普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主编 李 源

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　李　源

副主编　李友宝　马　锐

刘　萍　朱　敏

编　者　（按姓氏拼音排序）

陈　丹　关　莉　郝小枝

刘　萍　李　源　李伟东

李友宝　张怀雄　朱　敏

高等学校大学数学教学研究与发展中心项目研究成果

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是高等学校大学数学教学研究与发展中心项目"应用型本科院校理工类高等数学课程的教学内容改革与创新能力的培养"的研究成果．本书力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂．在教材内容的组织上强调数学概念与实际问题的联系，注重数学史与数学文化内容的渗透，以期提高学生的科学素养和应用数学的意识和能力．书中有较多的例题和习题，便于自学，每章所配的总练习题大多来源于近年考研数学的真题，有利于优秀学生课后学习和提高训练．全书分上、下册．本书为下册，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共5章，并附有二、三阶行列式简介和习题答案与提示．

本书可作为高等学校理工类本科专业的高等数学教材，也可供广大教师和工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／李源主编．—北京：科学出版社，2015

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-043298-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 026358 号

责任编辑：李淑丽　滕亚帆／责任校对：朱光兰

责任印制：霍　兵／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015 年 3 月第 一 版　开本：787×1092　1/16

2015 年 3 月第一次印刷　印张：18 3/4

字数：450 000

定价：40.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序　言

恩格斯曾经说过“在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分学的发明那样被看作人类精神的最高胜利了”. 微积分的重要性可见一斑. 作为高等学校理工科学生进行学习和研究工作最基本的工具之一，没有微积分的支撑，计算理论、软件开发、工程分析等领域的工作都将一筹莫展. 这门基础学科对于培养新型复合型人才起着至关重要的作用，因为无论什么科研结论都需要数据的支撑，而高等数学是数据分析的最基本工具之一.

要学好高等数学，一本合适的教材是非常必要的. 虽然目前可供选用的高等数学教材很多，但这些教材的水平参差不齐. 近年来，随着中学数学课程改革工程的推进和实施，高等学校生源层次更加多样化，而大学微积分的教学内容却少有变化，另外教学课时数的压缩对教学内容安排的要求越发严苛. 为了缓解这些方面的矛盾，保证高等数学课程的教学质量，编写一本适合当前教学的理工类高等数学教材是尤为必要的.

本教材是高等学校大学数学教学研究与发展中心项目“应用型本科院校理工类高等数学课程的教学内容改革与创新能力的培养”的研究成果之一. 参加本教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师. 在本书的编写中，他们融入了多年来积累的丰富教学实践经验，紧扣高等数学教学的本质，对微积分的知识点进行了系统详尽的梳理，对教学内容和结构体系进行了合理安排，用大量的心血完成了教材的编写. 教材内容由浅入深，理论严谨，逻辑清晰，叙述明确简练；注重数学与实际问题的联系，对每一个重要的结论，都列举了很多几何、物理、经济、生物、体育、生命科学、医学、信息科学等方面的实际例子，以便使得学生可以更加深入地理解数学理论，使得学生更能意识到数学的实际用处；书中不时穿插数学史与数学文化，这不仅增加了教材的趣味性与可读性，还可以提高学生的数学素养；此外，本书的编者对例题和习题的挑选匠心独运，以期使学生能更快更好地理解和掌握书中的概念和方法，并能够培养学生的创新思维和动手能力.

总而言之，这是一本难度与深度有机统一、具有较高参考价值的高等数学教材. 相信本书的出版，将以其特色为新时期理工类高等数学课程教学质量的提高作出积极的贡献.

唐年胜

2013 年 8 月

前　言

高等数学是理工类非数学专业最重要的一门学科基础课程，对培养面向21世纪的复合型应用人才起着至关重要的作用。随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，尤其是2004年高中施行新课改以来，高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况.现阶段大学数学教育正面临着生源层次多样化与教学内容单一的矛盾、教学课时减少与教学内容增加的矛盾等一系列问题.为此，根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要，参照教育部数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，参考《2013年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，并结合编者多年教学实践的经验，本着推陈出新、锐意改革的宗旨，编写了这套高等数学教材.

本书是高等学校大学数学教学研究与发展中心项目“应用型本科院校理工类高等数学课程的教学内容改革与创新能力的培养”的研究成果之一.我们始终坚持高等数学教学不仅仅是讲授基础数学知识、为各专业的后继课程提供工具，更重要的是在课程中传授现代数学思想，培养科学创新意识，增强应用数学的意识和能力.为此，我们在教材的编写过程中，作了一些改革的尝试，力求使本书体现以下特点.

(1)紧扣课程本质，选择合理的教学内容和结构体系.教材内容在深度和广度上完全符合工科类本科数学基础课程教学基本要求，在内容安排上注意与中学数学教学内容的衔接，由浅入深，符合认知规律，力求做到理论严谨、逻辑清晰、叙述明确简练.

(2)注重突出强调数学概念与实际问题的联系，重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。对每一重要的概念都以实际问题为背景，将数学建模思想融入其中；对每一重要结果都举出应用实例，应用的范围也不仅仅局限在几何、物理方面，而扩大到经济、生物、体育、生命科学、医学、信息科学等学科领域，使学生感到学数学有用，从而激发学生利用数学方法解决实际问题的意识、兴趣和能力.

(3)注重数学史与数学文化在课程教学内容中的渗透。在保证教材内容连贯的同时，适时加入了部分数学史与数学文化的内容，这些内容有的以脚注的方式给出，有的以阅读材料的形式呈现。不仅增加了教材的趣味性和可读性，也希望对提高学生的数学素养、文化素养和科学精神有一些帮助.

(4)精选例题和习题，基础与提高共存。考虑到当前工科类专业对高等数学的教学提出了更高的要求，也考虑到近年越来越多的本科生对于报考硕士研究生继续深造的愿望日益强烈，在例题和习题的选择上适当融入了考研数学的一些问题和方法。例题选择做到少而精，重在代表性，重在对概念的理解掌握和思维方法的培养。教材习题配置做到数量适宜、难度合理、循序渐进，每节后配有的习题是基本题，是对课程的基本要求；每章所设的总练习题是提高题，是为学有余力的学生准备的.其中的大部分题目是我们从近10年的考研数学真题中选出的优秀试题，并按照(A)(B)组设置了难易梯度，力求通过这些习题加深和拓广教材内容，帮助学生提高综合运用所学知识的能力，同时也为教师开展分层次教学、研究性

教学提供良好的素材.

全书分上、下册,上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程,下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等. 为适应不同专业、不同学时、不同对象的教学需要,有些内容在标题上加了“ * ”号,教师可根据情况适时进行删减.

本书由李源担任主编,李友宝、马锐(云南财经大学)、刘萍、朱敏担任副主编,参加本书编写工作的有郝小枝(云南中医学院,第 1 章)、李源(第 2～4,9 章)、朱敏(第 5,6 章)、刘萍(第 7,12 章)、关莉(第 8 章)、陈丹(第 10 章)、李友宝(第 11 章的曲线积分部分)、张怀雄(第 11 章的曲面积分部分),最后由李源、李友宝、马锐负责统稿、定稿.

在本书的编写过程中,得到了云南大学数学与统计学院和教务处的大力支持和帮助,特别是云南大学数学与统计学院教授委员会主任李耀堂教授审阅了原稿,并提出了不少宝贵的意见和建议.

最后,要感谢云南大学数学与统计学院院长唐年胜教授,他为本书的编写提出了很多有益的建议和修改意见,并为之作序增色。

由于编者学识水平所限,书中难免有不妥之处,敬请同行专家和读者提出宝贵意见,使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2013 年 6 月

目　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何[①]是多元函数微积分的基础，在解决某些实际问题时也会直接用到它. 解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何，空间解析几何是平面解析几何的推广. 向量代数是研究空间解析几何的有力工具，利用它能够把空间的几何结构有系统的代数化、数量化.

本章先介绍向量的概念和运算，然后讨论空间平面和直线方程的建立，最后介绍常见的空间曲面.

8.1　空间直角坐标系

8.1.1　空间点的直角坐标

如果在平面上建立直角坐标系 xOy，则平面上任一点的位置就可以用一个有序数组 (x,y) 来确定. 因此为了确定空间中一点的位置，首先需要建立空间直角坐标系.

在空间中取定一点 O，以 O 为公共原点作三条相互垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，这就构成了一个**空间直角坐标系**，记作 $Oxyz$. 点 O 称为**坐标原点**；数轴 Ox，Oy，Oz 分别简称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称**坐标轴**. 坐标轴的正向通常构成右手系，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向（图 8-1）.

任意两条坐标轴可以确定一个平面，其中 x 轴与 y 轴确定的平面记为 xOy 面，y 轴与 z 轴确定的平面记为 yOz 面，z 轴和 x 轴确定的平面记为 zOx 面，这三个平面统称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**. 含有三个坐标轴正向的卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面上方的 4 个卦限依逆时针顺序分别为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限. 在 xOy 平面下方，与Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限相对的分别为Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限（图 8-2）.

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间的点与有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过点 M 作垂直于 3 个坐标轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P，Q，R，这三点在坐标轴上的坐标依次为 x，y，z（图 8-3），于是空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z).

---

① 几何学是最古老的数学分支之一，起源于古埃及尼罗河畔的土地丈量，我国西周时期也有勾三股四弦五的记载，发展到古希腊柏拉图时代至顶峰. 欧几里得将几何知识整理成《几何原本》，共 13 卷，给出了 465 个命题、5 个公理、5 个公设，形成了比较严谨的逻辑体系. 该书以手抄本形式流传了 1700 多年，以各国文字出版了 1000 多版，成为出版次数最多的个人专著，至今仍被人们作为几何学的教科书. 随着文艺复兴时期代数学的迅速发展，几何学开始与代数学结合起来，其关键在于笛卡儿坐标系的建立（1506 年）. 恩格斯评价说：数学中的转折点是笛卡儿坐标，有了它，运动进入了数学，辩证法进入了数学，微积分也有必要了. 在欧拉等的开拓下，几何学与数学分析结合起来，发展成为一门独立的学科——解析几何学. 进而又产生了射影几何学，罗氏几何学，分形几何学，微分几何学等几何分支.

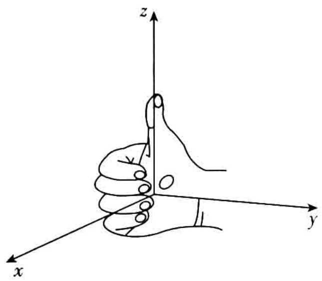

图 8-1

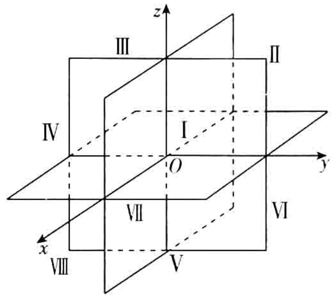

图 8-2

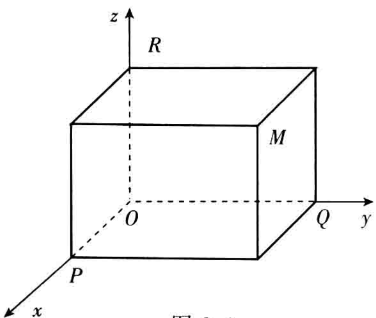

图 8-3

反之,给定一个有序数组(x,y,z),可以在x轴、y轴、z轴上取与x,y,z相应的点P,Q,R,然后过点P,Q,R分别作平面垂直于x轴、y轴、z轴,这三个垂直平面的交点为M,从而由有序数组(x,y,z)唯一地确定了空间的点M.因此空间的所有点与全体有序数组(x,y,z)之间就建立了一一对应的关系,有序数组(x,y,z)称为点M的**坐标**,其中x称为点M的**横坐标**,y称为点M的**纵坐标**,z称为点M的**竖坐标**,记为$M(x,y,z)$.

8.1.2　空间两点间的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,过M_1和M_2分别作垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成的长方体以M_1M_2为对角线(图 8-4).

设M_1与M_2的距离为d,根据勾股定理,有

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2.$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间中两点间的距离公式.

特别地,点$M(x,y,z)$与坐标原点$O(0,0,0)$的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

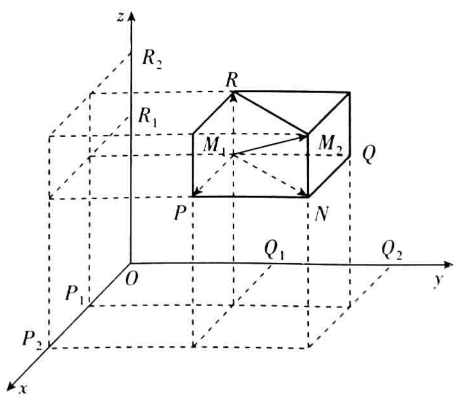

图 8-4

例 1　在z轴上求与两点$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$等距离的点.

解　因为所求的点在z轴上,所以设该点为$M(0,0,z)$,有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}.$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$，所求的点为 $\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

习　题　8-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(-1,2,3)$，　$B(2,-2,1)$，　$C(3,-1,-4)$，　$D(-3,-1,1)$，　$E(-2,1,-3)$，　$F(-1,-2,-3)$.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(2,0,1)$，　$B(0,-1,1)$，　$C(1,-4,0)$，　$D(-2,0,0)$，　$E(0,2,0)$，　$F(0,0,-1)$.

3. 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于各坐标轴、坐标面和坐标原点的对称点的坐标.

4. 求两点 $A(2,-1,3)$，$B(3,1,-1)$ 之间的距离.

5. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点和各坐标轴的距离.

6. 在 yOz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8.2　向 量 代 数

8.2.1　向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时所遇到的量，一般可分为两类. 一类是只有大小的量，称为**数量**，如时间、长度、质量等；另一类是不仅有大小而且还有方向的量，称为**向量**，如力、位移、速度等.

定义 8.1　既有大小又有方向的量称为**向量**.

我们用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的长度，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（图 8-5）. 有时也用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{r}$ 或黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{r}$ 来表示向量.

定义 8.2　如果两个向量的大小相等、方向相同，就称这两个向量是**相等**的.

从定义 8.2 可知，一个向量平移后仍与原来的向量相等，所以向量的起点可以在空间的任意一点. 与起点无关的向量称为**自由向量**. 我们研究的向量均为自由向量.

定义 8.3　向量的大小称为向量的**模**，向量 $\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量称为**单位向量**，模等于零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向，也可以认为它的方向是任意的.

定义 8.4　与向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

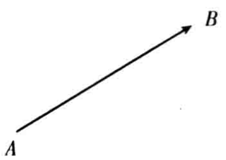

图 8-5

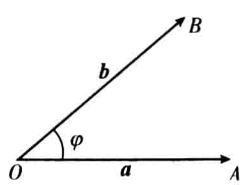

图 8-6

显然,$|-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|$,$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$,$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

定义 8.5　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,任取空间一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\angle AOB$($0\leqslant\angle AOB\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(图 8-6),记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**,记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

8.2.2　向量的加减法

根据力学中力的合成法则,我们给出两个向量加法运算的定义.

定义 8.6　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,平移 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 使它们的起点重合于点 A,并以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形,则其对角线向量$\overrightarrow{AC}$(图 8-7)称为**向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的和**,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这样用平行四边形的对角线来定义两个向量和的方法称为**平行四边形法则**. 从图 8-7 可以看出,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可以按下列方法得出:以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点,由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这个方法称为**三角形法则**(图 8-8).

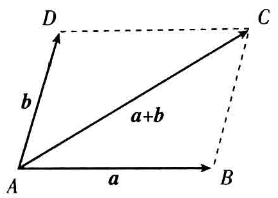

图 8-7

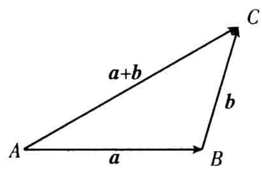

图 8-8

显然

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

向量的加法符合下列运算律:

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量的减法可以看成向量加法的逆运算.

定义 8.7　若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(图 8-9).

由图 8-9 可以看出,把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起,则由 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

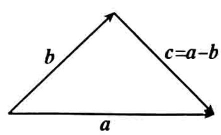

图 8-9

利用负向量,可以把向量的减法运算变为加法运算.

如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,在等式两边各加 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$,利用 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这表明向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和.

由三角形两边之和大于第三边,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\quad\text{及}\quad|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

8.2.3　向量与数的乘法

定义 8.8　设 λ 是一个实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积（简称数乘）是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

特别地，

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad 1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律（λ,μ 为实数）：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法和数乘统称为**向量的线性运算**.

设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则不难得到

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

由此也有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

即一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 除以它的模，其结果是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，这个过程称为**将向量 $\boldsymbol{a}$ 单位化**.

显然，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此可以用向量的数乘来描述向量平行的关系.

定理 8.1　若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1　在平行四边形 $ABCD$ 中，M 是平行四边形对角线的交点（图 8-10），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

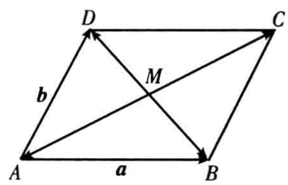

图 8-10

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM},\quad 2\overrightarrow{MA}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MB}$，所以

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

8.2.4　向量的坐标表示

用几何方法讨论向量及其运算比较直观，但是计算不方便，而且有些问题仅靠几何方法是很难解决的. 我们现在引进向量的坐标表示法，用代数方法讨论向量及其运算.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量，这

三个单位向量称为**基本单位向量**.

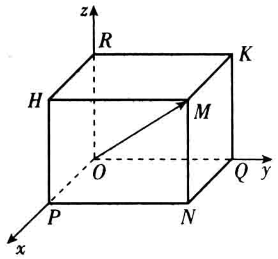

图 8-11

设 $\boldsymbol{r}$ 是一个给定的向量，若将 $\boldsymbol{r}$ 的起点移到坐标原点 O 处，此时 $\boldsymbol{r}$ 的终点在点 M 处，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 设点 M 的坐标为 (x,y,z)，过 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴，依次交坐标轴与 P,Q,R 三点(图 8-11)，不难看出

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

根据向量的加法定义，有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 当向量 $\boldsymbol{r}$ 给定时，分解式中的 x,y,z 是唯一确定的，称 x,y,z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标.

例 2　设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，点 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2=(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解　由于 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$(图 8-12)，而

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

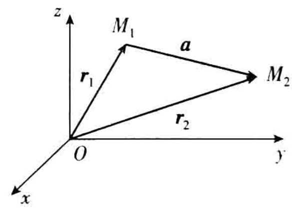

图 8-12

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

由此可知，对于起点不在坐标原点的向量，其坐标恰好等于向量终点坐标与起点坐标之差.

8.2.5　利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标表达式，可得向量的加法、减法以及数乘的运算如下.

设

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律以及数乘向量的结合律与分配律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\quad(\lambda\text{ 为实数})\\&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x,a_y,a_z)\pm(b_x,b_y,b_z)=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘运算，只需对向量的各个坐标分别进行相应的实数运算就行了.

定理 8.1 指出，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

解　由于

$$\boldsymbol{a}=(1,2,3),\quad \boldsymbol{b}=(2,-2,3),$$

所以

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1-2,2-(-2),3-3)=(-1,4,0)=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},$$

$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2,4,6)+(6,-6,9)=(8,-2,15)=8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}.$$

在运用向量的坐标时应注意一点：记号 (x,y,z) 既可表示点 M，又可表示向量 $\overrightarrow{OM}$，在几何中点与向量是两个不同的概念，不可混淆. 因此，在看到记号 (x,y,z) 时，需要从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当 (x,y,z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x,y,z) 表示点时，就不能进行运算.

8.2.6　向量的模及方向余弦

向量是由它的模和方向确定的，如果已知一个非零向量的坐标，那么它的模和方向也可以用其坐标来表示.

设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，即将 $\boldsymbol{r}$ 的起点移到坐标原点 O 处，终点为点 M，M 的坐标为 (x,y,z). 由两点间的距离公式，有

$$|OM|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

所以，向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这就是说，向量的模的平方等于它的各坐标的平方和.

例 4　已知两点 $A=(1,1,2)$ 和 $B=(3,-1,3)$，求与向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\overrightarrow{AB}^0$.

解　因为 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3,$$

于是

$$\overrightarrow{AB}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{3}(2,-2,1)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

若非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向的夹角依次为 α,β,γ，则 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

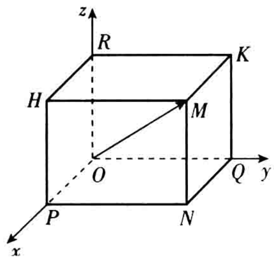

图 8-13

设非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$(图 8-13),点 M 的坐标为 (x,y,z),故

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OM|}=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},$$

类似可知

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而非零向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的方向余弦的坐标表示式为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

不难看出,方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

实际上,

$$\boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

上式表明,以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{r}^0$.

例 5 已知两点 $M_1=(2,2,\sqrt{2})$和 $M_2=(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解 先求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}).$$

从而向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模为

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2;$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

方向角为

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 6 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角相等,即 $\alpha=\beta=\gamma$,求它的方向余弦.

解 由于$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 且 $\alpha=\beta=\gamma$,有

$$3\cos^2\alpha=1,\text{即 }\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

故 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \text{或}\quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

8.2.7 两向量的数量积

在力学中,一个质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移