高等数学强化与竞赛教程

主编 朱晓星 马儒宁 袁泉

南京大学出版社

高等数学
强化与竞赛教程

主编 朱晓星 马儒宁 袁泉

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学强化与竞赛教程/朱晓星，马儒宁，袁泉主编. —南京：南京大学出版社，2014. 12

ISBN 978 - 7 - 305 - 14550 - 6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②马… ③袁… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 002413 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 高等数学强化与竞赛教程
主　　编 朱晓星　马儒宁　袁　泉
责任编辑 江　龙　吴　华　　编辑热线 025 - 83597087

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 丹阳市兴华印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 20. 75 字数 518 千
版　　次 2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 14550 - 6
定　　价 40. 00 元

网　　址：http://www. njupco. com
官方微博：http://weibo. com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

高等数学是高等院校最重要的基础课之一，同时也是大部分专业的硕士研究生入学考试的必考科目。为了激发大学生学习数学的积极性，提高学生运用数学知识解决问题的能力，培养学生的创新思维，各个省、市、自治区不约而同地组织大学生高等数学竞赛，而在 2009 年开始举办的全国大学生数学竞赛更是每年吸引了数百所高校、数万名同学参加。

高等数学竞赛的宗旨包括两方面：一是激励大学生学习数学的兴趣，活跃思想，促进学生系统地理解高等数学的基本概念、基本理论、基本方法，使学生通过准备以及参加竞赛在抽象思维能力、逻辑推理能力、空间抽象能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力方面有较大的提升；二是推动大学数学的教学体系、教学内容和方法等方面的改革，提高教学质量。

本书作为高等数学的强化教程，是一本参加高等数学竞赛的辅导书，同时也是学习高等数学或准备考研的复习书，适合高等数学基础较好的同学，可以使大家全面掌握高等数学的基本概念、重要知识点、基本思想和方法，培养运用数学知识解决问题的能力。鉴于目前国内的高等数学辅导教材停留在两个极端，要么是课本内容的重述，缺乏思想和方法的提炼与扩充，要么就是单纯的习题集，缺乏知识点的串联与总结。本书的编写克服了这两个缺陷，通过对高等数学知识体系的全盘把握，将所有内容分为十个专题。每一专题首先总结相关的主要知识点，提炼课本内容，并进行适当扩充，然后通过典型例题讲解基本方法，最后附以针对该章节典型方法的练习题（其中加 * 的例题和练习题具有一定难度，可供参加竞赛的同学选学）。本书同时包含历届全国大学生数学竞赛（非数学专业组，包括预赛和决赛）和历届江苏省非理科专业高等数学竞赛（本科一级）的全部试题以及详细解答。

数学的学习不可能一蹴而就，需要长时间的坚持，特别需要大量的练习。学好数学离不开习题，但学好数学不仅仅限于做题本身，将数学的思想与方法应用于实际问题才是我们学习数学的目的。

欧拉漫步在小城哥尼斯堡普雷格尔河的七座桥上，开创了数学的新分支——图论和几何拓扑；高斯在哥廷根天文台追寻小行星谷神星的踪迹，建立了最小二乘法；伽罗瓦则在极端恶劣的环境里思考着高次代数方程的解法，奠基了群论这一影响现代科学几乎所有学科的重要数学分支。

遵循数学大师的足迹，可以发现，新思想、新方法往往产生于对具体问题的解决上。也许我们无法解决千古难题，产生划时代的数学思想，但是培养严谨的逻辑推理能力，形成自己独特的数学思维习惯，这将成为同学们从事工程、管理等领域学习、研究或工作中弥足珍贵的财富。我们正是希望通过本书的学习，提升大家对高等数学基本理论、基本方法掌握的熟练程度，为今后进一步的学习和工作打下良好的高等数学基础。

本书的编者常年从事重点院校高等数学的本科教学、竞赛指导、考研辅导等工作，具有极其丰富的教学经验。本书编写的具体分工如下：第一章至第六章由马儒宁编写；第七章至第九章由朱晓星编写；第十章及附录由袁泉编写。最后由朱晓星统稿修订。

在本书的编写过程中，得到作者所在单位南京航空航天大学数学系的大力支持和帮助。本书的例题和习题部分为作者原创，部分则来源于研究生入学考试、国内外高等数学竞赛以及其他相关参考书，在此一一表示致谢！

由于编写时间仓促，编者水平有限，编写中难免存在不当和错误之处，请读者批评指正。

朱晓星

2014 年 9 月　于南京

目　录

第一章　极限与连续

第一节　数列极限

◆ 核心概念:数列极限

"$\varepsilon-N$"定义:$\{x_n\}$为数列,A为给定实数,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$|x_n-A|<\varepsilon$,称数列$\{x_n\}$收敛于A.(等价于数列$\{x_n\}$中满足$|x_n-A|\geqslant\varepsilon$的只有有限项)

邻域式定义:$\{x_n\}$为数列,A为给定实数,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n\in U(A,\varepsilon)$,称数列$\{x_n\}$收敛于A.(等价于在$U(A,\varepsilon)$之外只有数列$\{x_n\}$中的有限项)

注:1. 数列$\{x_n\}$收敛指收敛于某给定实数A,若数列$\{x_n\}$不收敛任意实数,则称数列$\{x_n\}$发散;

2. 定义中的不等式$|x_n-A|<\varepsilon$可以改为$|x_n-A|\leqslant\varepsilon$、$|x_n-A|<k\varepsilon$、$|x_n-A|\leqslant k\varepsilon$($k$为给定正数)等;

3. 定义中的正整数N依赖于ε但不唯一,$n>N$可以改为$n\geqslant N$;

4. 定义提供了证明数列$\{x_n\}$收敛于给定数A的方法,但未提供如何求A的方法(当使用定义求极限时,一般先猜测极限值,然后用定义证明);

5. 否定说法:

(1) 数列$\{x_n\}$不收敛于$A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$,$\forall N>0$,$\exists n_0>N$,使得$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$;

子列描述:数列$\{x_n\}$不收敛于$A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$,使得$\forall k$,$|x_{n_k}-A|\geqslant\varepsilon_0$;

(2) 数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow$对$\forall A\in\mathbf{R}$,$\exists\varepsilon_0>0$,对$\forall N>0$,$\exists n_0>N$,使得$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$;

子列描述:数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$,$\{x_{n_k}^{(2)}\}$,使得$\forall k$,$|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|\geqslant\varepsilon_0$.

◆ 数列极限的性质与相关定理

1. 唯一性:若数列$\{x_n\}$收敛,则具有唯一的极限.

2. 有界性:收敛数列必为有界数列(若数列$\{x_n\}$收敛,则$\exists$正数M,使得$\forall n$,$|x_n|\leqslant M$).

注:(1) 无界数列一定发散;

(2) 数列$\{x_n\}$无界$\Leftrightarrow\{x_n\}$存在子列$\{x_{n_k}\}$为无穷大量;特别地,若数列$\{x_n\}$无上界,则$\{x_n\}$一定存在以$+\infty$为极限的子列,若数列$\{x_n\}$无下界,则$\{x_n\}$一定存在以$-\infty$为极限的子列(为无穷大量的数列或以$+\infty$、$-\infty$为极限的数列仍为发散数列).

3. 保号性与保序性(保不等式性):

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$,则对任意的$0<p<A$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n>p>0$;

(2) 若数列$\{x_n\}$收敛,且$\exists N>0$,当$n>N$时,$x_n\geqslant0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant0$;

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$,则$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n>y_n$;

(4) 若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛，且$\exists N>0$，当$n>N$时，$x_n\geqslant y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

注：由极限的不等式得到数列的不等式(如(1)、(3))，条件中极限的不等式必须为严格不等式(条件是强的)；由数列的不等式得到极限的不等式(如(2)、(4))，无论条件中数列的不等式严格与否，结论中极限的不等式只能是非严格不等式(结论是弱的).

4. 四则运算性：两个收敛数列的和、差、积、商仍然收敛，且和、差、积、商的极限为极限的和、差、积、商(作商时要求分母及其极限不为零).

注：(1) 可以由两个收敛数列的运算推广到任意有限个(个数确定)收敛数列的运算；

(2) 两个数列中一个收敛，一个发散，其和与差一定发散，但积与商可能收敛，可能发散；

(3) 两个发散的数列，其四则运算后可能收敛，可能发散；

(4) 提供了求数列极限的一种方法(将复杂数列分解为有限个简单数列的四则运算).

5. 迫敛性(夹逼准则、两边夹定理)：设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足

(1) $\forall n, x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，(2) $\{x_n\}$，$\{z_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则数列$\{y_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

注：本定理既给出了证明数列收敛的方法，也给出一种求数列极限的方法(关键是建立不等式).

6. 子列收敛性：若数列$\{x_n\}$收敛(于A)$\Leftrightarrow$对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$，$\{x_{n_k}\}$均收敛(于A).

注：(1) 若数列$\{x_n\}$收敛于$A\Leftrightarrow\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n-1}\}$均收敛于$A$(利用奇偶数列极限相等是证明数列收敛或求数列极限的一种方法)；

(2) 若$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$发散，则$\{x_n\}$一定发散；

(3) 若$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$一定发散.

7. 单调有界准则：单调有界数列一定收敛.

注：(1) 一般分为单调递增有上界和单调递减有下界两种情况；

(2) 单调数列的任意子列也单调；

(3) 单调数列的某子列收敛，则单调数列一定收敛；

(4) 单调数列的某子列有界，则单调数列一定收敛；

(5) 证明数列单调的方法：(a)利用递推式或基本不等式直接证明，(b)数学归纳法，(c)将数列通项中的n视为x，利用对x求导的方法来证明；

(6) 利用单调收敛准则求递推数列极限的步骤：(i)证明数列单调且有界，(ii)在递推式两边同时求极限，得到极限满足的等式，从而求出极限值.

8. Cauchy收敛准则：数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n,m>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

注：(1) 等价描述：数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，对$\forall p\in\mathbf{N}$，有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$；

$\Leftrightarrow\exists$收敛于0的数列$\{a_n\}$，对$\forall p\in\mathbf{N}$，有$|x_{n+p}-x_n|\leqslant a_n\to0\ (n\to\infty)$；

(2) 否定说法：数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists n_1,n_2>N$，使得$|x_{n_1}-x_{n_2}|\geqslant\varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，使得$\forall k$，$|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|\geqslant\varepsilon_0$；

(3) Cauchy收敛准则证明数列收敛，不需要知道数列的极限值；

(4) Cauchy收敛准则给出了证明数列收敛的方法，但没有给出求极限值的方法.

9. Stolz 公式：设 $\{y_n\}$ 是单调增加的正无穷大量，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$（$A$ 可以是有限数或 $+\infty,-\infty$），则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

注：Stolz 公式可以看成推广的"离散型罗必达法则".

10. 平均收敛定理：（算术平均收敛定理）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=A$；

（几何平均收敛定理）若 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=A$.

注：平均收敛定理的逆命题不成立.（请举反例）

例题精讲

例 1 证明数列 $\sqrt{a},\sqrt{a+\sqrt{a}},\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots(a>0)$ 极限存在，并求出它的极限.

解：设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}=\sqrt{a+x_2}$，故数列的一般项为 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$.

因为 $a>0$ 有 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1}=x_2$，设 $x_{n-1}<x_n$，则 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}=x_{n+1}$，故数列 $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又因为 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$，设 $x_{n-1}<\sqrt{a}+1$，则

$$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1$$

故 $\{x_n\}$ 有上界，因此数列 $\{x_n\}$ 极限存在，设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$，则 $x_n^2=a+x_{n-1}$ 两边取极限得 $A^2=a+A$，解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，舍去负值 $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

例 2 若存在 $0<r<1$ 使得数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|$，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证明：由于 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-2}|x_2-x_1|$，则

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant r^{n+p-2}|x_2-x_1|+\cdots+r^{n-1}|x_2-x_1|$$
$$\leqslant r^{n-1}\frac{|x_2-x_1|}{1-r}\to 0\ (n\to\infty).$$

由 Cauchy 收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 3 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限； (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解：(1) 因为 $0<x_1<\pi$，则 $0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\pi$，可得 $0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant 1<\pi$，$n=1,2,\cdots$，

则数列$\{x_n\}$有界.

又由于$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sin x_n}{x_n}<1$,(因当$x>0$时,$\sin x<x$),则有$x_{n+1}<x_n$,可见数列$\{x_n\}$单调减少,故由单调减少有下界数列必有极限知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在$x_{n+1}=\sin x_n$两边令$n\to\infty$,得$l=\sin l$,解得$l=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,由(1)知该极限为$1^\infty$型,令$t=x_n$,则$n\to\infty$,$t\to 0$,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\exp\left[\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}\right]=\exp\left[\frac{1}{t^2}\ln\left(1+\frac{\sin t-t}{t}\right)\right]=\exp\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right],$$

又$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{6t}=-\frac{1}{6}$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

***例 4** 证明平均收敛定理(第3页结论10).

证明:(1) 算术平均收敛定理

若$A=0$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1>0$,当$n>N_1$时,有$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$x_1+\cdots+x_{N_1}$为固定数,可取$N>N_1$,使得$\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$. 故,当$n>N$时,有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\leqslant\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{n}+\frac{|x_{N_1+1}+\cdots+x_n|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

否则,$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-A)=0$,由上述可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-A\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1-A)+(x_2-A)+\cdots+(x_n-A)}{n}=0,$$

综上得证.

评注:利用定义证明数列极限收敛于给定值,关键是估计数列通项和极限值的差(使其可以任意小),经常使用分解的方法将复杂项分为若干简单、易估计项的和,然后“逐个击破”.

(2) 几何平均值收敛定理

显然$A\geqslant 0$,若$A=0$,由于$0\leqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,由算术平均收敛定理及迫敛性,得证;

若$A>0$,知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{A}$,由算术平均收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{1}{A},$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=A$,由平均值不等式:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

两边同时取极限,由迫敛性可得证.

评注:平均值不等式(调和平均值不大于几何平均值不大于算术平均值)是重要的基本不等式.

***例 5**　已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=AB$.

证明:记 $a_n=x_n-A$, $b_n=y_n-B$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,$\exists M>0$,使得$|b_n|\leqslant M$. 由于

$$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=AB+A\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}+B\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n},$$

根据算术平均值收敛定理可得:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$,并且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant M\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_n+\cdots+x_ny_1}{n}=AB+A\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}+B\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB+0=AB.$$

故得证.

评注:本题亦可直接利用定义来证明;将非零极限分解为常数和无穷小的和是简化问题的重要手段.

***例 6**　设 $x_1=2,x_2=2+\frac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

证明:(证法一)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由于 $x_n\geqslant2$,可知 $A\geqslant2$. 在递推式 $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$两边同时求极限,可得

$$A=2+\frac{1}{A}\Rightarrow A=1+\sqrt{2},$$

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$. 由于

$$|x_n-A|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|=\frac{|A-x_{n-1}|}{x_{n-1}A}$$
$$\leqslant\frac{|x_{n-1}-A|}{4}\leqslant\frac{|x_{n-2}-A|}{4^2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|x_1-A|}{4^{n-1}}=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},$$

以及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}=0$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$.

评注：由于数列不具有单调性，本题不能用单调收敛准则证明极限的存在性；先在数列收敛的前提下得到极限值，然后通过极限定义证明数列的确收敛于该极限，这是处理非单调递推数列的一种方法；此外，可以注意到该数列的奇子列和偶子列分别具有单调性，因此也可以通过奇偶子列收敛于同一极限值来证明.

（证法二）由于

$$|x_n-x_{n-1}|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{x_{n-2}}\right)\right|=\frac{|x_{n-1}-x_{n-2}|}{x_{n-1}x_{n-2}}$$
$$\leqslant\frac{|x_{n-1}-x_{n-2}|}{4}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-2}},$$

则$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{4^{n+p-2}}+\cdots+\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-1}}\leqslant\frac{4}{3}\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-1}}\to0\ (n\to\infty)$

由 Cauchy 收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由于 $x_n\geqslant2$，可知 $A\geqslant2$. 在递推式 $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$两边同时求极限，可得 $A=2+\frac{1}{A}\Rightarrow A=1+\sqrt{2}$.

评注：若数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|$（常数 r 满足 $0<r<1$），则称其为压缩数列. 由 Cauchy 收敛准则（例 2）可知，压缩数列一定收敛. 本题中的数列$\{x_n\}$满足了压缩数列的条件.（若 $x_{n+1}=f(x_n)$，且$|f'|\leqslant r<1$，则由拉格朗日中值定理可知数列$\{x_n\}$为压缩数列）

***例 7** 设 $x_0=a$，$0<a<\frac{\pi}{2}$，$x_n=\sin x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，求证：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

证明：(1) 由于 $0\leqslant x_n\leqslant1$ 且 $x_n=\sin x_{n-1}\leqslant x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$x_n=\sin x_{n-1}$两边取极限，可知 $A=\sin A\Rightarrow A=0$，得证.

(2) 只需证$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，知$\left\{\frac{1}{x_n^2}\right\}$为正无穷大量，根据 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot x_n^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot\sin^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot\sin^2x_{n-1}}{(x_{n-1}+\sin x_{n-1})(x_{n-1}-\sin x_{n-1})},$$

由于$\{x_n\}$为无穷小量，根据 $\sin x\sim x$，$x+\sin x\sim2x$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3(x\to0)$可知

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{(x_{n-1}+\sin x_{n-1})\cdot\frac{1}{6}x_{n-1}^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6x_{n-1}}{x_{n-1}+\sin x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{1+\frac{\sin x_{n-1}}{x_{n-1}}}=3,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

本节练习

1. 设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{2(1+x_n)}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

*2. 设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{a+x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$,讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性,并在收敛时求出其极限.

3. 设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

*5. 设 $x_0=a,x_1=b,x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})(n=2,3,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设 $\alpha>0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}$.

*7. 设 $0<x_1<1,x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

8. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1<b_1)$,

(1) 令 $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $n=1,2,\cdots$;(2) 令 $a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot b_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $n=1,2,\cdots$;

分别证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

第二节　函数极限

◆ **核心概念:函数极限**

统一形式:$\lim f(x)=A\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0$,∃时刻,从此时刻以后,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.(见下表)

过程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时刻	N	X		
从此时刻以后	$n>N$	$\|x\|>X$	$x>X$	$x<-X$
$f(x)$	$\|f(n)-A\|<\varepsilon$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$		

过程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时刻	δ		
从此时刻以后	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$		

注:1. 数列可以看作整标函数 $x_n=f(n)$(自变量取正整数);

2. "$\varepsilon-\delta$"式定义的邻域式描述——$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in U^o(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$；

3. "$\varepsilon-X$"式定义的邻域式描述——$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x\in U(\infty,X)$ 时，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$（$U(\infty,X)$ 为 ∞ 的邻域，表示区间 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$，类似地，$U(+\infty,X)=(X,+\infty)$ 和 $U(-\infty,X)=(-\infty,X)$ 分别为 $+\infty,-\infty$ 的邻域）；

4. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；（分段函数在分段点，某些函数如 $\arctan\dfrac{1}{x}$，$e^{\frac{1}{x}}$，$\dfrac{\sin|x|}{x}$ 等在 $x=0$ 处，需要计算左右极限）

5. $\lim f(x)=\infty(+\infty,-\infty)\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists$ 时刻，从此时刻以后，恒有 $|f(x)|>M$（$f(x)>M,f(x)<-M$）；

6. 否定说法：

(1) 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不收敛于 $A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1\in U^o(x_0,\delta)$，使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$ 及不等于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $\forall n$，$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛于 $A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x_1\in U(\infty,X)$，使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$ 及数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 且 $\forall n$，$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

(2) 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall A\in\mathbf{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1\in U^o(x_0,\delta)$，使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$ 及不等于 x_0 的数列 $\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(2)}=x_0$ 且 $\forall n$，$|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geqslant\varepsilon_0$；

当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall A\in\mathbf{R},\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x_1\in U(\infty,X)$，使得 $|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$ 及数列 $\{x_n^{(1)}\},\{x_n^{(2)}\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(2)}=\infty$ 且 $\forall n$，$|f(x_n^{(1)})-f(x_n^{(2)})|\geqslant\varepsilon_0$.

◆ 函数极限的性质与相关定理

1. 唯一性：若某过程中函数 $f(x)$ 有极限，则极限值唯一.

2. 局部有界性：若某过程中函数 $f(x)$ 收敛，则 $f(x)$ 在该过程的局部邻域内有界，所谓的局部邻域包括——

(1) $U^o(x_0,\delta)$（$x\to x_0$ 时），(2) $(x_0-\delta,x_0)$（$x\to x_0^-$ 时），(3) $(x_0,x_0+\delta)$（$x\to x_0^+$ 时），

(4) $U(\infty,X)$（$x\to\infty$ 时），(5) $U(-\infty,X)$（$x\to-\infty$ 时），(6) $U(+\infty,X)$（$x\to+\infty$ 时）；

3. 局部保号性与局部保序性：不同的极限过程中，分别在 2(1)—(6) 的邻域内满足保号性和保序性；（与数列极限的性质类似，此处从略）

4. 四则运算性：在同一过程中，两个收敛函数的和、差、积、商仍然收敛，且和函数、差函数、积函数、商函数的极限分别为两个函数极限的和、差、积、商（作商时要求分母及其极限不为零）.

5. 迫敛性：类似于数列极限的迫敛性，熟练运用函数不等式.

6. 单调有界准则：单侧邻域内单调有界的函数其单侧极限一定存在（双侧邻域内单调有界的函数只能得出其两个单侧极限一定存在，并不能得出双侧极限存在）.

7. Cauchy 收敛准则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在（有限）$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 $\forall x_1,x_2\in U^o(x_0,\delta)$，有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$;

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在(有限)$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0$,对$\forall x_1,x_2\in U(\infty,X)$,有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$;

(Cauchy 准则给出的极限存在且有限的充要条件,无穷大量不满足 Cauchy 准则)

8. 等价无穷小代换:对于积或商中的无穷小因子,可以替换为其等价无穷小.

常用的等价无穷小:$x\to 0$ 时
$\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$,$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$
$e^x-1\sim\ln(1+x)\sim x$,$(1+x)^a-1\sim ax$,$\alpha(x)+o(\alpha(x))\sim\alpha(x)$($\alpha(x)$为无穷小量)

注:(1) 上述中的 x 可以换为任意的非零无穷小量.

(2) 公式 $\alpha(x)+o(\alpha(x))\sim\alpha(x)$说明和或差因式中的高阶无穷小量可忽略.

(3) 对于无穷大,建议通过取倒数、变量替换等方法化为无穷小之后再进行等价替换.

9. 罗必达法则:对于分式型的极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$,若满足(i)为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式;(ii)分子分母均在极限过程中的某邻域内可导;(iii)分子分母分别求导后 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

注:(1) 其他形式的未定式,必须先通过代数变形化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式(对于幂指型的未定式 $1^\infty,\infty^0,0^0$,一般通过取对数的方法化为分式的形式),然后使用罗必达法则;

(2) 使用罗必达法则(特别是连续使用时),要验证条件(i)(ii)(iii);

(3) 罗必达法则与其他求极限方法(代数恒等变形、等价无穷小替换、Taylor 展开式等)结合使用效果更好,此外注意求极限过程中可以先析出积或商中极限非零的因子(简化求导);

(4) 对于$\frac{\infty}{\infty}$型,罗必达法则可以推广到$\frac{*}{\infty}$型(只需要保证分母为无穷大).

10. Peano 型余项 Taylor 公式:求极限时可以将复杂函数展开为带余项 $o(x^n)$的多项式,大大简化极限的计算,需要注意的问题有:

(1) 在何处展开——对于 $x\to x_0$ 时的极限,当然是在 x_0 处展开,若为 $x\to\infty$时的极限,可以通过变量替换 $t=\frac{1}{x}$化为 $t\to 0$;

(2) 展开的阶数——若分子或分母中有一方的阶数确定(例如 k 阶),则另一方只需要展开到同样阶数(即出现 $o(x^k)$).

例题精讲

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解:$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$,

由于$\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0.$

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

解：$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n=\exp(\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\pi\sqrt{1+4n^2})=\exp(\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\pi(\sqrt{1+4n^2}-2n))$

$=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}.$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

$=\exp(\lim\limits_{x\to\infty}((x+a)\ln(x+a)+(x+b)\ln(x+b)-(2x+a+b)\ln(x+a+b)))$

$=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left((x+a)\ln\dfrac{x+a}{x+a+b}+(x+b)\ln\dfrac{x+b}{x+a+b}\right)\right)$

$=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{(x+a)b}{x+a+b}-\dfrac{(x+b)a}{x+a+b}\right)\right)=e^{-(a+b)}.$

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}.$

例 5 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cos2x\cos3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，求常数 a,n.

解：当 $x\to0$ 时，有

$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，$\cos2x=1-\dfrac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$，$\cos3x=1-\dfrac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)=1-\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2)$，

所以 $1-\cos x\cos2x\cos3x=1-(1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2))(1-2x^2+o(x^2))(1-\dfrac{9}{2}x^2+o(x^2))=7x^2+o(x^2)$，

由于 $1-\cos x\cos2x\cos3x$ 与 ax^n 是等价无穷小，所以 $a=7,n=2$.

***例 6** 设函数 $f(x)$ 定义在 $(a,+\infty)$，$f(x)$ 在任意的有限区间内有界且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_1>a$，当 $x\geqslant X_1$ 时，