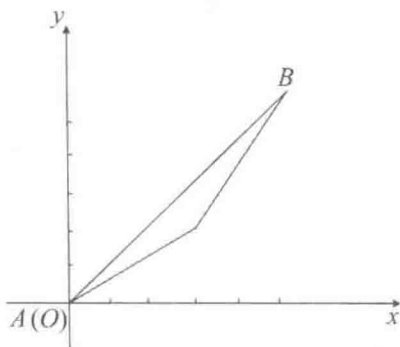
- A. 升华情感,引起共鸣
B. 点评议论,提高认识
C. 巧设悬念,激发兴趣
D. 总结回顾,强化记忆

(3)在高等代数中,有一种线性变换叫作正交变换,即不改变任意两点距离的变换.下列变换中不是正交变换的是

- A. 平移变换
B. 旋转变换
C. 反射变换
D. 相似变换

2. 简答题

(1)根据下图编一道函数的应用问题.



(2)一位教师讲了一堂公开课《函数》,多数听课教师认为他讲出了函数概念的本质,但课堂教学有效性不足,突出表现在课堂提问方面.你认为应注意哪些问题才能提高课堂提问的有效性(请结合自己对《函数》的教学设想来谈)?

3. 解答题

已知 $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \pi$, 试证:

$$\frac{\sin x_1 - \sin x_2}{x_1 - x_2} > \frac{\sin x_2 - \sin x_3}{x_2 - x_3}$$

4. 论述题

在必修模块中,将平面解析几何内容放在函数与立体几何之后,对这种安排谈谈你的看法.

5. 案例分析题

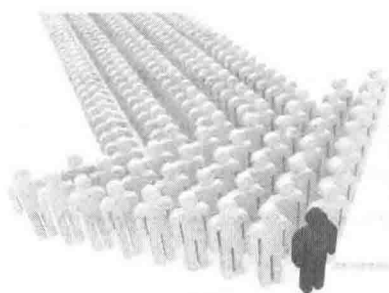
阅读下列两个对于 $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ 不等式的教学活动设计,然后回答问题.

设计 1:

活动(1)让学生分别取 a, b 为具体数值,检验该不等式是否成立.

活动(2)讨论: $ab, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{2}b^2$ 的几何意义.





Contents

目录

第一部分 学科知识

第一章 数学发展史	3
第二章 数与代数	7
核心考点提示	7
知识体系导览	7
名师要点精讲	8
第一节 实数	8
第二节 代数式	10
第三节 方程与方程组	16
命题热点集训	20
第三章 不等式	24
核心考点提示	24
知识体系导览	24
名师要点精讲	24
第一节 不等式及其基本性质	24
第二节 解不等式	27
第三节 二元一次不等式(组)与简单线性规划问题	33
命题热点集训	35
第四章 集合与函数	40
核心考点提示	40
知识体系导览	40
名师要点精讲	41
第一节 集合的概念与运算	41
第二节 函数的概念和基本性质	44
第三节 一次函数与二次函数	48
第四节 特殊函数	56
命题热点集训	63
第五章 数列	68
核心考点提示	68



知识体系导览	68
名师要点精讲	68
第一节 数列的概念及表示方法	68
第二节 等差数列	70
第三节 等比数列	72
第四节 混合数列	73
命题热点集训	75
第六章 计数原理	80
核心考点提示	80
知识体系导览	80
名师要点精讲	80
第一节 分类加法计数原理与分步乘法计数原理	80
第二节 排列组合	82
第三节 二项式定理	86
命题热点集训	91
第七章 统计与概率	96
核心考点提示	96
知识体系导览	96
名师要点精讲	96
第一节 统计	96
第二节 概率	103
命题热点集训	107
第八章 简易逻辑与推理证明	112
核心考点提示	112
知识体系导览	112
名师要点精讲	112
第一节 简易逻辑	112
第二节 推理与证明	115
第三节 算法与框图	120
命题热点集训	125
第九章 坐标系与参数方程	129
核心考点提示	129
知识体系导览	129
名师要点精讲	129
第一节 坐标系	129
第二节 参数方程	133
命题热点集训	136
第十章 复数	138
核心考点提示	138



知识体系导览	138
名师要点精讲	138
第一节 复数的概念	138
第二节 复数的运算	141
命题热点集训	143
第十一章 向量	147
核心考点提示	147
知识体系导览	147
名师要点精讲	147
第一节 平面向量	147
第二节 空间向量	152
命题热点集训	155
第十二章 平面几何	160
核心考点提示	160
知识体系导览	160
名师要点精讲	160
第一节 基本几何元素	160
第二节 多边形	163
第三节 圆	172
命题热点集训	177
第十三章 立体几何	182
核心考点提示	182
知识体系导览	182
名师要点精讲	182
第一节 点、线、面及其位置关系	182
第二节 简单几何体	189
命题热点集训	192
第十四章 解析几何	197
核心考点提示	197
知识体系导览	197
名师要点精讲	197
第一节 平面解析几何	197
第二节 空间解析几何	205
第三节 空间曲线与方程	211
命题热点集训	212
第十五章 极限与微积分	218
核心考点提示	218
知识体系导览	218
名师要点精讲	219



第一节 极限	219
第二节 导数	224
第三节 微分	227
第四节 积分	232
命题热点集训	243
第十六章 线性代数	248
核心考点提示	248
知识体系导览	248
名师要点精讲	249
第一节 行列式	249
第二节 矩 阵	252
第三节 线性方程组	259
第四节 线性空间	261
命题热点集训	266

第二部分 教学知识与能力

第一章 课程知识	273
核心考点提示	273
知识体系导览	273
名师要点精讲	273
第一节 高中数学课程标准	273
第二节 高中数学课程及其体系	290
命题热点集训	293
第二章 教学知识	295
核心考点提示	295
知识体系导览	295
名师要点精讲	295
第一节 数学教学方法	295
第二节 数学教学过程	300
第三节 数学学习方式	305
命题热点集训	308
第三章 教学技能	310
核心考点提示	310
知识体系导览	310
名师要点精讲	311
第一节 教学设计	311
第二节 教学实施	318
第三节 教学评价	333
命题热点集训	338

学科知识

第
一
部
分

第一章 数学发展史

数学是一门伟大的科学,数学作为一门科学,具有悠久的历史,与自然科学相比,数学更是积累性科学,它是经过上千年的演化发展才逐渐兴盛起来的.数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言,数学更主要是一门有着丰富内容的知识体系,其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家和神学家的学说.数学广泛地影响着人类的生活和思想,是形成现代文化的主要力量,而数学的历史更从另一个侧面反映了数学的发展.

数学的演进大约可以看成是抽象化的持续发展,或是题材的延展.从历史时代的一开始,数学中的主要原理是为了做测量等相关计算,为了了解数字间的关系,为了测量土地以及为了预测天文事件而形成的.这些需要可以简单地被概括为数学对数量、结构方面的研究.历史上在数学上有着许多的发现,并且直至今日都还在不断地发现中.

数学发展具有阶段性,因此根据一定的原则把数学史分成若干时期.目前通常将数学发展划分为五个时期:数学萌芽期(公元前 600 年以前);初等数学时期(公元前 600 年至 17 世纪中叶);变量数学时期(17 世纪中叶至 19 世纪 20 年代);近代数学时期(19 世纪 20 年代至第二次世界大战);现代数学时期(20 世纪 40 年代以来).

数学作为一门有组织的、独立的和理性的学科,在公元前 600 年到前 300 年之间的古典希腊学者登场之前是不存在的.但在更早期的一些古代文明社会中已产生了数学的开端和萌芽.在这些原始文明社会中,有很多社会只能分辨一、二和许多,并没有更多的数学知识;有些则知道并且能够运算大的整数.还有一些能够把数作为抽象概念来认识,并采用特殊的字来代表个别的数,引入数的记号,甚至采用十、二十或五作为基底来表示较大的数量.他们知道四则运算,不过仅限于小的数;并且具有分数的概念,不过只限于 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 之类,而且是用文字表达的.此外,古人也认识到最简单的几何概念如直线、圆和角.也许值得一提的是,角的概念可能是从观察到人的大小腿(股)或上下臂之间形成的角而产生的,因为在大多数语言中,角的边常用“股或臂”的字来代表的.例如在英文中,直角三角形的两边叫两臂.在这些原始文明中,数学的应用只限于简单交易,如田地面积的粗略计算、陶器上的几何图案、织在布上的花格和记时等方面.

在公元前三千年左右巴比伦和埃及的数学出现以前,人类在数学上没有取得更多的进展.

现在对于古巴比伦数学的了解主要是根据巴比伦泥版,这些数学泥版表明,巴比伦自公元前 2000 年左右即开始使用 60 进位制的记数法进行较复杂的计算,并出现了 60 进位的分数,用与整数同样的法则进行计算;已经有了关于倒数、乘法、平方、立方、平方根、立方根的数表;借助于倒数表,除法常转化为乘法进行计算.巴比伦数学具有算术和代数的特征,几何只是表达代数问题的一种方法.这时还没有产生数学的理论.对埃及古代数学的了解,主要是根据两卷纸草书.从这两卷文献中可以看到,古埃及是采用 10 进位制的记数法.埃及人的数学兴趣是测量土地,几何问题多是讲度量法的,涉及田地的面积、谷仓的容积和有关金字塔的简易算法.但是由于这些算法是为了解决尼罗河泛滥后土地测量和谷物分配、容量计算等日常生活中必须解决的课题而设想出来的,因此并没有出现对公式、定理、证明加以理论推导的倾向.埃及数学的一个主要用途是天文研究,也在研究天文得到了发展.



由于地理位置和自然条件,古希腊受到埃及、巴比伦这些文明古国的许多影响,成为欧洲最先创造文明的地区。希腊有着辉煌的数学,第一个时期开始于公元前6世纪,结束于公元前4世纪。泰勒斯开始命题的逻辑证明,是希腊伟大的数学发展的开端。进入公元前5世纪,爱利亚学派的芝诺提出了四个关于运动的悖论,柏拉图强调几何对培养逻辑思维能力的重要作用,亚里士多德建立了形式逻辑,并且把它作为证明的工具,德谟克利特把几何量看成是由许多不可再分的原子所构成。第二个时期自公元前4世纪末至公元1世纪,这时的学术中心从雅典转移到了亚历山大里亚,被称为亚历山大里亚时期。这一时期有许多水平很高的数学书稿问世,并一直流传到了现在。公元前3世纪,欧几里得写出了平面几何、比例论、数论、无理量论、立体几何的集大成的著作《几何原本》,第一次把几何学建立在演绎体系上,成为数学史乃至思想史上一部划时代的名著。之后的阿基米德把抽象的数学理论和具体的工程技术结合起来,根据力学原理去探求几何图形的面积和体积,奠定了微积分的基础。阿波罗尼写出了《圆锥曲线》一书,成为后来研究这一问题的基础。公元1世纪的赫伦写出了使用具体数解释求积法的《测量术》等著作。2世纪的托勒密完成了到那时为止的数理天文学的集大成著作《数学汇编》,结合天文学研究三角学。3世纪丢番图著《算术》,使用简略号求解不定方程式等问题,它对数学发展的影响仅次于《几何原本》。希腊数学中最突出的三大成就——欧几里得的几何学、阿基米德的穷竭法和阿波罗尼的圆锥曲线论,标志着当时数学的主体部分——算术、代数、几何基本上已经建立起来了。

罗马人征服了希腊也摧毁了希腊的文化。公元前47年,罗马人焚毁了亚历山大里亚图书馆,两个半世纪以来收集的藏书和50万份手稿付之一炬。

从5世纪到15世纪,数学发展的中心转移到了东方的印度、中亚细亚、阿拉伯国家和中国。在这1000多年时间里,数学主要是由于计算的需要,特别是天文学的需要而得到迅速发展。古希腊的数学看重抽象、逻辑和理论,强调数学是认识自然的工具,重点是几何;而古代中国和印度的数学看重具体、经验和应用,强调数学是支配自然的工具,重点是算术和代数。

印度的数学也是世界数学的重要组成部分。印度数学受婆罗门教的影响很大,此外还受希腊、中国和近东数学的影响,特别是受中国的影响。

此外,阿拉伯数学也有着举足轻重的作用,阿拉伯人改进了印度的计数系统。将代数的研究对象规定为方程论;让几何从属于代数,不重视证明;引入正切、余切、正割、余割等三角函数,制作精密的三角函数表,发现平面三角与球面三角若干重要的公式,使三角学脱离天文学独立出来。

在我国,春秋战国之际,筹算已得到普遍的应用,筹算记数法已使用十进位值制,这种记数法对世界数学的发展具有划时代意义。这个时期的测量数学在生产上得以广泛应用,在数学上亦有相应的提高。战国时期的百家争鸣也促进了数学的发展,秦汉是封建社会的上升时期,经济和文化均得到迅速发展。中国古代数学体系形成于这个时期,主要标志是算术成为一个专门的学科,以及以《九章算术》为代表的数学著作的出现。

《九章算术》是战国、秦、汉封建社会时期创立并巩固数学发展的总结,就其数学成就来说,堪称是世界数学名著。魏、晋时期赵爽与刘徽的工作为中国古代数学体系奠定了理论基础。刘徽用无穷分割的方法证明了直角方锥与直角四面体的体积比恒为2:1,解决了一般立体体积的关键问题。在证明方锥、圆柱、圆锥、圆台的体积时,刘徽为彻底解决球的体积提出了正确途径。这之后,像秦九韶、祖冲之、郭守敬、程大位这样的数学家进一步发展了我国的数学事业。

在西欧的历史上,中世纪的黑暗在一定程度上阻碍了数学的发展,15世纪开始了欧洲的文艺复兴,使欧洲的数学得以进一步发展,数学活动集中在算术、代数和三角方面。缪勒的名著《三角全书》是欧洲人对平面和球面三角学所作的独立于天文学的第一个系统的阐述。16世纪塔塔利亚发现三次方程的代数解法,接受了负数并使用了虚数。16世纪最伟大的数学家是韦达,他写了许多关于三角学、代数学和几何学的著作,其中最著名的《分析方法入门》改进了符号,使代数学大为改观。17世纪初,对数的发明是初等数学的一大成就。1614年,耐普尔首创了对对数,1624年布里格斯引入了相当于现在的常用对数,计算方





法因而向前推进了一大步。至此,初等数学的主体部分——算术、代数与几何已经全部形成,并且发展成熟。

变量数学时期是从17世纪中叶到19世纪20年代,这一时期数学研究的主要内容是数量的变化及几何变换。这一时期的主要成果是解析几何、微积分、高等代数等学科。

17世纪是一个开创性的世纪。这个世纪中发生了对于数学具有重大意义的三件大事。首先是伽利略实验数学方法的出现,它表明了数学与自然科学的一种崭新的结合。其特点是在所研究的现象中,找出一些可以度量的因素,并把数学方法应用到这些量的变化规律中去。第二件大事是笛卡尔的重要著作《方法谈》及其附录《几何学》于1637年发表。它引入了运动着的一点的坐标的概念,引入了变量和函数的概念。由于有了坐标,平面曲线与二元方程之间建立起了联系,由此产生了一门用代数方法研究几何学的新学科——解析几何学。这是数学的一个转折点,也是变量数学发展的第一个决定性步骤。第三件大事是微积分学的建立,最重要的工作是由牛顿和莱布尼兹各自独立完成的。他们认识到微分和积分实际上是一对逆运算,从而给出了微积分学基本定理,即牛顿—莱布尼兹公式。17世纪的数学,发生了许多深刻的、明显的变革。在数学的活动范围方面,数学教育扩大了,从事数学工作的人迅速增加,数学著作在较广的范围内得到传播,而且建立了各种学会。在数学的传统方面,从形的研究转向了数的研究,代数占据了主导地位。在数学发展的趋势方面,开始了科学数学化的过程。最早出现的是力学的数学化,它以1687年牛顿写的《自然哲学的数学原理》为代表,从三大定律出发,用数学的逻辑推理将力学定律逐个地、必然地引申出来。18世纪数学的各个学科,如三角学、解析几何学、微积分学、数论、方程论,得到快速发展。19世纪20年代出现了一个伟大的数学成就——把微积分的理论基础牢固地建立在极限的概念上。柯西于1821年在《分析教程》一书中,发展了可接受的极限理论,然后极其严格地定义了函数的连续性、导数和积分,强调了研究级数收敛性的必要,给出了正项级数的根式判别法和积分判别法。而在这一时期,非欧几何的出现,成为数学史上的一件大事。非欧几何的出现,改变了人们认为欧氏几何唯一地存在是天经地义的观点。它的革命思想不仅为新几何学开辟了道路,而且是20世纪相对论产生的前奏和准备。这时人们发现了与通常的欧几里得几何不同的、但也是正确的几何——非欧几何。非欧几何所导致的思想解放对现代数学和现代科学有着极为重要的意义,因为人类终于开始突破感官的局限而深入到自然的更深刻的本质。非欧几何的发现,黎曼和罗巴切夫斯基功不可灭,黎曼推广了空间的概念,开创了几何学一片更广阔的领域——黎曼几何学。后来,哈密顿发现了一种乘法交换律不成立的代数——四元数代数。不可交换代数的出现,改变了人们认为存在与一般的算术代数不同的代数是不可思议的观点。它的革命思想打开了近代代数的大门。另一方面,由于一元方程根式求解条件的探究,引进了群的概念。19世纪20—30年代,阿贝尔和伽罗瓦开创了近世代数学的研究。这时,代数学的研究对象扩大为向量、矩阵等,并渐渐转向代数系统结构本身的研究。19世纪还发生了第三个有深远意义的数学事件——分析的算术化。1874年威尔斯特拉斯提出了被称为“分析的算术化”的著名设想,实数系本身最先应该严格化,然后分析的所有概念应该由此数系导出。19世纪后期,由于狄德金、康托和皮亚诺的工作,这些数学基础已经建立在更简单、更基础的自然数系之上。

20世纪40—50年代,世界科学史上发生了三件惊天动地的大事,即原子能的利用、电子计算机的发明和空间技术的兴起。此外还出现了许多新的情况,促使数学发生急剧的变化。1945年,第一台电子计算机诞生以后,由于电子计算机应用广泛、影响巨大,围绕它很自然要形成一门庞大的科学。计算机的出现更促进了数学的发展,使数学分为了三个领域——纯粹数学、计算机数学、应用数学。现代数学虽然呈现出多姿多彩的局面,但是它的主要特点可以概括如下:

(1) 数学的对象、内容在深度和广度上都有了很大的发展,分析学、代数学、几何学的思想、理论和方法都发生了惊人的变化,数学的不断分化、不断综合的趋势都在加强。

(2) 电子计算机进入数学领域,产生巨大而深远的影响。

(3) 数学渗透到几乎所有的科学领域,并且起着越来越大的作用,纯粹数学不断向纵深发展,数理逻辑

