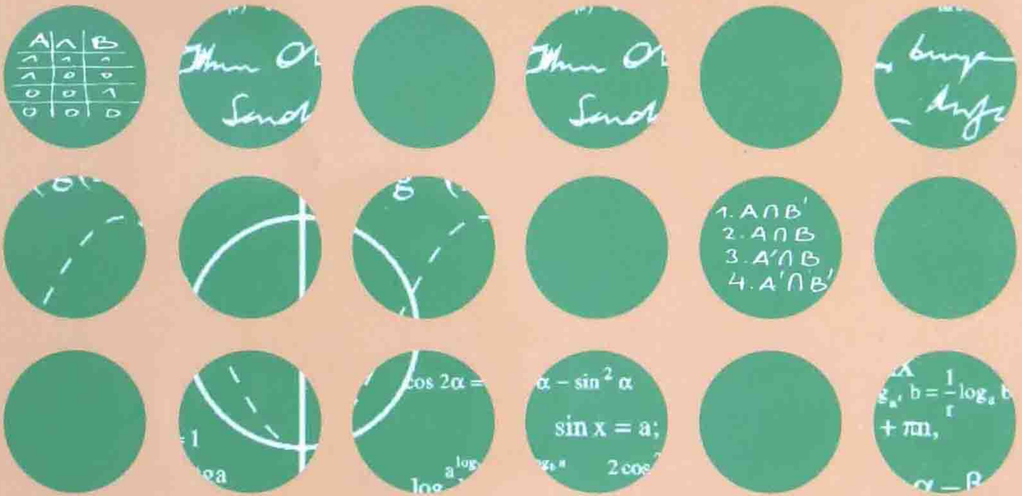

线性代数

主　编　贾　茗　夏　飞　张　勤
副主编　张　芳　范伟平　马　林　刘春生
主　审　魏许青

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

线性代数

主　审　魏许青
主　编　贾　茗　夏　飞　张　勤
副主编　张　芳　范伟平　马　林　刘春生
编　委　马　林　刘迪芬　刘春生　张　芳
张　勤　范伟平　郑彭丹　贾　茗
夏　飞　黄政龙　曹玉芬　谭岳武
潘一格　魏许青

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/贾茗,夏飞,张勤主编.—长沙:中南大学出版社,2014.6
ISBN 978-7-5487-1084-4

Ⅰ.线... Ⅱ.①贾...②夏...③张... Ⅲ.线性代数
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 106861 号

线性代数

贾茗 夏飞 张勤 主编

□责任编辑 谢贵良
□责任印制 易红卫
□出版发行 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-88876770 传真:0731-88710482
□印 装 长沙印通印刷有限公司

□开 本 720×1000 B5 □印张 11.5 □字数 287 千字
□版 次 2015 年 1 月第 1 版 □2015 年 1 月第 1 次印刷
□书 号 ISBN 978-7-5487-1084-4
□定 价 23.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

前　言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类相关专业的一门重要基础课。从广义的角度看，线性代数研究线性科学中的“线性问题”。直观地讲，对所考虑的变量来讲，和式中各项次数最高为一次的问题就是线性问题。即使是大量出现的非线性问题有时也可以转换成线性问题进行处理，如在一定条件下，曲线可用直线近似，曲面可用平面近似，函数增量可用函数的微分近似。

矩阵和向量是重要的代数工具。线性问题的讨论往往涉及矩阵和向量。线性代数的主要内容分别是线性方程组、向量空间、矩阵代数，以及与线性变换密切相关的方阵的特征值和二次型等。

在编写过程中，编者充分注意了授课对象的已有基础和非数学专业学生学习数学主要是为了用好数学的实际情况，力求概念准确、清楚、应用范围明确，使用方法及过程清晰，可操作性强。书中省略了一些较难的数学证明，但列举了大量的应用例题。这对读者理解和正确使用线性代数的方法应该会有一些帮助。

本书每章后面均有一定数量习题并附有答案，以供读者复习和消化，验证课本知识 。

本书由贾茗老师提供初稿并进行了统稿，第 1 章、第 2 章由贾茗老师编写，第 3 章、第 4 章(3、4 节)由张芳老师编写，第 4 章(1、2 节)由曹玉芬老师编写，第 4 章(第 5 节)、第 5 章由张勤老师编写，第 6 章、第 7 章(4、5 节)由夏飞老师编写，第 7 章(1、2、3 节)由范伟平老师编写，魏许青教授认真审阅了全书，提出了很多宝贵的意见。

本书在编写的过程中参考了众多的国内外教材。得到了中南林业科技大学涉外学院向春阶院长、何立新副院长、教务部余波主任、理工系彭沛夫主任的大力支持与帮助，这些工作为保证本书质量起到了重要作用。谨在此对本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促。书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，使本书在教学过程中得到不断地完善。

编　者

2014 年 3 月

目 录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　行列式

线性代数是一门重要的基础课，解方程组是代数中的基本问题，在中学代数中，主要求解一元一次方程、二元一次方程组和三元一次方程组，而在线性代数中，推广到了求解 n 元一次方程组，即线性方程组的求解．线性方程组在线性代数中是最基本也是最重要的内容．

如今，由于计算机和计算软件的发展，虽然在常见的高阶行列式的计算中，行列式的数值意义已经不大．但是，行列式公式在本课程中是研究后面的线性方程组、矩阵、向量组的线性相关性和方阵的特征值、特征向量的重要工具．本章引进行列式，它是研究线性方程组的重要工具．余下几章，则引进矩阵和向量等工具来讨论线性方程组的解．

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法．此外还介绍用 n 阶行列式求解 n 元 n 个方程的线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

§1.1　n 阶行列式的定义

一、二阶行列式

定义 1.1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

通常记作 D，其值是一个数.

其中，数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素(简称元)**，行列式的横排叫**行**，竖排叫**列**，第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素位于第 j 列．

二阶行列式的运算可用**对角线法则**表示：二阶行列式等于位于行列式的**主对角线**(从左上角到右下角的连线)上的两个元 a_{11}，a_{22} 的乘积，减去位于**副对

角线（从右上角到左下角的连线）上两个元 a_{12}，a_{21} 的乘积所得的差，如图 1.1 所示．

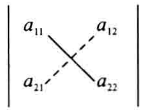

图 1.1

例如 行列式$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-1\times(-2)=14.$

二、二元线性方程组

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

可以采用**消元法**．为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

类似地，可以消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

利用二阶行列式的定义，式(1.2)中 x_1、x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么式(1.2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母 D 是由方程组(1.1)的系数构成的，称之为式(1.1)的系数行列式，而 $D_i(i=1,2)$ 是 D 的第 i 列，由式(1.1)的右端常数项替代而得，称之为**第 i 替代行列式**．由于二阶行列式定义的引入，式(1.1)的解的表达式更容易记忆和理解.

例 1.1　求解二元线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\2x_1\ \ +x_2=1.\end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2\\1&1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&12\\2&1\end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此，

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{21}{7}=-3.$$

三、三阶行列式和三元线性方程组

定义 1.2　称由 $3^2=9$ 个数组成的 3 行 3 列 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，其中

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

上述定义的计算式中，共 6 项的代数和，其中每项均是位于不同行不同列的三个元素的乘积再冠以符号．其规律遵循如图 1.2 所示的**对角线法则**，即三阶行列式的值等于各实线上三个元素乘积之和减去各虚线上三个元素乘积之和所得之差．

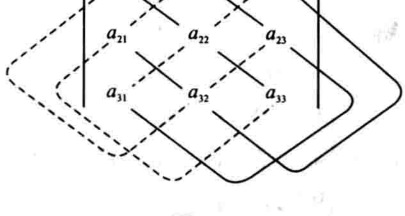

图 1.2

例 1.2　利用对角线法则，计算下列三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则

$$\begin{aligned} D=&2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-0\times1\times3\\ &-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)=-24+8+16-4=-4 \end{aligned}$$

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

若系数行列式 $D\neq0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.3 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3=3, \\ 9x_1-3x_2+x_3=28. \end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-20\neq0$，$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 28 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-40$，

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 28 & 1 \end{vmatrix}=60,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & -3 & 28 \end{vmatrix}=-20.$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-40}{-20}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{60}{-20}=-3,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-20}{-20}=1.$$

注：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式．为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关全排列的知识，然后引出 n 阶行列式的概念．

四、全排列与逆序

在给出 n 阶行列式的定义之前，先观察一下三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.3}$$

从中可以看出，三阶行列式定义的特征：

(1) 共有 $3!=6$ 项相加，其结果是一个数；

(2) 每项有 3 个数相乘：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，而每个数取自不同行不同列，即行下标固定为 123，列下标则是 123 的某个排列 $j_1j_2j_3$；

(3) 每一项乘积前，都有一个符号．

那么，正负号是由什么决定的呢？为说明这点，先来看一点全排列的知识．

定义 1.3　由 n 个自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 **n 级全排列（简称 n 级排列）**．

例如　1234 和 2431 都是 4 级排列，而 45321 是一个 5 级排列．

显然，n 级排列共有 $n!$ 个．其中 $12\cdots n$ 这个排列具有自然顺序，称之为**标准排列**．

定义 1.4　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，如果一个较大的数排在一个较小的数之前，即若 $i_t>i_s$，则称这两个数 i_t，i_s 构成一个**逆序**．一个 n 级排列中所有逆序的总数，称为该**排列的逆序数**，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 或 τ．

根据逆序的定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，比 $i_t(t=1, 2, \cdots, n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数．即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 1.4 计算排列 45321 的逆序数.

解法一 因为 4 排在首位，故其逆序数为 0；

比 5 大且排在 5 前面的数有 0 个，故逆序数为 0；

比 3 大且排在 3 前面的数有 2 个，故逆序数为 2；

比 2 大且排在 2 前面的数有 3 个，故逆序数为 3；

比 1 大且排在 1 前面的数有 4 个，故逆序数为 4.

可见所求排列的逆序数为

$$\tau(45321)=0+0+2+3+4=9.$$

解法二 排列 45321 中，43，42，41，53，52，51，32，31，21 是逆序，共 9 个逆序. 故所求排列的逆序数 $\tau=9$.

定义 1.5 如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为奇数，则称它为**奇排列**；若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为偶数，则称它为**偶排列**.

例如 2431 是偶排列，45321 是奇排列；标准排列 $12\cdots n$ 的逆序数是 0，因此是偶排列.

那么 1，2，3 可以有多少种不同的排列呢？一一列出，共有 6 种：123，312，231，321，132，213. 经计算，前三个排列的逆序数是 0，2，2，为偶排列，后三个排列的逆序数是 3，1，1，为奇排列.

在式(1.3)中各项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中行下标为 1，2，3，是标准次序，列下标 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的排列，因此，三阶行列式的公式中各项所带的正负号与列下标排列的逆序数有关，当列下标的逆序数为奇数时，此项前的符号为负，当列下标的逆序数为偶数时，此项前的符号为正，因此，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，τ 为列下标排列的逆序数. 类似可得 n 阶行列式的定义.

五、n 阶行列式的定义

定义 1.6 设有 n^2 个数所构成的含有 n 行 n 列的形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，它表示一个数值，记作 D，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \qquad (*)$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和．行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$，这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的**一般项**．

n 阶行列式定义具有三个特点：

(1) 由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个，所以 $(*)$ 式共有 $n!$ 项；

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项前的符号是：当该项行标按标准次序排列后，列标组成的排列为偶（奇）排列，则取正（负）号．

注：当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆．

定理 1.1　一个排列中任意两个元素对换，排列奇偶性改变.

可以用一个具体的例子来说明这个定理. 例如，排列 2347165，将 4 与 7 对换（称之为相邻对换）得排列 2374165，原逆序数为 $0+0+0+0+4+1+2=7$，对换后逆序数为 $0+0+0+1+4+1+2=8$，奇排列变为偶排列. 如将 4 与 6 对换得 2367145，实际上后者是经过一系列相邻对换

$$2347165\to2374165\to2371465\to2371645\to2376145\to2367145$$

而得到的，共经过了 $5=2\times a+1$ 次相邻对换（其中 a 为 4 与 6 之间元素的个数）. 每一次相邻对换，奇偶性都要改变，奇数次相邻对换后，奇偶性必改变.

由定理 1.1，可以得到行列式的另一个定义.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{1j_2}\cdots a_{1j_n},$$

其中 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然排列，τ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 对换元素 a_{pj_p} 与 a_{qj_q} 成

$$(-1)^{\tau}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{1j_n},$$

这一项的值不变，而行标和列标排列均发生了变化，原行标排列为 $1\cdots p\cdots q\cdots n$，逆序数为 0，原列标排列为 $j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n$，逆序数为 τ；新行标排列为 $1\cdots q\cdots p\cdots n$，逆序数为 r（由定理 1.1，r 为奇数），新列标排列为 $j_1\cdots j_q\cdots j_p\cdots j_n$，逆序数为 τ_1，由定理 1.1 有

$$(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}=(-1)^{r}(-1)^{\tau_1}=(-1)^{r+\tau_1}=(-1)^{\tau+0}.$$

于是，对换两个元素后，行列标逆序数之和的奇偶性并不改变. 经过多次对换也是如此. 因此，经过有限次对换后，使

$$(-1)^{\tau}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{s}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

此时列标为标准排列，s 为行排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数. 因此，行列式的定义也可写为

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{s}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 1.5　用行列式定义证明行列式(其中非副对角线上的元素全为0).

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证　根据 n 阶行列式的定义易得

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\,1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

上例中行列式，其非副对角线上元素全为0，此类行列式可以直接求出结果.

例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4\,3\,2\,1)}1\times 2\times 3\times 4=24.$$

例 1.6　计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考虑不为零的项.

a_{nj_n}取自第 n 行，但只有 $a_{nn}\neq 0$，故只能取 $j_n=n$；$a_{n-1\,j_{n-1}}$取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1\,n-1}\neq 0$，$a_{n-1\,n}\neq 0$，由于 a_{nn}取自第 n 列，故 $a_{n-1\,j_{n-1}}$不能取自第 n 列，所以 $j_{n-1}=n-1$；

同理可得，$j_{n-2}=n-2$，$\cdots$，$j_2=2$，$j_1=1$.

所以不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(1,2,\cdots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注：一般地，我们有如下结论

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & a_{2\,n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

类似地，非主对角线上元素全为0的行列式称为**对角行列式**. 显然对角行列式的值为主对角线上元素的乘积，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

主对角线以下(上)的元素全为0的行列式称为**上(下)三角行列式**，它的值与对角行列式的值一样.

即 $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§1.2　行列式的性质

用定义计算行列式只适合于零元素特别多的行列式的计算. 对于一般的高

阶行列式，显然用定义去计算比较麻烦．本节介绍行列式的性质，并进一步讨论利用这些性质去计算高阶行列式，可以大大简化行列式的运算．

一、行列式的性质

定义 1.7 已知 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将其行变成相应的列（第 i 行变成第 i 列，$i=1, 2, \cdots, n$）得到新的行列式，称作行列式 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}，其中

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，按行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

例如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=24，而 D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}=24.$$

性质 1 说明，在行列式中，行与列的地位是对等的，也即是对行成立的性质对列也同样成立，因此下面的讨论我们只需对行进行讨论即可．

性质 2 互换行列式两行(列)，行列式变号．

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} = -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设 t_1 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数，所以 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$. 故

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{t_1} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} = -D. \end{aligned}$$

注：交换 i, j 两行(列)记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2，而\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$$

例 1.7　已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=12$，求行列式 $D=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ 的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com