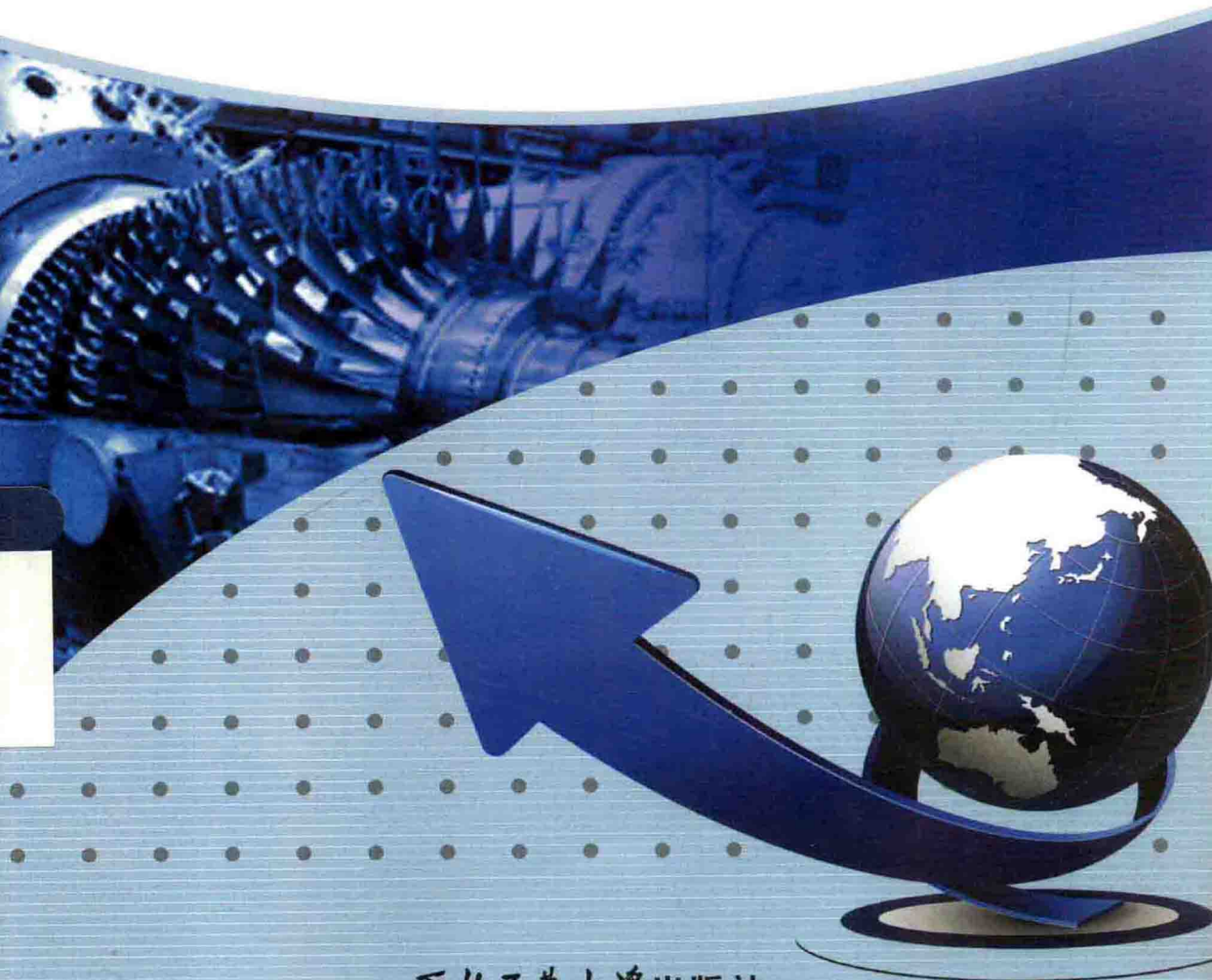




工业和信息化部“十二五”规划教材

燃气轮机特性 分析与计算

吴 虎◎编



西北工业大学出版社



工业和信息化部“十二五”规划教材

燃气轮机特性 分析与计算

吴 虎 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是关于燃气轮机气动设计与特性分析方面的专业教材。它较系统地阐述了燃气轮机中压气机和涡轮气动设计基本理论、特性分析及其三维流动特征等方面的内容。

本书共分为6章。其内容涉及燃气轮机内三维流动分析,三维流动基本控制方程,性能分析模型,压气机和涡轮设计分析,准三维特性计算和燃气轮机 S_1 、 S_2 两类流面理论等方面。该书为燃气轮机压气机和涡轮气动设计与性能分析提供了国际前沿性研究成果,同时也给出了较为翔实的工程实例分析。

本书适宜作为高等学校燃气轮机专业高年级本科生和研究生专业教材,也可作为与燃气轮机专业相关领域的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

燃气轮机特性分析与计算/吴虎编. —西安:西北工业大学出版社,2014.11

ISBN 978-7-5612-4188-2

I. ①燃… II. ①吴… III. ①燃气轮机—研究 IV. ①TK47

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第263680号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpu.com

印刷者:陕西向阳印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:10

字数:240千字

版次:2014年11月第1版 2014年11月第1次印刷

定价:26.00元

前 言

飞行器动力工程专业的学生进入四年级学习阶段时,已经学习和掌握了“气体动力学基础”“叶片机原理”“燃烧学原理”和“燃气轮机发动机原理”等专业基础和专业课知识,这为学生理解和掌握飞行器动力工程专业的理论和专门知识奠定了比较扎实的基础。然而,此时学生们仍缺乏燃气轮机设计、特性分析及计算方面系统的工程实践。针对这一问题,本书较全面地阐述了燃气轮机中压气机和涡轮初步气动设计规律,三维流动特征,燃气轮机特性分析与计算,燃气轮机设计与分析中广泛应用的 S_1 和 S_2 两类流面理论等内容,以便于有兴趣和有能力的学生进一步学习与理解。

对燃气轮机中压气机和涡轮专业知识的理解,只有通过具体物理模型的建立、理论分析、数学描述方法及相关计算模拟程序的编制及运算,才能更为扎实地掌握其相关理论,初步认识燃气轮机气动设计方法。本书给出了燃气轮机中压气机和涡轮气动设计实例,为读者进一步理解提供了很好的参考。

随着现代电子计算机技术的飞速发展,CFD(Computational Fluid Dynamics)已广泛用于燃气轮机设计及性能分析之中。飞行器动力工程专业的高年级学生不仅应对相关领域内容及最新研究成果有所了解,而且更应该从基础工程设计入手,锻炼和培养自己应用 CFD 解决实际工程问题的能力。本书系统给出的燃气轮机中压气机和涡轮气动设计与性能分析相关实例,包括流动物理模型、数学描述方法、计算流程及相应程序模块,可为学生基本了解和掌握燃气轮机基础设计技术提供专业教程。同时,本书所给出的计算程序流程图,也便于锻炼学生独立自主进行工程设计的动手能力。

本书的特点是阐述全面、系统、详细、清晰,可以帮助读者加深理解和掌握燃气轮机气动设计与特性分析方面的专业本质。

本书可作为高等院校飞行器动力工程、燃气轮机、流体机械等专业的高年级学生专业教材,也可供相关专业的工程技术人员提供技术参考。

西北工业大学动力与能源学院的刘前智教授对全书作了仔细审阅并提出了中肯建议,在此谨向刘前智教授表示由衷的谢忱。

由于水平有限,书中不足之处在所难免,诚请读者批评指正。

编 者

2013 年 4 月

目 录

第 1 章 燃气轮机内三维空间气流运动分析	1
1.1 燃气轮机中叶轮机采用的坐标系	1
1.2 绝对速度在绝对圆柱坐标系中的分量	5
1.3 转子叶片通道中的绝对速度和相对速度	6
1.4 燃气轮机中空间气流的加速度	7
1.5 圆柱坐标系中的梯度、散度和旋度	9
1.6 空间流动分析中常用的微分运算符	11
第 2 章 燃气轮机中气体流动的基本方程	14
2.1 理想气体的动力学方程	14
2.2 能量方程	16
2.3 热力学第一和第二定律	19
2.4 连续方程和状态方程	21
第 3 章 燃气轮机中轴流涡轮性能分析模型	26
3.1 燃气轮机中实际气体流动过程分析	26
3.2 燃气轮机中气体无黏运动方程	27
3.3 轴流式叶轮机设计方法的发展	29
3.4 燃气轮机中黏性损失的处理方法	32
3.5 燃气轮机中涡轮叶片排性能分析模型	44
第 4 章 燃气轮机中压气机和涡轮设计分析	56
4.1 叶轮机设计问题	56
4.2 压气机设计问题	60
4.3 涡轮设计分析	68
4.4 轴流涡轮叶型设计方法	89
第 5 章 燃气轮机中轴流涡轮准三维特性计算	94
5.1 流线发生径向偏转的原因	94
5.2 流线曲率法中的径向平衡方程	97
5.3 子午面上沿任意方向的平衡方程	100
5.4 轴流涡轮气动性能分析	103
5.5 燃气轮机部件间的匹配	110

第 6 章 S_1, S_2 流面理论及其计算方法	117
6.1 S_1, S_2 流面理论	117
6.2 流线曲率法解 S_2 流面问题	129
6.3 流线曲率法解 S_1 流面问题	147
参考文献	154

第 1 章 燃气轮机内三维空间气流运动分析

燃气轮机的主要任务就是使气体流过转子中由许多叶片形成的通道时,气流的某个分速度(例如,切向分速度)发生预期的变化,从而使气流获得能量(压气机),或使气体输出能量(涡轮)。因此,了解各分速度的特点以及它们在气流与叶片的能量交换或气流本身的能量转换中所起的作用,就非常必要了。在这一章里,将主要介绍以下几方面的内容:

- (1) 叶轮机中采用的坐标系;
- (2) 气流流过叶轮机时几种常见的分速度以及它们之间的关系;
- (3) 在三元流中常用的沿流体微团运动方向的微分运动算子。

1.1 燃气轮机中叶轮机采用的坐标系

在流体力学中,大多数采用笛卡儿直角坐标系。但是,在叶轮机中,由于气体微团是在环形的通道中流动的,所以采用圆柱坐标系是比较合适的。

如图 1-1 所示为气流流过叶轮机静子叶片通道时的绝对坐标系。环形通道中某点 A 的位置在笛卡儿坐标系中由 x, y, z 3 个坐标来决定。例如,用圆柱坐标系,则同一点 A 的位置由 r, θ 和 z 所决定。在叶轮机中,习惯上把 z 坐标轴和转轴放在一起。A 点的坐标 θ 则是从选定的绝对坐标轴(即静止坐标轴 x) 量起的角度。从 A 点沿半径 r 作一指向半径方向而长度等于 1 的单位向量 i_r ,从 A 点作指向切线方向而长度等于 1 的单位向量 i_θ ,最后从 A 点作一指向转轴方向而长度等于 1 的单位向量 i_z 。这 3 个单位向量相互垂直形成一右手正交圆柱坐标系。大家知道,在笛卡儿坐标系中,它的 3 个坐标轴 x, y, z 的方向,亦即 3 个单位向量 i, j, k 的方向,不会因流体微团位置的改变而变化。但在圆柱坐标系中,除 i_z 方向不变外,从图 1-1 可以看出,当流体微团从 A 点移至 B 点时, i_θ 和 i_r 的方向都要改变,如图 1-2 所示。

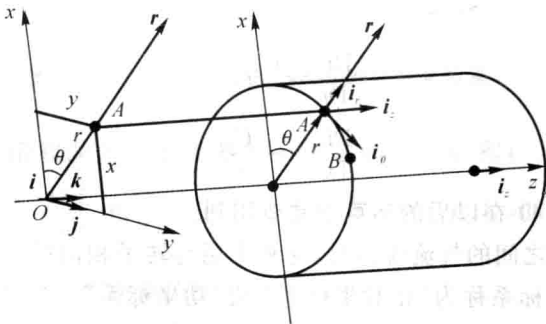
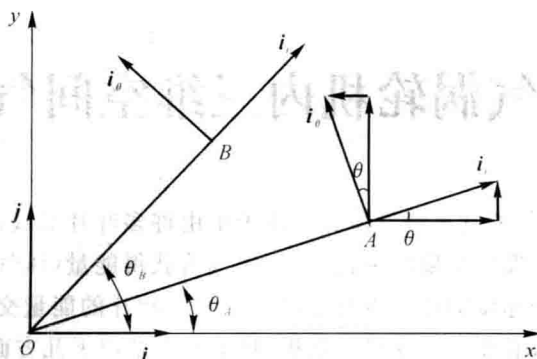


图 1-1 绝对坐标系中的笛卡儿坐标系和圆柱坐标系


 图 1-2 i_r 和 i_θ 的变化

从图 1-2 可以得出下列关系式：

$$\left. \begin{aligned} i_r &= i \cos \theta + j \sin \theta \\ i_\theta &= -i \sin \theta + j \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

从式(1-1)可以看出,因为 i 和 j 不变,所以 i_r 和 i_θ 只是 θ 坐标的函数,将式(1-1)沿微团运动的方向对时间求全导数并用 $\frac{D}{Dt}$ 表示,则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{Di_r}{Dt} &= \frac{\partial i_r}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} = (-i \sin \theta + j \cos \theta) \frac{D\theta}{Dt} \\ \frac{Di_\theta}{Dt} &= \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} = (-i \cos \theta - j \sin \theta) \frac{D\theta}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

比较式(1-1)和式(1-2),可得下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i_\theta}{\partial \theta} &= -i_r \\ \frac{\partial i_r}{\partial \theta} &= i_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式(1-2)中的 $\frac{D\theta}{Dt}$ 为流体微团的绝对角速度,可以用它的切向分速度 C_θ 除以半径 r 得到,即 $\frac{D\theta}{Dt} = \frac{C_\theta}{r}$,合并式(1-2)和式(1-3),就可以得出绝对圆柱坐标系中单位向量 i_r 和 i_θ 的全导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Di_r}{Dt} &= \frac{C_\theta}{r} i_\theta \\ \frac{Di_\theta}{Dt} &= -\frac{C_\theta}{r} i_r \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式(1-3)和式(1-4)在以后的运算中常要用到。

观察转子叶片通道之间的气流流动时,通常采用与转子相同的角速度 ω 绕 z 轴旋转的圆柱坐标 (r, φ, z) ,这个坐标系称为“相对坐标系”或“动坐标系”。这样做以便和前面观察静子叶片通道中的气流流动所采用的绝对圆柱坐标系(又称静止坐标系或定坐标系)相区别。从图 1-3 不难看出这两种坐标系中的坐标和坐标轴的单位向量有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \varphi + \omega t \\ r_a &= r \\ z_a &= z \\ i_{r,a} &= i_r \\ i_{\theta} &= i_{\varphi} \\ i_{z,a} &= i_z \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

式中,带下标 a 的表示绝对坐标系的坐标或向量。

式(1-5)说明两坐标系中的坐标除了角坐标相差一个 ωt 之外,其他坐标和单位向量都相同,因而除了特别说明外,它们都可以互相代替。将式(1-5)中的第一式的左、右两边对时间求全导数并乘以坐标 r ,则有

$$r \frac{D\theta}{Dt} = r \frac{D\varphi}{Dt} + r\omega$$

因为

$$r \frac{D\theta}{Dt} = C_{\theta}$$

$$r \frac{D\varphi}{Dt} = W_{\varphi}$$

所以就得出同一流体微团的绝对运动的切向分速度 C_{θ} , 相对运动的切向分速 W_{φ} 和牵连运动的速度 ωr 之间的关系式:

$$C_{\theta} = W_{\varphi} + \omega r \quad (1-6)$$

式(1-5)是两种坐标系中的坐标和单位向量间的关系式,而式(1-4)则是绝对圆柱坐标系中 i_r 和 i_{θ} 的全导数。下面再看一下相对圆柱坐标系中的单位向量 i_{φ} 和 i_r 对时间的全导数又是怎样的。

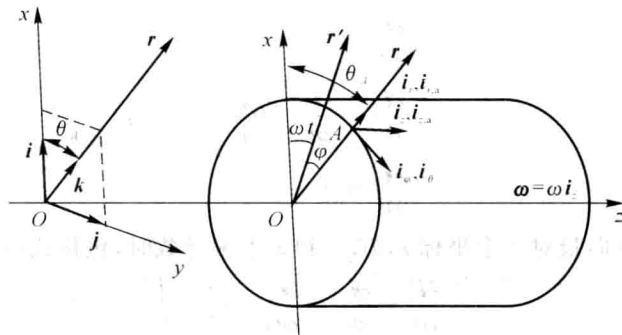


图 1-3 绝对圆柱坐标系与相对圆柱坐标系

为了避免符号上的混淆和误会,下面对绝对坐标系中的 i_r, i_{θ} 和 i_z 求全导数时一概在求全导数符号下加下标 a, 如 $\frac{D_a i_r}{Dt}, \frac{D_a i_{\theta}}{Dt}$ 和 $\frac{D_a i_z}{Dt}$, 而对相对坐标系中的 i_r, i_{θ} 和 i_z 求全导数时则不加下标, 如 $\frac{D i_r}{Dt}, \frac{D i_{\theta}}{Dt}$ 和 $\frac{D i_z}{Dt}$ 。在不会引起误会的地方也不加注。

把式(1-6)代入式(1-4), 可得

$$\frac{D_a i_r}{Dt} = \frac{C_{\theta}}{r} i_{\theta} = \frac{1}{r} (W_{\varphi} + \omega r) i_{\theta} = \frac{W_{\varphi}}{r} i_{\theta} + \omega i_{\theta}$$

若在相对坐标系中观察,并注意到 $\mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\varphi$,则上式右边第一项和式(1-4)中的第一式相类似,故可写成

$$\frac{D\mathbf{i}_r}{Dt} = \frac{W}{r}\mathbf{i}_\varphi$$

这就是相对坐标系中的 $\mathbf{i}_r$ 对时间的全导数。利用这个关系,上式就可写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_a\mathbf{i}_r}{Dt} - \omega\mathbf{i}_\theta &= \frac{D\mathbf{i}_r}{Dt} = \frac{W}{r}\mathbf{i}_\varphi \\ \frac{D_a\mathbf{i}_r}{Dt} &= \frac{W}{r}\mathbf{i}_\varphi + \omega\mathbf{i}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

或

同理,可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_a\mathbf{i}_\theta}{Dt} + \omega\mathbf{i}_\theta &= \frac{D\mathbf{i}_\varphi}{Dt} = -\frac{W}{r}\mathbf{i}_r \\ \frac{D_a\mathbf{i}_\theta}{Dt} &= -\frac{W}{r}\mathbf{i}_r - \omega\mathbf{i}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

或

式(1-7)和式(1-8)就是两种坐标系中的单位向量 $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ 和 $\mathbf{i}_r$ 的全导数之间的关系式。仔细观察以上两式可以看出,当求 $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ 和 $\mathbf{i}_r$ 对时间的全导数时, $\mathbf{i}_\theta$ 和 $\mathbf{i}_\varphi$ 不能相互代替。同样, $\mathbf{i}_r$ 也是如此,即

$$\frac{D_a\mathbf{i}_r}{Dt} \neq \frac{D\mathbf{i}_r}{Dt}, \quad \frac{D_a\mathbf{i}_\theta}{Dt} \neq \frac{D\mathbf{i}_\varphi}{Dt}$$

至于对 $\mathbf{i}_z$ 的全导数,则显然有

$$\frac{D_a\mathbf{i}_z}{Dt} = \frac{D\mathbf{i}_z}{Dt}$$

如果对时间求偏导数,则意味着 $r, \theta(\varphi)$ 和 z 都固定不变,故有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

另外,这3个单位向量对3个坐标 $r, \theta(\varphi)$ 和 z 求偏导数时,包括式(1-3),则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial r} &= \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial z} &= \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \mathbf{i}_z}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} &= \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{i}_r \\ \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} &= \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

1.2 绝对速度在绝对圆柱坐标系中的分量

当气体微团流过静子叶片通道时,如果从绝对坐标系中观察,则称它的运动为“绝对运动”,而它的速度则称为“绝对速度”,用 C 表示。某瞬时它沿 i_r , i_θ 和 i_z 3 个方向的分量分别为 C_r , C_θ 和 C_z 。当用向量表示全速度时,则有

$$C = C_r i_r + C_\theta i_\theta + C_z i_z$$

这三者之间的关系如图 1-4 所示。

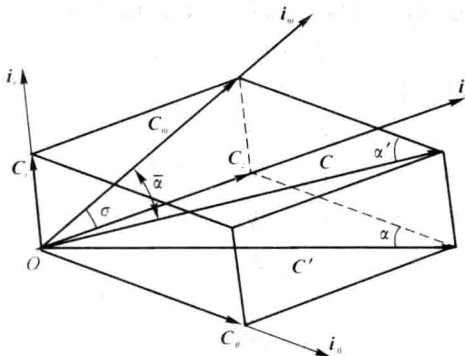


图 1-4 绝对运动的各分速度间的关系

在三维流分析中,常常需要分析全速度 C 在子午面上(即 r 和 z 两坐标轴组成的平面)的分速度 C_m ,由图 1-4 可以看出,它的大小以及与 z 轴的平角 σ 分别为

$$\left. \begin{aligned} C_m &= \sqrt{C_r^2 + C_z^2} \\ \sigma &= \arctan \frac{C_r}{C_z} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

如果 C_m 已知,则可求得它的分速度的大小为

$$\left. \begin{aligned} C_r &= C_m \sin \sigma \\ C_z &= C_m \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

由图 1-4 也可以看出,全速度 C 是子午面上的分速 C_m 和切向分速度 C_θ 的向量之和,即

$$C = C_m + C_\theta$$

令 $\bar{\alpha}$ 为全速度 C 与子午分速度 C_m (也就是子午面)之间的夹角,并注意到 C_m 和 C_θ 相互垂直,则有

$$\left. \begin{aligned} C_m &= C \cos \bar{\alpha} \\ C_r &= C_m \sin \sigma = C \cos \bar{\alpha} \sin \sigma \\ C_\theta &= C_m \tan \bar{\alpha} = C \sin \bar{\alpha} \\ C_z &= C_m \cos \sigma = C \cos \bar{\alpha} \cos \sigma \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

在叶轮机的正问题中(指气动性能分析),知道的数据是全速度 C 在 z, θ 平面上的投影 C' 与切向所成的夹角 α ,因为当计算气流的落后角时出口速度是 C' 而不是 C 。当 σ 角很小时,两者差别就不大了。从图 1-4 可以看出

$$\alpha = \operatorname{arccot} \frac{C_\theta}{C_z} \quad (1-14)$$

1.3 转子叶片通道中的绝对速度和相对速度

当气体流过转子的叶片通道时,可以想象自己置身于旋转的圆柱坐标系中来观察气流的运动,这时观察到的气流速度称为“相对速度”,用 W 表示。在同一时刻,根据上述该流体微团相对于绝对圆柱坐标系的速度则为“绝对速度”,用 C 表示。而同一微团由于相对坐标系的旋转而得到的切线速度,则称为“牵连速度”,用 U 表示。根据质点运动的速度合成原理,则有

$$C = W + U = W + \omega \times r \quad (1-15)$$

从图 1-5 可以看出下列关系:

$$\left. \begin{aligned} C_m &= W_m \\ C_z &= W_z \\ C_\theta &= W_\theta + \omega r \\ C_r &= W_r \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

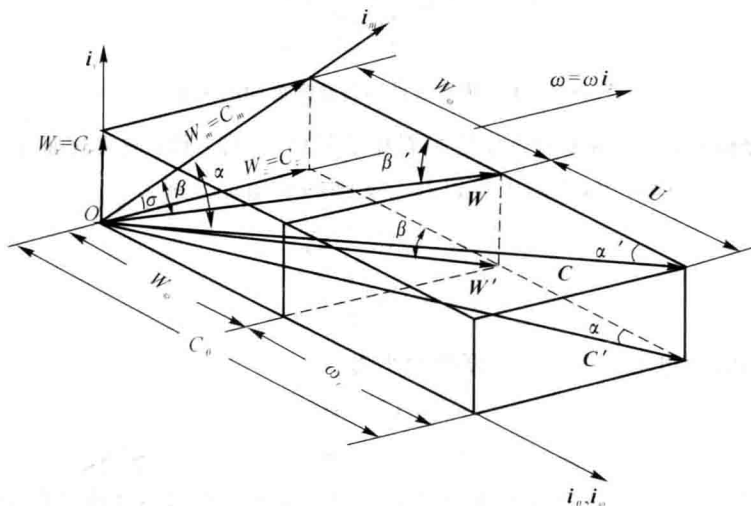


图 1-5 绝对速度和相对速度间的关系

式(1-16)也可以从向量的简单运算式来证明。在证明之前,要先知道圆柱坐标的 3 个单位向量 i_r, i_θ 和 i_z 有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} i_r \times i_r &= 0, & i_r \times i_\theta &= i_z \\ i_r \cdot i_r &= 1, & i_r \cdot i_\theta &= 0 \\ i_\theta \times i_\theta &= 0, & i_\theta \times i_z &= i_r \\ i_\theta \cdot i_\theta &= 1, & i_\theta \cdot i_z &= 0 \\ i_z \times i_z &= 0, & i_z \times i_r &= i_\theta \\ i_z \cdot i_z &= 1, & i_z \cdot i_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

根据向量运算中投影的方法,如果要求速度在子午面上的分速度 C_m 和 W_m ,则将子午面上的单位向量 i_m 和式(1-15)两边作点乘(无向量乘法):

$$C \cdot i_m = W \cdot i_m + (\omega \times r) \cdot i_m$$

$$C_m = W_m + (\omega i_z \times r i_r) \cdot i_m = W_m + \omega r (i_z \times i_r) \cdot i_m = W_m + \omega r i_\theta \cdot i_m$$

因为 i_θ 垂直于 i_m ,故 $i_\theta \cdot i_m = 0$,结果得出 $C_m = W_m$ 。如果要求得切线方向的分速度 C_θ ,则可用 i_θ 与式(1-15)两边作点乘,即

$$C_\theta = C \cdot i_\theta = W \cdot i_\theta + i_\theta \cdot (\omega \times r)$$

利用式(1-17)的关系,最后亦可求得和式(1-6)一样的关系式。

1.4 燃气涡轮机中空间气流的加速度

气体微团流过转子叶片的通道时与叶片有能量交换(从绝对坐标系中看),通过静子叶片通道时因叶片静止不动,故两者之间没有能量交换(总焓为一常数),但是气流本身的动能和热能之间根据通道的性质(收敛还是扩散)却要进行转换。因此,无论是绝对速度还是相对速度,一般来说都要发生变化。

1. 绝对加速度在坐标轴上的分量

当气体微团流过静子叶片通道时,瞬时的绝对速度可用它的3个分量来表示:

$$C = i_r C_r + i_\theta C_\theta + i_z C_z$$

根据上述,将上式沿流体微团运动方向对时间求全导数就得到绝对加速度,用 $\frac{DC}{Dt}$ 表示,则得

$$a = \frac{DC}{Dt} = i_r \frac{DC_r}{Dt} + C_r \frac{Di_r}{Dt} + i_\theta \frac{DC_\theta}{Dt} + C_\theta \frac{Di_\theta}{Dt} + i_z \frac{DC_z}{Dt} + C_z \frac{Di_z}{Dt}$$

利用式(1-4)中的关系,并注意到 $Di_z/Dt = 0$,则上式变为

$$a = \frac{DC}{Dt} = i_r \left(\frac{DC_r}{Dt} - \frac{C_\theta^2}{r} \right) + i_\theta \left(\frac{DC_\theta}{Dt} + \frac{C_r C_\theta}{r} \right) + i_z \frac{DC_z}{Dt} \quad (1-18)$$

从式(1-18)可以解得加速度在3个坐标轴上的分量为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{DC}{Dt} \right)_r &= \frac{DC_r}{Dt} - \frac{C_\theta^2}{r} \\ \left(\frac{DC}{Dt} \right)_\theta &= \frac{DC_\theta}{Dt} + \frac{C_r C_\theta}{r} \\ \left(\frac{DC}{Dt} \right)_z &= \frac{DC_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

因为 $C_r = C_r(r, \theta, z, t)$, $C_\theta = C_\theta(r, \theta, z, t)$, $C_z = C_z(r, \theta, z, t)$,将 DC_r/Dt , DC_θ/Dt , DC_z/Dt 按多元函数求导方法展开,则式(1-19)又可写成

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{DC}{Dt} \right)_r &= \frac{DC_r}{Dt} - \frac{C_\theta^2}{r} = \frac{\partial C_r}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_\theta \frac{\partial C_r}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_\theta^2}{r} \\ \left(\frac{DC}{Dt} \right)_\theta &= \frac{DC_\theta}{Dt} + \frac{C_r C_\theta}{r} = \frac{\partial C_\theta}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_\theta}{\partial r} + C_\theta \frac{\partial C_\theta}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial C_\theta}{\partial z} + \frac{C_r C_\theta}{r} \\ \left(\frac{DC}{Dt} \right)_z &= \frac{DC_z}{Dt} = \frac{\partial C_z}{\partial t} + C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + C_\theta \frac{\partial C_z}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

2. 气体微团流过转子叶片通道时的绝对加速度和相对速度沿 3 个坐标轴的分量

将式(1-16)中的 $C_r = W_r$, $C_z = W_z$ 和 $C_\theta = W_\theta + \omega r$ 的关系式代入式(1-20), 就可以得出气体流过转子叶片通道时的绝对加速度和相对加速度的 3 个分量以及它们之间的关系式(其中包括向心加速度和哥氏加速度):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{DC}{Dt}\right)_r &= \frac{DW_r}{Dt} - \frac{(W_\varphi + \omega r)^2}{r} = \frac{DW_r}{Dt} - \frac{W_\varphi^2}{r} - \omega^2 r - 2W_\varphi \omega \\ \left(\frac{DC}{Dt}\right)_\theta &= \frac{D(W_\varphi + \omega r)}{Dt} - \frac{(W_\varphi + \omega r)W_r}{r} = \frac{DW_\varphi}{Dt} - \frac{W_\varphi W_r}{r} + 2W_r \omega \\ \left(\frac{DC}{Dt}\right)_z &= \frac{DC_z}{Dt} = \frac{DW_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

比较式(1-21)和式(1-19)中等号右边的第一项和第二项, 可知相对加速度的 3 个分量为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{DW}{Dt}\right)_r &= \frac{DW_r}{Dt} - \frac{W_\varphi^2}{r} \\ \left(\frac{DW}{Dt}\right)_\varphi &= \frac{DW_\varphi}{Dt} - \frac{W_\varphi W_r}{r} \\ \left(\frac{DW}{Dt}\right)_z &= \frac{DW_z}{Dt} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

注意到 $W_r(r, \varphi, z, t)$, $W_\varphi(r, \varphi, z, t)$, $W_z(r, \varphi, z, t)$, 并将式(1-21)展开后, 则得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{DC}{Dt}\right)_r &= \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_\varphi \frac{\partial W_r}{r \partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_\varphi^2}{r} - \omega^2 r - 2W_\varphi \omega \\ \left(\frac{DC}{Dt}\right)_\theta &= \frac{\partial W_\varphi}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} + W_\varphi \frac{\partial W_\varphi}{r \partial \varphi} + W_z \frac{\partial W_\varphi}{\partial z} - \frac{W_\varphi W_r}{r} - \omega^2 r - 2W_r \omega \\ \left(\frac{DC}{Dt}\right)_z &= \frac{\partial W_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

如果根据质点运动的加速度合成原理, 则有

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{DW}{Dt} - \omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} \quad (1-24)$$

式中, $\omega^2 \mathbf{r}$ 为向心加速度; $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}$ 为哥氏加速度。

将 $\omega^2 \mathbf{r}$ 和 $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W}$ 向 3 个坐标轴投影, 则有

$$(\omega^2 \mathbf{r})_r = (\omega^2 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}_r = \omega^2 r \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r = \omega^2 r$$

$$(\omega^2 \mathbf{r})_\theta = (\omega^2 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}_\theta = \omega^2 r \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta = 0$$

$$(\omega^2 \mathbf{r})_z = (\omega^2 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{i}_z = \omega^2 r \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_z = 0$$

$$2 \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} = 2[\omega \mathbf{i}_z \times (W_r \mathbf{i}_r + W_\varphi \mathbf{i}_\varphi + W_z \mathbf{i}_z)] = 2(\omega W_r \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_r + \omega W_\varphi \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_\varphi + \omega W_z \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_z) =$$

$$2\omega W_r \mathbf{i}_\varphi + 2\omega W_\varphi (-\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_z) = 2\omega W_r \mathbf{i}_\varphi - 2\omega W_\varphi \mathbf{i}_r$$

因此, 哥氏加速度只有沿径向和切向的分量, 即

$$(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W})_r = -2\omega W_\varphi$$

$$(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W})_\varphi = 2\omega W_r$$

从式(1-24)又可得出式(1-23)。

1.5 圆柱坐标系中的梯度、散度和旋度

在三维流场分析中,因为气体参数沿3个坐标轴都有变化,所以书写起来比较冗长,但如果运用向量分析的方法来表示,则非常简单而且易于记忆。例如,当表示绝对加速度与相对加速度时,表示向心加速度和哥氏加速度之间关系的式(1-23)就没有向量表达式(1-24)简单。因此,在三维流的运算中,将尽量利用向量分析中的表示方法。

关于哈密顿运算符 ∇ 、梯度、散度和旋度的定义和证明可参看文献[6-7]或其他有关这方面的书籍。

1. 哈密顿运算符 ∇

众所周知,哈密顿运算符 ∇ 是一个微分运算符号,在圆柱坐标系中,它表示为

$$\nabla = i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-25)$$

2. 梯度

当哈密顿运算符与某一非向量(或称标量)作用时,其结果是一个向量,并称之为该非向量的“梯度”。当哈密顿运算符与压力 p 作用时,即得压力梯度 ∇p :

$$\nabla p = i_r \frac{\partial p}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial p}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1-26)$$

3. 散度

速度 C 的散度:

$$\nabla \cdot C = \frac{1}{r} \frac{\partial (rC_r)}{\partial r} + \frac{\partial C_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad (1-27)$$

速度 C 与密度 ρ 乘积的散度:

$$\nabla \cdot (\rho C) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\rho C_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho C_\theta)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (\rho C_z)}{\partial z} \quad (1-28)$$

4. 旋度

绝对速度的旋度 $\nabla \times C$:

$$\nabla \times C = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (C_\theta r)}{\partial z} \right] i_r + \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) i_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (C_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] i_z \quad (1-29)$$

由式(1-27)可得 $\nabla \times C$ 的3个分量:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \times C)_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (C_\theta r)}{\partial z} \right] \\ (\nabla \times C)_\theta &= \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \\ (\nabla \times C)_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (C_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

将式(1-16)代入式(1-30),可得

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathbf{V} \times \mathbf{C})_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(C_\theta r)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W_z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial(W_\varphi + \omega r)r}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(W_\varphi r)}{\partial z} \right] \\
 (\mathbf{V} \times \mathbf{C})_\theta &= \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} = \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \\
 (\mathbf{V} \times \mathbf{C})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(C_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(W_\varphi + \omega r)r}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] = \\
 &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial(W_\varphi r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(W_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \right] + 2\omega
 \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

从式(1-31)可以看出,相对速度 $\mathbf{W}$ 的旋度的 3 个分量为

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathbf{V} \times \mathbf{W})_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(W_\varphi r)}{\partial z} \right] \\
 (\mathbf{V} \times \mathbf{W})_\theta &= \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \\
 (\mathbf{V} \times \mathbf{W})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(W_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

比较式(1-31)和式(1-32)可知, $\mathbf{V} \times \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ 在 z 轴的分量只差 2ω , 其余两个分量均相同, 如果用向量来表示两者的关系, 则式(1-31)可用一向量式子表示:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{C} = \mathbf{V} \times \mathbf{W} + 2\boldsymbol{\omega} \quad (1-33)$$

从运动学中知道, 旋度 $\mathbf{V} \times \mathbf{C}$ 代表流场中的气流旋涡。如果流入转子的气流的绝对旋度等于零, 即 $\mathbf{V} \times \mathbf{C} = \mathbf{0}$, 那么这时从绝对坐标系上观察时, 整个流场中的气体微团都没有旋转运动, 这时的绝对运动就是流体力学上所说的“位流”运动。从而式(1-33)变为

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = -2\boldsymbol{\omega}$$

这就是说, 虽然绝对旋度 $\mathbf{V} \times \mathbf{C} = \mathbf{0}$, 但是在动坐标上观察时, 气流有旋涡, 它的强度等于转轴角速度的两倍, 而旋转方向则和转子转动的方向相反。

在三维流场的分析中, 会碰到速度 $\mathbf{C}$ 与旋度 $\mathbf{V} \times \mathbf{C}$ 的向量乘法, 即 $\mathbf{C} \times \mathbf{V} \times \mathbf{C}$, 这个乘积的 3 个分量为

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathbf{C} \times \mathbf{V} \times \mathbf{C})_r &= \frac{C_\theta}{r} \left[\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] - C_z \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) \\
 (\mathbf{C} \times \mathbf{V} \times \mathbf{C})_\theta &= \frac{C_z}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rC_\theta)}{\partial z} \right] - \frac{C_r}{r} \left[\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] \\
 (\mathbf{C} \times \mathbf{V} \times \mathbf{C})_z &= C_r \left(\frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} \right) - \frac{C_\theta}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rC_\theta)}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

式(1-34)也可以按下面的行列式运算法得到:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{V} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} i_r & i_\theta & i_z \\ C_r & C_\theta & C_z \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial C_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rC_\theta)}{\partial z} \right] & \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rC_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \theta} \right] \end{vmatrix}$$

1.6 空间流动分析中常用的微分运算符

前面介绍了哈密顿运算符 $\nabla = i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z}$ 。下面将介绍一些这个运算符和速度作无向量乘积 ($\mathbf{C} \cdot \nabla$) 后出现的一种微分运算符。

1. 速度沿流体微团运动方向的全导数

要知道流场中的气流参数如速度、压力等的分布,可以用某一个流体微团从某瞬时 t 起由一点流动到另一点时该微团的速度变化(或压力变化)来测量。例如,速度的变化可以用微团的速度沿它的运动方向的全导数,也就是式(1-20)的向量表达式来表示:

$$\frac{D\mathbf{C}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{C} \quad (1-35)$$

式中, $\frac{D\mathbf{C}}{Dt}$ 为流体微团的全加速度; $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}$ 为当地加速度,它表示流场中某点的速度随时间变化而引起的加速度,当流场为定常流(又称稳定流)时, $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = 0$; $(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{C}$ 为迁移加速度,它表示由于流场中各点的速度不同而引起的加速度。

如果将式(1-35)写成下面的形式:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{C} \cdot \nabla) \quad (1-36)$$

则称式(1-36)为“沿流体微团运动方向的求全导数运算符”。无论是向量还是无向量都可以与这个运算符作用。例如,与速度 $\mathbf{C}$ 作用时,就得到表示全加速度的表达式即式(1-35);与压力 p 作用时,则有

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{C} \cdot \nabla) p$$

和总焓(H)作用时,则有

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\mathbf{C} \cdot \nabla) H$$

以上两式分别表示压力 p 和总焓 H 沿液体微团运动方向的变化。

2. 微分运算符 ($\mathbf{C} \cdot \nabla$) 和 ($\mathbf{W} \cdot \nabla$)

根据哈密顿运算符的定义和式(1-17)的关系, $\mathbf{C} \cdot \nabla$ 可写成

$$\mathbf{C} \cdot \nabla = (C_r i_r + C_\theta i_\theta + C_z i_z) \cdot \left(i_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + i_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = C_r \frac{\partial}{\partial r} + C_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-37)$$

这个运算符与速度 $\mathbf{C}$ 相作用,如上所述,就得到迁移加速度为

$$(\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{C} = C_r \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial r} + C_\theta \frac{\partial \mathbf{C}}{r \partial \theta} + C_z \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z}$$

将上式右边展开,在微分运算过程中应注意以下几点:

(1) $\mathbf{C} = i_r C_r + i_\theta C_\theta + i_z C_z$;

(2) C_r, C_θ 和 C_z 都是 r, θ, z 的多元函数;