大学生热门考试必备用书馆配经典系列

大学生热门考试必备用书馆配经典系列
——考研数学十年真题解析
（数一数三适用）（上）

全国考研数学配套教材专家委员会

高等教育出版社

大学生热门考试必备用书馆配经典系列
——考研数学十年真题解析（数一数三适用）（上）

全国考研数学配套教材专家委员会

Daxuesheng Remen Kaoshi Bibei Yongshu Guanpei Jingdian Xilie
——Kaoyan Shuxue Shinian Zhenti jiexi (Shuyi Shusan Shiyong) (Shang)

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题解析:全2册/全国考研数学配套教材专家委员会编.--北京:高等教育出版社,2015.3
(大学生热门考试必备用书馆配经典系列)
数一数三适用
ISBN 978-7-04-042286-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第037736号

策划编辑	柳秀丽	责任编辑	张耀明	封面设计	赵 阳	版式设计	范晓红
责任校对	殷 然	责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市骏杰印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	13.5	版 次	2015年3月第1版
字 数	320千字	印 次	2015年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	总 定 价	50.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 42286-00

目　录

第一部分 高等数学

第一部分 高等数学

第一章　函数、极限、连续

本章重点考查的内容是无穷小量的概念和无穷小量“阶”的比较.

1. 无穷小量概念及其比较

(1)(1301)已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq0$,则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)(0901)当 $x\to0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3)(0701)当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

(4)(0407)把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$, $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$, $\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

注:

(1301)前两位数表示试卷的年份,后两位数表示题号,即2013年试卷的第1题,若(0917)即表示2009年试卷的17题.其余类似.

解题思路与解题方法

无穷小量的判定应根据定义,而两个无穷小量的比较是求它们比的极限.

1. 两个高阶无穷小量有如下的运算法则:

设 m,n 为正整数,则

(1) 加减时,低阶无穷小“吸收”高阶无穷小,即

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),\ l=\min(m,n).$$

(2) 乘法时,阶数“相加”,即

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),\ x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}).$$

(3) 非零常数不影响阶数,即

$$o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m)\ (k\neq0).$$

2. 两个高阶无穷小量的比较,根据不同的极限类型,有以下两个不同的原则:

(1)“上下同阶”原则,适用于“$\frac{A}{B}$”型.

具体来说,如果分子(或分母)是 x 的 k 次方,在利用泰勒公式将分母(或分子)展开时,应保留到 x 的 k 次方,此方法可称为“上下同阶”原则. 例如

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{泰勒公式}}\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(2)“幂次最低”原则,适用于“$A-B$”型.

具体来说,即将 A 与 B 展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂即可.

例如当 $x\to0$ 时,$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小量,求 a 和 b.

利用泰勒公式得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]$$
$$=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\sim-\frac{1}{12}x^4,$$

所以 $a=-\frac{1}{12},b=4$.

解答 **(1)答:**选(D).

考点:利用麦克劳林公式讨论极限.

解法1 因为 $c\neq0$,且当 $x\to0$ 时,$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$,从而 $x-\arctan x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$,又

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^k}=c,$$

所以 $k=3,c=\frac{1}{3}$.

解法2
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{kx^{k-3}}=c,$$

则有 $k=3,c=\frac{1}{3}$.

(2)答:选(A).

考点:函数等价无穷小的概念以及函数极限的计算,使用的工具是泰勒公式.

解 由题意,本题可以等价描述为:已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,求参数 a,b.

对上式分母使用等价无穷小替换,则 $x^2\ln(1-bx)\sim-bx^3$,

由于分母是三阶无穷小,根据"上下同阶"原则对上式分子使用泰勒公式,当 $x\to0$ 时,$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$,则

$$x-\sin ax=x-ax+\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)=(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3),$$

于是,$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1$,

立即得到 $a=1,b=-\frac{1}{6}$.

错误防范:如果本题改为计算题(此时分值要提高).

已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,求 a 与 b 的值.

考生如果先用等价代换,再用洛必达法则,会出现无法求得 a,b 的情况:

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{\text{分母等价}}\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\\&\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}\\&\xlongequal{\text{洛法(或等价)}}\lim_{x\to0}\frac{a^3\cos ax}{-6b}=1,\end{aligned}$$

只能得到 $a^3=-6b$ 而无法求得 a 和 b 的值.

因此建议考生在极限计算中尽可能地用好泰勒公式,这是个档次高,效率高的好方法(一定要注意"上下同阶"原则).

(3) 答:选(B).

考点:几个重要的等价无穷小量,洛必达法则求极限.

解法1　排除法. 当 $x\to0^+$ 时,$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$,$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$,不选(A)、(C)、(D),所以选(B).

解法2　直接验证法. 当 $x\to0^+$,$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$,选(B).

解法3　洛必达法则验算.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)=1,$$

选(B).

(4) 答:选(B).

考点:无穷小量的比较、变限积分求导.

解　因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\ \tan x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x\sqrt{x})}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x\sqrt{x})}=+\infty,$$

所以排列次序为 α,γ,β,故选项(B)正确.

2. 连续与间断点

函数在一点处的连续与间断,2004—2013 年的 10 年试题中均未涉及此类题型,但在本书后面的章节和考试内容中多次用到这两个概念. 希望读者能熟悉并掌握,以利于后面的考试需要.

第二章　一元函数微分学

一元函数微分学是高等数学的基础，导数及其四则运算，复合函数和隐函数的求导是必考内容之一，很多都属于容易题，是得分率比较高的题型，导数的应用也是必考内容，多数属于容易题，而未定式极限的求法是常见题型，属于中等难度题，中等难度题目约占试卷的 80%. 考生必须熟练掌握，中值定理的题目属于较难题型，在研究生这类选拔性考试中经常出现的试题，望广大考生引起重视.

1. 导数及其运算

（1）（1309）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=$ ________.

（2）（1311）设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

（3）（1202）设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　（B）$(-1)^n(n-1)!$.　（C）$(-1)^{n-1}n!$.　（D）$(-1)^n n!$.

（4）（1009）设 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t},\\ y=\int_0^t\ln(1+u^2)\,\mathrm{d}u,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

（5）（0704）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

（A）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　（B）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

（C）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　（D）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

（6）（0607）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

（A）$0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　（B）$0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

（C）$\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　（D）$\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

（7）（0507）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

（A）处处可导.　（B）恰有一个不可导点.

（C）恰有两个不可导点.　（D）至少有三个不可导点.

（8）（0402）已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ________.

解题思路与解题方法

这部分内容主要考查基本概念与基本运算. 属于常见题型.

函数在一点可导的定义有以下的“结构式”

$$\lim_{\square\to0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}\xlongequal{\text{极限存在}}f'(x_0),$$

式中的方块"□"为 Δx 或 Δx 的函数，且当 $\Delta x\to 0$ 时，必有□→0，只要符合上面的结构式，其极限值亦为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数.

在导数的运算中一定要注意复合函数的求导过程中的中间变量，这是至关重要的！

在多个函数连乘积的求导中要注意题目的特点，从中发现规律.

解答 (1) 答：填1.

考点：导数的定义与隐函数求导.

解题思路：所求极限一定是"$\infty\cdot 0$"的未定式，因此要化为"$\frac{0}{0}$"型，注意到 $x=0$ 时，$y=1$，则有

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}\xlongequal{f(0)=1}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$$

$$\xlongequal{\text{导数定义}} f'(0)=y'(0).$$

解 当 $x=0$ 时，$y=1$，将方程两端对 x 求导，有 $y'-1=(1-y)e^{x(1-y)}$，故 $y'(0)=1$，从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=y'(0)=1.$$

(2) 答：填 $\sqrt{2}$.

考点：参数方程确定的函数求导法.

解 $\frac{dx}{dt}=\cos t$，$\frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$，从而 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=t$.

又 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos t}$. 从而 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

错误防范：本题最容易犯的错误是求二阶导数时容易将次序颠倒，如果考生注意到 $\frac{dy}{dx}=\varphi(t)$ 时，那么记住 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\varphi(t))=\frac{d\varphi(t)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ 就肯定不容易出错！

(3) 答：选(A).

考点：导数的概念及其运算法则.

解法1 由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$$

$$=1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故选(A).

解法 2　利用求导法则,即先求 $f'(x)$ 为

$$f'(x)=e^x[(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)]+(e^x-1)[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]',$$

代入 $x=0$ 仍可得出上述结果.

(4) 答:填 0.

考点:参数方程确定的函数与变限定积分函数的求导法.

解法 1　因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=e^{2t}\left[\frac{2t}{1+t^2}+\ln(1+t^2)\right],$$

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0.$

解法 2　由已知得 $y=\int_0^{-\ln x}\ln(1+u^2)\,du$,所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}\ln(1+\ln^2x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left[\ln(1+\ln^2x)-\frac{2\ln x}{1+\ln^2x}\right],$$

又当 $t=0$ 时,$x=1$,所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0.$

(5) 答:选(D).

考点:利用给定极限的存在性讨论与此有关的另一极限的存在性,连续、可导的定义.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

对于(A),由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,于是

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=0,$$

所以命题(A)正确.

对于(B),同理有 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=0$,即有 $f(0)+f(-0)=0$,故 $f(0)=0$,命题(B)正确.

对于(C),由导数定义,有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$,由(C)之条件知 $f'(0)$ 存在,故命题(C)亦正确.

对于(D),设 $f(x)=|x|$,满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$,但 $f'(0)$ 不存在.

故命题(D)不正确,选(D).

(6) 答:选(A).

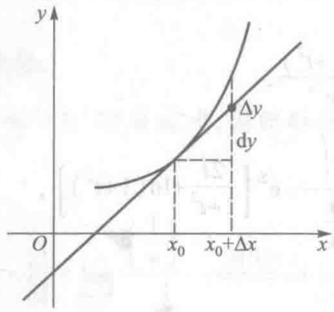
考点:函数的增量与微分的大小关系.

解法1　用带有拉格朗日型余项的一阶泰勒公式：

$$\Delta y-\mathrm{d}y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x$$
$$=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(\Delta x)^2>0.$$

又由 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$. 选(A).

解法2　画(草)图.



解法3　由于是选择题，所以可举符合题设条件的函数，例如设 $f(x)=x^2$，在 $x_0=1$ 处，显然有 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

错误防范：在画函数曲线的草图时，很容易忽略了曲线的凹凸而导致错误.

(7) 答：选(C).

考点：极限运算、函数在一点可导的概念、导数与左、右导数的关系.

解　当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3$；

于是 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$

只需考虑 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 的可导性. 由于

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=-3,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0.$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处均不可导，即有两个不可导点，故选项(C)正确.

注：

① 几何直观更明显.

② 当 a,b 都是正数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$，且结论对有限个的情况也成立.

(8) 答：填 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

考点:复合函数求导法,不定积分.

解 令 $e^x=t$,由 $f'(e^x)=xe^{-x}$ 得

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t},$$

所以 $$f(t)=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C.$$

由已知 $f(1)=0$ 得 $C=0$. 所以

$$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

2. 中值定理

(1)(1318)设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(2)(0918)(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$;

(Ⅱ)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)$ $(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(3)(0818)设 $f(x)$ 是连续函数,

(Ⅰ)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$;

(Ⅱ)当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\,dt-x\int_0^2 f(t)\,dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(4)(0719)设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(5)(0518)已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

解题思路与解题方法

利用中值定理证明中值问题的题目是考研的难点之一. 其关键是构造一个符合已知条件的辅助函数. 由于构造辅助函数的方法比较多,也比较灵活,不易掌握. 根据笔者的经验,建议考生可根据试题的不同要求做如下考虑:

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在,可考虑用罗尔定理,尽量用原来的函数构造辅助函数.

(2) 如果题目中涉及中值的是两个不同的函数,可考虑用柯西中值定理.

(3) 若题目的结构中含有两个或两个以上的中值,必须考虑多次用罗尔定理或其他中值定理.

(4) 若题目的结论中是中值处的二阶或二阶以上的导数,一般情况下至少要二次使用罗尔定理.

(5) 为便于考生掌握辅助函数的构造,**特介绍简捷、有效的"直接构造法"和"常数变易法"**(详见本内容解答后面的附录).