

张宇



CLASSIC

考研数学题源探析

经典1000题

(习题分册·数学一)

1000
EXERCISES
MATHS
Mr. Zhang

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



张宇
▶

CLASSIC

考研数学题源探析

经典 1000 题

(习题分册·数学一)

张宇 主编

编委 (按姓氏拼音顺序): 蔡燧林 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一 (笔名)

于吉霞 曾凡 (笔名) 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 习题分册. 数学一 / 张宇主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2015. 3

ISBN 978-7-5682-0258-9

I. ① 张… II. ① 张… III. ① 高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ① O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030358 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市文阁印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 7.5

字 数 / 162 千字

版 次 / 2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 次印刷

定 价 / 49.80 元(共 2 册)

责任编辑/ 高 芳

文案编辑/ 胡 莹

责任校对/ 周瑞红

责任印制/ 边心超

· 前言 ·

P R E F A C E

在2016版《张宇考研数学题源探析经典1000题》(以下简称《数学1000题》)出版之际,作为主编,我想讲三件事。

第一,2015年的考研真题,我总结,体现出“三个继续”的特点,那就是:继续重视基础知识的考查,继续加强计算能力的考查,继续保持足够的大纲覆盖面。这体现了命题的高层次和成熟度——不必追求过高的技巧,就能够很好地考查考生的数学素养。这本《数学1000题》在2015年的考研中,再次证明了她的价值——追根溯源。在大量“原汁原味”的试题的训练下,足以提高考生的数学解题能力并达到甚至超过考研时应有的应试能力,再加上“碰巧”猜到了原题,锦上添花。

第二,2016版的《数学1000题》,全面修订了以前版本中的瑕疵,补充了若干最新的优秀题源试题,体现出最新的命题思路和成果,并将试题和答案分开独立成册,便于读者阅读、测试、核对答案。总之,这些工作都是为了让读者更好地使用这本习题集。

第三,我再次提醒各位,不要畏难。这本书中的题目,都是我们千方百计从命题专家那里和各种渠道精心挑选和编制的优秀考题,自然有一些甚至不少难题。遇到难题,有能力独立完成那是最好,如果暂时能力达不到,看着答案学习,开阔眼界和思路,当然也是一种好的学习过程,也会很快提高。读者若能够在使用本书的过程中,保持好心态,就能够发挥这本书最大的效用。

希望读者认真阅读后面我与你谈的“做数学题的学问”。



2015年春 于北京

巩固所学 见多识广

——与读者谈谈做数学题的学问

本书是一本考研数学习题集. 看完教材, 学完知识, 就要做题. 做题有学问吗? 请读者认真阅读这个前言, 尤其是下面的“五”.

一、题海战术?

曾经有文化媒体的记者问我: 你是否同意“题海战术”? 我对此问题感到两难. 其一, 如果我说同意, 便会遭到批判——现在都讲素质教育, 你怎么还让学生陷于题海之中? 只会做题, 搞得呆头呆脑; 其二, 如果我说不同意, 那便违背了我的真实想法——不做题, 怎么能够把书本上的数学知识内化为自己的本领? 面对两难, 如何作答?

我与读者讲, 当你和别人针锋相对时, 不要与其争辩甚至争吵, 争来争去, 最终谁也说服不了谁. 怎么办? 提高自己回答问题的“档次”, 将他尖锐的问题化解掉——于是, 我当时回答: 你这个问题本身就有问题, 莫说让考研的学生做几个月的数学题, 就是让他们做整整一年的数学题, 也不能叫题“海”, 最多就是个题“河”, 其实基本上就是个题“沟”, 所以, 实事求是地说, 我们应该叫“题沟战术”. 记者朋友听后大笑. 这个回答, 既能够低调处理问题, 避免争论, 也能够道出我的观点: 几百道、上千道题目, 算不上题海. 事实上, 我们不用形成题目的汪洋大海, 只需有针对性地、高质量地填满一个题目的小水沟, 就足以应对考研数学了.

这本《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》就是为了实现上面这个切合实际的目标而编写的.

二、考研数学好题的标准

本书命制或者挑选的题目坚持的标准是“好题”. 什么是考研数学的好题? 我认为要具备以下三点:

(1) **经典性** 所谓经典性是指试题能够恰当、精准地考查考研数学的重要知识点和基本思想方法;

(2) **针对性** 所谓针对性是指试题能够与考研无缝接轨, 与考研出题的风格、特点和难度达到高度一致;

(3) **预测性** 所谓预测性是指试题能够对即将到来的考研有预测性. 我们承认做题的目的是为了巩固和加强对知识点的认识和理解、学会解题, 但同时, 如果能够起到预测未来方向的作用, 则会锦上添花.

三、考研数学题源探析

根据以上三点, 本书精心命制和整合了大约 1000 道考研数学复习的题目, 其主要来源是:

(1) **与考研数学命题密切相关的重要资料**. 这里包括考研数学命题前的全国征题、部分考研命题的备考题(所谓考研数学 B 卷考题)、命题人退下来以后命制的题目、某些全国大学数学教学基地的

考试题库等,这些题一般会综合了多个知识点,有一定的难度和区分度。

(2)前苏联、全国、各省市大学生数学竞赛试题的改编题。对经典的大学数学竞赛题如何进行改编,使其适合考研的风格和特点,这既是对未来考题的预测(因为这些竞赛题中有很多题目是“潜在的考试题”),也是本书的一大特色。试题改编是颇费一番周折的,本书中一些重要题目后的“注”,看似题外之话,但是字斟句酌、涵义深刻,请读者仔细品味,必会有所收获。当然,基于竞赛基础,这些题一般也会是综合题,难度高、区分度大。

(3)作者在一线教学中编写和积累的经典题目。这里,有些题目考查的是非常重要的基础知识,有些题目考查的是学生易错的、易混淆的知识,还有些题目,本应是在课堂上讲授给学生的,但是无奈于课堂时间有限,很多精彩的好题没有机会在课上详细解释,也将此选编到本书中,供学生课后巩固所学、增长见识之用。同时也给没有上我的课程的读者提供一个有价值的习题资料。这里的题目除了有一定难度的综合题外,还有些简单题,难度不高,但对学生的区分是明显的。

四、本书的重大改动说明

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题与阅卷、考研数学大纲的编写与修订、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定、部分重点高校(如清华大学、中国人民大学、北京理工大学、浙江大学等)相关教材的编写和审定等,这些工作对于本书的形成具有重要意义。

本书最初的版本中,收录了1987年到1999年的考研真题,这部分内容现在已经放到《张宇考研数学真题大全解》那本书里去了,这样更加合理。于是,读者看到的这本书,事实上是做了**重大改动**的:删去的真题原本占了书中题目的大部分篇幅,现在补充进来的题目占到全部题目的70%左右,可以说把作者“压箱底的宝贝”基本都拿出来了。

在北京理工大学出版社的大力支持下,作者将这本书奉献给读者,供考研研究生的读者和有志于提高大学数学水平的读者们参考。

五、本书使用说明

首先,我非常希望读者懂得做习题集的科学的态度。做习题集有两个目的:一是巩固所学,二是见多识广。所谓巩固所学,读者很容易明白,就是在已经读教材、读例题后,通过演算同例题类似的习题这种重复性劳动,加强对所学知识的认识,加深对所使用方法的理解。但是,所谓见多识广,有些读者好像不会正确应对。数学题的形式,浩瀚无垠,千变万化,即使在一定的范围内(当然我们这里就是指在考研大纲的范围内),想要做到无所不能,也绝非易事。所以,适当地演算一些从未见过的难题、新题,不仅可以查漏补缺,更能够增长见识,提高解题能力和数学素养,这是做习题集的重要目的。听者有心,这本习题集中的题目,希望读者不管一开始会与不会,都要好好努力去做,然后结合答案搞清搞透,最终达到巩固所学、见多识广的目的。

接下来,有一个技术问题需要告诉读者。作为一本习题集,可以采用“**知识分类、先易后难**”的原则来进行题目安排,大部分习题集也确实是这样安排的。所谓知识分类,是指把考查同一知识点的题目集中在一起,比如从第1题到第10题,考查知识点甲,从第10题到第20题,考查知识点乙,以此类推。所谓先易后难,是指按照从简单到复杂、从考查单一知识到考查综合能力的顺序来安排题目,比如考查知识点甲的第1题到第10题,一般是第1题最好做,越往后越难,到了第10题,难度最大。听起来,这个原则很科学。

然而,本书不采用上述原则。为什么?第一,“知识分类”会使得这部分题目对读者有明显的提示——你既然知道这一部分都是考知识点甲的,那便很容易找到问题的突破口,题目的难度会大大

降低——试想,考研数学的试卷上会告诉你这个题目是考查知识点甲的吗?第二,“先易后难”好像符合人们思考、训练的习惯,但是,这也恰恰不符合考研数学命题的题目安排顺序——考研数学试卷上有两个变化无常:一是高等数学、线性代数、概率论与数理统计放在一张卷子上考,二是题目难度顺序有时难,有时易,难度可以说是“波浪式”的——所以,习题集如果按照“先易后难”的传统习惯,显然与考研数学命题与应考的实际背道而驰。

综上所述,从考研实战的角度出发,为了使考生能够在平时的训练中就逐渐适应考研数学试卷的风格,作者依据“知识相对混编、难易变化无常”的原则来进行题目安排:第一,出几个考知识点甲的题目,突然就换到几个考知识点乙、知识点丙的题目,然后还可能再跳回考知识点甲的题目,不出现明显的提示;第二,也许最开始的题目就很难,中间有简单题,再往后做题又会碰到难题,难度“此起彼伏”。作者用心良苦,希望考生保持实战演练的状态,这样才能更好地使用本书,发挥它的最大作用。

对于习题集的使用,我建议读者:把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去,总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,在没有任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?“干干净净”的习题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把习题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角。

感谢从命题组中退下来的老专家们,他们功底深厚、德高望重,给予了作者诸多帮助,为本书增色不少。感谢家人们,他们中的大多数并不懂书中的内容,可是他们懂得它对我 and 学生的意义。

张宇

2014年1月 于北京

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	拟出版时间	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2015 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2015 年 3 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了超过 1000 道高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,知识相对混编,难易变化无常,利于考生复习过程中保持实战演练的状态.原命题组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2015 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题(1987—2015),给读者提供原汁原味的实考题.原命题组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2015 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2015 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组长与命题成员参与.

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 <http://weibo.com/yuntubook/>

张宇新浪微博:@宇哥考研 <http://weibo.com/zhangyumaths/>

· 目录 ·

C O N T E N T S

第一篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续 (3)

- 一、选择题 (3)
- 二、填空题 (4)
- 三、解答题 (5)

第 2 章 一元函数微分学 (8)

- 一、选择题 (8)
- 二、填空题 (12)
- 三、解答题 (13)

第 3 章 一元函数积分学 (18)

- 一、选择题 (18)
- 二、填空题 (20)
- 三、解答题 (22)

第 4 章 向量代数与空间解析几何 (29)

- 一、选择题 (29)
- 二、填空题 (32)
- 三、解答题 (33)

第 5 章 多元函数微分学 (35)

- 一、选择题 (35)
- 二、填空题 (37)
- 三、解答题 (37)

第 6 章 多元函数积分学 (41)

- 一、选择题 (41)
- 二、填空题 (45)
- 三、解答题 (46)

第 7 章 无穷级数 (53)

- 一、选择题 (53)
- 二、填空题 (55)
- 三、解答题 (56)

第 8 章 常微分方程 (59)

- 一、选择题 (59)
- 二、填空题 (60)
- 三、解答题 (61)

第二篇 线性代数

- 一、选择题 (67)
- 二、填空题 (75)
- 三、解答题 (79)

第三篇 概率论与数理统计

- 一、选择题 (93)
- 二、填空题 (97)
- 三、解答题 (101)

第一篇

高等数学



第1章 函数、极限、连续

一、选择题(在目前的考研中,选择题是4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 以下3个命题,

- ① 若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A ,则其任意子数列 $\{u_{n_i}\}$ 必定收敛于 A ;
- ② 若单调数列 $\{x_n\}$ 的某一子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A ,则该数列必定收敛于 A ;
- ③ 若数列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 都收敛于 A ,则数列 $\{x_n\}$ 必定收敛于 A .

正确的个数为 ()

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

1.2. 设 $f(x)$ 是偶函数, $\varphi(x)$ 是奇函数,则下列函数(假设都有意义)中,是奇函数的是 ()

- (A) $f(\varphi(x))$ (B) $f(f(x))$ (C) $\varphi(f(x))$ (D) $\varphi(\varphi(x))$

1.3. 设 $f(x) = \sin(\cos x)$, $\varphi(x) = \cos(\sin x)$,则在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 ()

- (A) $f(x)$ 是增函数, $\varphi(x)$ 是减函数 (B) $f(x), \varphi(x)$ 都是减函数
(C) $f(x)$ 是减函数, $\varphi(x)$ 是增函数 (D) $f(x), \varphi(x)$ 都是增函数

1.4. 设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x) = f_1[f_1(x)]$, $f_{k+1}(x) = f_1[f_k(x)]$, $k = 1, 2, \dots$,则当 $n > 1$

时, $f_n(x) =$ ()

- (A) $\frac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$ (B) $\frac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$ (C) $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

1.5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于 ()

- (A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$
(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

1.6. 设 $f(x) = u(x) + v(x)$, $g(x) = u(x) - v(x)$,并设 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$ 都不存在,下列论

断正确的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必不存在 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在

1.7. 两个无穷小比较的结果是 ()

- (A) 同阶 (B) 高阶 (C) 低阶 (D) 不确定

1.8. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()

- (A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 (B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
(C) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大 (D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在

1.9. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = A \neq 0$ 的充要条件是 ()

- (A) $\alpha > 1$ (B) $\alpha \neq 1$ (C) $\alpha > 0$ (D) 与 α 无关

1.10. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大, 则下述结论正确的是 ()

- (A) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小
(B) 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x)$ 不是无穷小, 则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小
(C) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必是无穷大
(D) 设在 $x = x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界, 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.11. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 则在点 x_0 处必定间断的函数为 ()

- (A) $f(x)\sin x$ (B) $f(x) + \sin x$ (C) $f^2(x)$ (D) $|f(x)|$

1.12. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小 ($\beta(x) \neq 0$), 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, 下列表达式中不一定为无穷小的是 ()

- (A) $\frac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$ (B) $\alpha^2(x) + \beta^3(x) \cdot \cos \frac{1}{x}$
(C) $\ln[1 + \alpha(x) \cdot \beta^2(x)]$ (D) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$

1.13. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1.14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$ (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

1.15. 若 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\lambda - e^{-kx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则 ()

- (A) $\lambda < 0, k < 0$ (B) $\lambda < 0, k > 0$ (C) $\lambda \geq 0, k < 0$ (D) $\lambda \leq 0, k > 0$

1.16. 设 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

- (A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
(B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.17. 设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有 ()

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点 (B) 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点
(C) 2 个可去间断点 (D) 2 个无穷间断点

1.18. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调有界, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内间断点的类型只能是 ()

- (A) 第一类间断点 (B) 第二类间断点
(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点 (D) 结论不确定

二、填空题 (在目前的考研中, 填空题是 4 分 / 题, 请将答案填在题中的横线上.)

1.19. 设 $f(x)$ 是奇函数, 且对一切 x 有 $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 又 $f(1) = a, a$ 为常数, n 为整数, 则 $f(n) =$ _____.

1.20. 对充分大的一切 x , 以下 5 个函数: 100^x , $\log_{10} x^{100}$, e^{10x} , $x^{10^{10}}$, $e^{\frac{1}{100}x^2}$, 最大的是_____.

1.21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.

1.22. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) =$ _____.

1.23. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^a} = \beta > 0$, 则 a, β 的值为_____.

1.24. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $\ln \frac{1-ax^2}{1+ax^2} \sim \frac{1}{10\,000}x^4 + \sin^2(\sqrt{6}x)$, 则 $a =$ _____.

1.25. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若有 $\ln\left(\cos \frac{2x}{3}\right) \sim Ax^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.26. 当 $x \rightarrow \pi$ 时, 若有 $\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 \sim A(x-\pi)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

1.27. 若 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x > 0, \\ 2x + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____.

1.28. 已知数列 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} =$ _____.

三、解答题 (在目前的考研中, 解答题包括计算题、应用题和证明题, 平均 10 分 / 题.)

1.29. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & x \leq 0, \\ x^2 - 1, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.30. (1) 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的表达式, $x \geq 0$; (2) 讨论 $f(x)$ 的连续性.

1.31. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.32. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\tan x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right)^n \left(a \neq \frac{1}{2} \right);$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x \sin^2 x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)};$$

$$(8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2};$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1 + ax) \right] (a \neq 0);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{x}{1+\ln x}};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\tan x};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)};$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]};$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}};$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x};$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}.$$

1.33. 设 $f(x) = x^2 + ax + b$, 证明: $|f(1)|, |f(3)|, |f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.34. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$.

1.35. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

1.36. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

1.37. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

1.38. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.39. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})}$.

1.40. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1.41. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, \text{ 且 } a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots, n, n \geq 2$.

1.42. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right), a > 0$.

1.43. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin x} \right)}{a^x - 1} = A (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

1.44. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = \frac{x - \arctan(x-1) - 1}{(x-1)^3} + 2x^2 e^{x-1} \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 求 $f(x)$.

1.45. 设 $f(x)$ 是三次多项式, 且有 $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{f(x)}{x-2a} = \lim_{x \rightarrow 4a} \frac{f(x)}{x-4a} = 1 (a \neq 0)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 3a} \frac{f(x)}{x-3a}$.

1.46. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta - (n-1)^\beta} = 10$, 试求 α, β 的值.

1.47. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有 $f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$, 并求常数 A, B .

1.48. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.49. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6} \right]$.

1.50. 数列 $\{x_n\}$ 通项 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.51. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \cdots)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求其极限值.

1.52. 设 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.53. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 那么 $\{x_n y_n\}$ 是否一定发散? 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散, 那么 $\{x_n y_n\}$ 的敛散性又将如何?

1.54. 分段函数一定不是初等函数,若正确,试证之;若不正确,试说明它们之间的关系?

1.55. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right]$.

1.56. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right]$.

1.57. 利用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{k(k+1)}{2}$.

1.58. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数连续,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + x^2 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$. 试求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 以及极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

1.59. 计算 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

1.60. 设 $a > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right), n = 1, 2, \cdots$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

1.61. 试讨论函数 $g(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ e^x + \beta, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

1.62. 求函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x^2-1}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点,并判断它们的类型.

1.63. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{nx}}$, 求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

1.64. 设函数 $f(x)$ 连续可导,且 $f(0) = 0, F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.65. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + (x^2 - 1) \sin ax}{x^n + x^2 - 1}$, 为了使 $f(x)$ 对一切 x 都连续, 求常数 a 的最小正值.

1.66. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x < 0. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点的类型,如是可去间断点,则补充或改变定义使它连续.

1.67. 设 $f(x; t) = \left(\frac{x-1}{t-1} \right)^{\frac{t}{t-1}} ((x-1)(t-1) > 0, x \neq t)$, 函数 $f(x)$ 由下列表达式确定,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(x; t),$$

求出 $f(x)$ 的连续区间和间断点,并研究 $f(x)$ 在间断点处的左右极限.

1.68. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是 $[a, b]$ 上一个点列, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}$.

1.69. 设函数 $f(x)$ 在 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) = x^{\sin x}$, 其他的 x 满足关系式 $f(x) + k = 2f(x+1)$, 试求常数 k 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

1.70. 设 $f(x)$ 对一切 x_1, x_2 满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 证明: 函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.