高等学校教材

线性代数

主编　杨凤藻

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主编　杨凤藻

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是参照最新基本要求编写而成，内容包括：行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等，书末还附有部分习题答案。

本书可作为高等学校理工科各专业线性代数课程的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 杨凤藻主编. - -北京 : 高等教育出版社，2015.2

ISBN 978 -7 -04 -042067 -8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 024001 号

策划编辑 张长虹 责任编辑 张长虹 特约编辑 张 卫 封面设计 张 志
版式设计 马敬茹 责任校对 孟 玲 责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400 - 810 - 0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华润印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	10	版　　次	2015 年 2 月第 1 版
字　　数	170 千字	印　　次	2015 年 2 月第 1 次印刷
购书热线	010 - 58581118	定　　价	18.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 42067 - 00

前　言

本书是参照最新基本要求,结合新形势下大学数学教学理念和教学方法编写而成的。编者均为多年从事线性代数课程教学及教学研究的教师,有着丰富的教学经验。本书保持了工科类线性代数固有的系统性、逻辑性,力求做到基本概念的叙述深入浅出、基本定理的证明简明易懂、基本方法的介绍详实到位。另外,对部分难度较大的基础理论,不作严密证明,强调基本概念和运算的训练,加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法,对例题的选择力求典型性和应用性,适当增加线性代数在工程计算中的应用案例和实验。

本书具体有以下特色:

1. 在内容上增加了第六章线性空间与线性变换,供对线性代数要求较高的学生学习;部分章后增加了 MATLAB 在线性代数中的应用内容,便于学生使用计算机做一些线性代数中的复杂运算。

2. 为了便于学生自学,在次序安排上通过简单例子来导出结论,使各部分内容的出现平缓。例如,在矩阵的秩的介绍上,先通过向量组的秩的学习来解决矩阵的秩,这样安排使矩阵的秩的出现更自然、更容易理解。

3. 对习题配置作了大幅度的改革。为使读者能更好地掌握和巩固所学知识,全书增加了课后习题的题量,书中每节都配有 A、B 两类习题,其中 A 类为基础题,建议读者全部完成,B 类为扩展提高题,供读者有选择地完成,以更好地满足不同层次的读者学习线性代数的需求。

本书第一章、第二章由詹金龙编写,第三章由戴琳编写,第四章、第五章由陈秀华、杨凤藻编写,第六章由胡兴凯编写,MATLAB 的应用由李金海编写,最后由杨凤藻、詹金龙、戴琳共同对全书进行了系统的统稿和定稿。

本书于 2014 年列入昆明理工大学“十二五”规划教材,编写工作得到了学校项目资助,同时还得到昆明理工大学教务处、高等教育出版社的大力支持,我校教师马凤兴、吴劲鹏等参加了教材录入工作,在此表示感谢!

鉴于水平有限,书中不足之处在所难免,敬请广大读者批评、指正。

编者

2014 年 11 月

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章 行 列 式

行列式是线性代数的基础理论，主要用于研究线性方程组问题. 本章介绍行列式的定义、性质、计算方法以及求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

第一节 行列式的定义

本节作为线性代数第一章的开篇，首先引入 2 阶与 3 阶行列式的概念，进而归纳总结出 n 阶行列式的定义.

一、2 阶与 3 阶行列式

1. 2 阶行列式

2 阶行列式记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

它是 2^2 个数的算式，其结果是一数值，定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为 D 的**元素**，简称(i,j)**元**. 前一下标 i 表示 a_{ij} 在 D 中位于第 i 行，即**行标**；后一下标 j 表示 a_{ij} 在 D 中位于第 j 列，即**列标**.

2 阶行列式可用于求解 2 元线性方程组.

设有 2 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.3}$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则(1.3)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\tag{1.4}$$

其中分母 D 是由方程组(1.2)中未知量 x_1,x_2 的系数所确定的 2 阶行列式,x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21}所得的 2 阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22}所得的 2 阶行列式.

例 1 求解 2 元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\2x_1+x_2=1.\end{cases}$$

解 公式(1.4)中各 2 阶行列式如下:

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=3\times1-(-2)\times2=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2\\1&1\end{vmatrix}=12\times1-(-2)\times1=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&12\\2&1\end{vmatrix}=3\times1-12\times2=-21,$$

从而方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-3.$$

2. 3 阶行列式

3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

是 3^2 个数的算式,其结果仍是一数值,定义为

$$\begin{aligned}D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).\end{aligned}\tag{1.5}$$

为方便记忆,可借助 2 阶行列式将 3 阶行列式写成

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

引入记号

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13},$$

则 3 阶行列式可表示为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{1.6}$$

例 2　计算 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix}x&2&3\\3&x&1\\2&1&x\end{vmatrix}.$$

解　依公式(1.6),有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}x&2&3\\3&x&1\\2&1&x\end{vmatrix}&=x\begin{vmatrix}x&1\\1&x\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&1\\2&x\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3&x\\2&1\end{vmatrix}\\&=x(x^2-1)-2(3x-2)+3(3-2x)\\&=x^3-13x+13.\end{aligned}$$

从公式(1.1)和(1.5)可看出,2 阶行列式的算式中共有 2! 项,3 阶行列式的算式中共有 3! 项,每项都是不同行不同列的元素之积,且带正负号的项各占一半.

公式(1.6)的意义在于将 3 阶行列式化成 2 阶行列式计算. 换言之,就是用 2 阶行列式来定义 3 阶行列式,这种思想可用于定义更高阶的行列式.

二、n 阶行列式

n 阶行列式可以用不同的方法定义,本书采用递归法来定义,即用 $n-1$ 阶行列式定义 n 阶行列式. 为此,先引入余子式和代数余子式的概念.

n 阶行列式记作

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 D_n 的元素或(i,j)元. 将 D_n 中 a_{ij}所在的第 i 行和第 j

列划去,余下元素按原次序构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij};而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

之中(2,3)元 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

定义 n **阶行列式**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是 n^2 个数的算式,其结果是一数值 D_n,规定为:

(1) $n=1$ 时,$D_1=|a_{11}|=a_{11}$;

(2) $n\geqslant 2$ 时,$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$,

其中 A_{1j} 是元素 a_{1j} 的代数余子式($j=1,2,\cdots,n$).

一言以蔽之,n 阶行列式($n\geqslant 2$)等于第一行的元素与对应代数余子式的乘积之和.

需注意的是,1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,切勿与绝对值符号相混淆.

用归纳法不难证明,$n\geqslant 2$ 时,n 阶行列式的算式中共有 $n!$ 项,每项都是不同行不同列的 n 个元素之积,且带正负号的项各占一半.

行列式中从左上(下)角到右下(上)角的对角线称为**主(副)对角线**,主(副)对角线上的元素简称**主(副)对角元**.特别,主对角线以下(上)的元素全为 0 的行列式称为**上(下)三角形行列式**,主对角线以外的元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**.

例 3 证明 n 阶对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中主对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，未写出元素都是0.

证　用归纳法证之. $n=1$ 时结论显然成立，假定结论对 $n-1$ 阶对角行列式成立，再来证 n 阶的情形.

由定义即得

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\lambda_1\begin{vmatrix}\lambda_2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{vmatrix}.$$

依归纳假设，$n-1$ 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_2&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

因此 $D_n=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.　证毕

简言之，对角行列式等于主对角元的乘积. 同理可证，下三角行列式也等于主对角元的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\ *&-2&0\\ *&*&-3\end{vmatrix}=1\times(-2)\times(-3)=6,$$

其中“ * ”表示任一数.

值得注意的是，归纳法只能用于证明与正整数 n 有关的命题，步骤如下：

(1) 验证 n 取定值 n_0（比如 $n_0=1$）时命题成立；

(2) 假设命题对 $n=k(k\geqslant n_0)$ 成立，由此证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

完成以上两步，就证明了命题对所有 $n\geqslant n_0$ 都成立.

例 4　证明 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}&&&&\lambda_n\\&&&\lambda_{n-1}&\\&&⋰&&\\&\lambda_2&&&\\\lambda_1&&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

其中副对角元是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n$，未写出元素全为 0(类似情形以后不再重申).

证 用递推法证之. 根据定义，有

$$D_n=\lambda_n(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & \lambda_{n-1}\\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \lambda_2 & & \\ \lambda_1 & & & \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\lambda_nD_{n-1},$$

即

$$D_n=(-1)^{n-1}\lambda_nD_{n-1}.$$

依次递推可得

$$D_{n-1}=(-1)^{n-2}\lambda_{n-1}D_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_2=(-1)^1\lambda_2D_1=(-1)^1\lambda_2\lambda_1,$$

所以

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^1\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1.\end{aligned}$$

证毕

一般说来，直接用定义计算行列式比较困难. 为简化行列式的计算，下面介绍行列式的性质.

第二节 行列式的性质

本节不加证明地给出行列式的若干性质，而将重点放在对性质的理解和应用方面.

性质 1 行列式的行列依次互换，即第 i 行变成第 i 列($i=1,2,\cdots,n$)，则行列式不变.

特别地，下三角形行列式的行列依次互换即得上三角形行列式，反之亦然. 由此可见，上三角形行列式仍等于主对角元的乘积. 例如

$$\begin{vmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&2&0\\5&6&3\end{vmatrix}=1\times2\times3=6.$$

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是同等的. 因此凡对行成立的结论，对列也同样成立.

性质 2 n 阶行列式($n\geqslant2$)等于任一行的元素与对应代数余子式的乘积之

和,即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{2.1}$$

根据性质 1,n 阶行列式($n \geqslant 2$)也等于任一列的元素与对应代数余子式的乘积之和,即

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{2.2}$$

公式(2.1)或(2.2)称为**行列式按第 i 行或第 j 列的展开式**.应用时,可根据具体情形按某行(列)展开.

例如按行展开,则有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 7A_{31} + 8A_{32} + 9A_{33}.$$

类似地,也可写出按列的展开式.

例 1　求 3 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

解　D 中第 2 行有两个元素 $a_{22} = a_{23} = 0$,利用公式(2.1),按第 2 行展开易得

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{21}A_{21} = 4 \times (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 16.$$

性质 3　用数 k 乘以行列式的某行(列)的所有元素,等于用 k 乘以行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 4kA_{21} + 5kA_{22} + 6kA_{23}$$

$$= k(4A_{21} + 5A_{22} + 6A_{23}) = k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

即
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

换种说法,则有:

行列式中某行(列)的公因子可提到行列式符号之外.

特别地,

某行(列)的元素全为 0 的行列式等于零.

性质 4 若行列式中有两行(列)的元素对应相等,则行列式为零.

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

综合性质 3 和性质 4,即得:

行列式中有两行(列)成比例时,行列式等于零.

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 5 若行列式中第 i 行(列)的每个元素都是两个数之和,则行列式可分解为两个行列式相加,且这两个行列式中除第 i 行(列)之外,其余行(列)全与原行列式对应行(列)相同.

例如
$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (a_1+b_1)A_{21} + (a_2+b_2)A_{22} + (a_3+b_3)A_{23} \\ &= (a_1A_{21} + a_2A_{22} + a_3A_{23}) + (b_1A_{21} + b_2A_{22} + b_3A_{23}) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

即
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

例 2 计算 3 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\101&98&103\end{vmatrix}.$$

解　利用性质 5,可得

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\100+1&100-2&100+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\100&100&100\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\1&-2&3\end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=100\left(\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&3\\1&1\end{vmatrix}\right)=100(-2-3)=-500.$$

性质 6　行列式中某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应元素上,行列式不变.

事实上,

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4+k&5+2k&6+3k\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\k&2k&3k\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4+k&5+2k&6+3k\\7&8&9\end{vmatrix}.$$

性质 6 的主要作用在于化简行列式. 例如

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&4&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4+k_1&4+2k_1&6+3k_1\\7+k_2&8+2k_2&9+3k_2\end{vmatrix},$$

取 $k_1=-4, k_2=-7$,则有

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&4&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-4&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}=(-2)\times(-6)\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}.$$

性质 7　行列式中两行(列)对换,行列式变号.

例如

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&8&9\\1&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}.$$

性质 8　n 阶行列式($n\geqslant 2$)中某行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j);\tag{2.3}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).\tag{2.4}$$

综合性质 2 和性质 8,可得以下两个重要公式:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j,\\0, & i\neq j;\end{cases}\tag{2.5}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j,\\0, & i\neq j,\end{cases}\tag{2.6}$$

其中 $n\geqslant 2,\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$

例 3 设 A_{1j}为 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

之中元素 a_{1j}的代数余子式($j=1,2,3$),则有

$$1A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix},$$

$$4A_{11}+5A_{12}+6A_{13}=\begin{vmatrix}4&5&6\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0,$$

$$7A_{11}+8A_{12}+9A_{13}=\begin{vmatrix}7&8&9\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=0.$$

例 4 已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43},A_{44}+A_{45}$,其中 A_{4j}为 D_5 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式($j=1,2,3,4,5$).

解 由条件及公式(2.5)易知

$$\begin{cases}(A_{41}+A_{42}+A_{43})+2(A_{44}+A_{45})=27,\\2(A_{41}+A_{42}+A_{43})+(A_{44}+A_{45})=0,\end{cases}$$

解得　　$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9, A_{44}+A_{45}=18.$

第三节　行列式的计算

一般来说,直接用定义计算3阶以上行列式比较麻烦.下面运用行列式的性质,根据行列式的特点,将其化简成更容易计算的形式.

为方便起见,用 $r_i(c_i)$ 表示行列式的第 i 行(列).上一节性质7、性质3、性质6介绍了行列式的三种运算,用记号可写成:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$:第 i 行(列)与第 j 行(列)对换;

(2) $r_i \times k(c_i \times k)$:第 i 行(列)乘以常数 k;

(3) $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$:第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列),

其中运算 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 非常有用,可将行列式中许多元素化为零,但要注意以下两点:

(1) $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 不能写作 $kr_j + r_i(kc_j + c_i)$;

(2) $r_i + r_j(c_i + c_j)$ 与 $r_j + r_i(c_j + c_i)$ 是不一样的.

例1　计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \end{vmatrix}.$$

解法一　将 D 化成上三角形行列式计算.

$$D\xlongequal[r_4-2r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_4+r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_4}3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-2r_3}3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

实际上,仅用运算 $r_i + kr_j$ 或 $c_i + kc_j$,就可把任一行列式化简为三角形行列式(思考题).

解法二　将 D 降阶计算.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com