NURBS Geometric Modelling and Integral Equation Method

NURBS 建模与积分方程法

袁浩波 著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

NURBS建模与积分方程法

袁浩波　著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了电磁场积分方程的几种解法，包括矩量法、物理光学法以及矩量法与物理光学混合方法，在每一种方法中都采用当前流行的 NURBS 技术进行几何建模，同时采用高阶基函数进行电流展开。这些方法比传统的低阶方法效率更高，是解决电磁计算问题的一种新途径。本书还详细介绍了高阶矩量法中奇异性阻抗的计算方法，物理光学方法中的遮挡判断技术，以及矩阵压缩和迭代求解算法。

本书可以作为计算电磁学专业的研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

NURBS 建模与积分方程法/袁浩波著. —西安：西安电子科技大学出版社，2014.10

ISBN 978-7-5606-3420-3

Ⅰ. ① N…　Ⅱ. ① 袁…　Ⅲ. ① 计算机辅助设计—研究　Ⅳ. ① TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 198984 号

策　　划　刘玉芳

责任编辑　马武装　张　瑜

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司

版　　次　2014 年 10 月第 1 版　2014 年 10 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印　张　9.5

字　　数　216 千字

印　　数　1～1000 册

定　　价　20.00 元

ISBN 978-7-5606-3420-3/TP

XDUP 3712001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

序　言

不记得是谁说过一句话："每个人在事业上所取得的成就与其平时所说的废话成反比。"袁浩波正是这样的一个人。在悄悄无声，谁都不注意的环境中，他给大家推出了新作——《NURBS 建模与积分方程法》。这几年，他花了很大的精力研究克服并解决高阶矩量法(MOM)与物理光学法(PO)混合时所产生的一系列技术难点。

首先，统一的思想贯串了全书的始终，书中统一采用 NURBS 技术进行几何建模，并统一采用高阶基函数分析电流积分方程。这样既可以用于矩量法，又可以用于物理光学法，还可以进一步用于 MOM 和 PO 混合方法。这本新作一开始即提出难度较大，但立点很高的高阶基函数电流展开法，克服了 MOM 和 PO 结合时所产生的技术难点，获得了较高的计算效率。

袁浩波在大量的科研实践中遇到、研究并创新了现有的电磁计算方法，学以致用，因而其新作有理论有实践，是硕博士研究生和广大青年学者的一本优秀参考书。新作的出版使电磁计算园地又开了一朵小花，希望通过大家的研究和实践使这一园地百花盛开，欣欣向荣。

梁昌洪

2013 年 7 月

前　言

随着计算机技术的发展，计算机辅助设计和计算机辅助制造已经在电子产品的设计和生产过程中起着举足轻重的作用。从上世纪60年代开始，计算电磁学的方法就已经应用到工业产品的电磁性能仿真中，它们在工业产品的设计阶段替代了昂贵和费时的实验测试，有效节约了电磁实验成本。在所有电磁计算方法中，比较简单的是高频方法，如物理光学方法和一致性几何绕射理论方法等。这类方法虽然速度很快，但是往往精度比较低。要达到比较精确的结果就需要采用低频方法，包括矩量法、有限元方法和时域有限差分法等等，其中矩量法的使用尤其广泛。

大家通常所见的矩量法采用的是 RWG 基函数，可以称为低阶矩量法。但在 2005 年时我们注意到还存在一种所谓的高阶矩量法，它采用双线性面片来逼近复杂物体的几何结构，然后将每个面片上的电流分布用一种叠层的高阶基函数进行展开。与低阶矩量法相比，它能够将未知数总数降低一个数量级。如果将这种高阶基函数用于矩量法和物理光学混合方法之中，那么算法的计算速度将会更快。尽管如此，我们发现该算法还是有两处缺陷值得改进。一是该方法中几何建模采用双线性面片建模，属于一种最简单的插值建模方法，其精度和灵活性较差。完全可以采用当前最新的 NURBS 建模方法加以改进。当然，NURBS 建模方法将会导致矩量法阻抗元素中的积分计算异常困难，需要采用一系列新的数值积分方法才能使矩量法的计算速度满足实用要求。二是该方法产生的矩阵方程在迭代求解时难以收敛，因此很难用于求解电大尺寸问题。高阶基函数本身的叠层特性使得其矩阵条件数比低阶矩量法的矩阵条件数高得多，因此迭代求解时更难收敛。这个问题目前还没有很好的解决方案，我们只发现了一些进行改善的技术。比如用磁场积分方程代替电场积分方程，或者将高阶基函数正交化，以及引入某些预条件方法等来改善矩阵的条件数。也可以通过 IE－FFT 方法或者 ACA 压缩方法等降低矩阵的存储空间，并提高迭代过程中每一次矩阵向量乘运算的速度。甚至可以跳过迭代求解方法，直接采用大规模并行 LU 分解方法求解矩阵方程。

我的导师梁昌洪教授一直期望课题组的老师们可以出版一个系列的计算电磁学的专著。于是我把这几年对于高阶矩量法的一些工作整理成本书。本书重点介绍了三种算法：矩量法，物理光学方法，以及矩量法和物理光学混合方法。本书特色是在三种方法中统一采用了 NURBS 几何建模和高阶基函数。它们继承了现有高阶基函数方法的所有优点，同时在几何建模方面具有明显优势。我们并没有彻底解决矩阵方程迭代收敛性差的问题，只是把一些还不成熟的想法拿出来供各位同行专家学者们进行讨论，期望能够抛砖引玉，激发出更优秀的想法。

本书分为 7 章内容，每一章着重介绍算法的原理和编程的细节，然后给出若干测试例子。第 1 章简单介绍了矩量法基础知识。第 2 章介绍了 NURBS 曲面建模方法。第 3 章介绍了线天线上的高阶基函数以及相应的高阶矩量法。第 4 章为全书的重点，介绍了如何采用高阶矩量法求解面散射问题的电场积分方程。第 5 章介绍了将高阶基函数推广到求解磁

场积分方程，物理光学方法和混合方法。第 6 章详细讨论并测试了 LU 分解法和几种典型的 Krylov 迭代求解方法。第 7 章介绍了 IE - FFT 方法以及自适应交叉近似方法。另外，附录给出了几个数学概念和一些计算电磁学中经常用到的源代码。

本书的 NURBS 几何建模技术源自王楠老师的相关研究，在迭代算法和 ACA 压缩算法方面得到了安翔老师的悉心指导，在 IE - FFT 算法方面得到了赖奔博士的大力支持。本书的工作在国家自然科学基金（61072018）和中央高校基本科研业务费专项资金（K50511020032）的资助下进行，在此表示感谢。由于作者水平有限，书中的不足在所难免，敬请专家和读者朋友们给予批评指正。

作　者

2013 年 10 月

目　录

绪　论

随着计算机技术的发展，计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)已经在电子产品的设计和生产过程中起着举足轻重的作用。从上世纪60年代开始，计算电磁学的方法就已经应用到工业产品的电磁性能仿真中，它们通过建立尽量接近实际的电磁环境来计算电磁辐射或者散射，在工业产品的设计阶段替代了昂贵和费时的实验测试，有效节约了电磁实验成本。计算电磁学是在建立产品的几何模型的基础上进行电磁分析的，因此需要解决几何建模和电磁计算方法两个方面的问题。在所有电磁计算方法中，比较简单的是高频方法，如一致性几何绕射理论方法(UTD)、物理光学方法(PO)等。这类方法虽然速度很快，但是往往精度比较低。要得到比较精确的结果就需要采用低频方法，包括矩量法(MOM)、有限元方法(FEM)和时域有限差分法(FDTD)等，其中矩量法的使用尤其广泛。由于本书的核心是NURBS建模下的矩量法，故这里将重点介绍矩量法和NURBS建模技术在计算电磁学中的发展情况。

0.1 矩量法的发展

矩量法是首先根据麦克斯韦方程将边界条件转化为关于表面电流或者磁流的积分方程，然后将积分方程利用已知的基函数展开并检验，从而把积分方程转化为矩阵方程进行求解的方法。矩量法分为低阶矩量法和高阶矩量法两大类。低阶矩量法以三角形建模和RWG基函数为特征，是目前最成熟的电磁计算方法之一。低阶矩量法的缺点是未知数太多。而高阶矩量法以双线性面片建模和高阶基函数为特征，可以将未知数总数降低一个数量级。

1983年，RWG基函数的建立标志着矩量法在理论上可以解决任何电磁问题[1]。RWG基函数事实上就是定义在共棱三角形对上的屋顶基，每个三角形的尺寸限定在十分之一波长左右，所以产生的未知数总数非常多，导致该基函数只能用于电小尺寸问题的求解。随后在此基础上出现了众多快速算法，将矩量法的应用范围进一步扩大，但是这些方法总是不能很好地解决电大尺寸问题，且程序运行时要占用大量的计算资源，花费大量的计算时间。1993年出现的高阶基函数[2]却与RWG基函数大不相同，它是定义在双线性面片上的多层基函数，每个面片的尺寸可以达到1个波长。高阶基函数的灵活性很好，产生的未知数一般不到RWG基函数的十分之一，优点非常突出。

高阶矩量法采用了非常简单的双线性面片来逼近任意形状的物体表面，这种建模方式的优点很多，尤其表现在计算阻抗元素的四重积分方面，可以使得积分半解析，并利用递推公式大大提高计算速度，但缺点就是灵活性不够。比如在模拟一个弯曲比较大的曲面四边形时，不能仅用一个双线性面片，必须将曲面四边形剖分成若干个较小的面片来分别近似成双线性面片。此时由于面片的电尺寸变得很小，导致方法的效率大大降低，甚至退化

为低阶矩量法。2004 年诺特斯提出了高阶插值建模方法[3]，该方法在一个曲面四边形上取多个采样点，利用拉格朗日插值方法逼近曲面上任意一点的坐标。这种方法只是简单地用高阶插值方法取代了低阶插值方法(双线性面片)，它确实可以大大降低几何建模的误差，但远远不是目前几何建模领域的主流方法，其准确性、灵活性和效率都不能和专业建模方法相比。

1991 年，国际标准化组织正式颁布了关于工业产品几何定义的 STEP 国际标准，把非均匀有理 B 样条(NURBS)方法作为定义产品形状的唯一数学方法。NURBS 建模技术[4]已经广泛应用于汽车、轮船、飞机等工业产品造型设计中。越来越多的商业 CAD/CAM 系统，如国际上有名的 CATIA、UGII 等软件，都先后开发和扩充了 NURBS 功能。目前 NURBS 建模方法也是电磁计算中最先进的几何建模技术，它能为电磁计算提供与工业造型相一致的几何模型。

基于此，研究如何将工业造型设计的 NURBS 几何建模方法与计算电磁学的数值方法结合起来，形成高精度的电磁场数值计算方法，对于解决现实世界中众多造型复杂、电尺寸大的运载平台(如飞机、舰船)中设备的电磁兼容分析，具有重要的理论意义和现实的工程应用前景。到目前为止，对基于 NURBS 曲面模型的电磁计算方法进行研究的文章已经涉及物理光学方法和一致性几何绕射理论，但是关于 NURBS 建模与矩量法结合的文章只有一篇[5]，其主要思想是将 NURBS 建模与低阶基函数相结合。但是 NURBS 建模的优势在于面片可以很大，而低阶基函数却只能定义在小面片上，两者的根本矛盾使得这种方法没有任何优势。要化解此矛盾必须采用一种定义在大面片上的基函数，而高阶基函数恰恰堪当此任。因此本书提出的高阶矩量法就是将 NURBS 建模和高阶基函数结合起来，利用 NURBS 建模取代插值建模，提高现有的高阶矩量法的精度和灵活性。在此基础上建立一整套基于 NURBS 建模的方法，包括矩量法、物理光学法以及矩量法与物理光学混合方法等。

0.2　基于 NURBS 曲面建模的电磁计算方法

目前大多数 CAD 软件都支持 NURBS 建模技术，该建模技术具有建模精度高、面片数量少的优点。基于 NURBS 建模的电磁计算方法在上世纪 80 年代开始出现，目前已经涉及物理光学方法、一致性几何绕射理论以及矩量法与物理光学混合方法等。

1995 年麦道航空公司的艾肯等发文阐述了该公司研发的基于参数曲面的电磁计算软件 CADDSCAT[6]，该软件采用物理光学方法分析飞行器的雷达散射截面。软件采用二维高斯积分方法计算物理光学积分，在遮挡判断问题上采用了基于计算机图形学的射线寻迹代码。在欧洲，最早由西班牙学者佩尔兹等人提出采用基于 NURBS 曲面建模的物理光学方法计算电大目标的雷达散射截面。1995 年西班牙坎塔布里亚大学的多明戈和佩尔兹引进基于 NURBS 的暗区判断，避免了重新建模。他们提出采用驻相法而非高斯积分方法计算物理光学积分。同年多明戈等人发文介绍了基于 NURBS 曲面建模和物理光学方法的电磁计算软件 RANURS[7]。1996 年佩尔兹提出采用几何光学结合一致性几何绕射理论分析 NURBS 曲面建模的电大散射体。2003 年瑞典的瑟非教授对基于 NURBS 建模技术的几何绕射理论进行了比较系统的研究[8]，给出了一套完整的数值算法。

国内基于 NURBS 建模的电磁计算方法主要集中在物理光学方法和一致性几何绕射理论上。1997 年西北工业大学改进了物理光学积分的计算方法[9]。1999 年武汉大学推出了 RCS 计算软件 SCTE[10]。软件的电磁计算是采用基于 NURBS 曲面建模的物理光学和物理绕射理论，同时采用计算机图形学作遮挡判断。西安电子科技大学也研究了基于 NURBS 建模的物理光学方法[11]和一致性几何绕射理论[12]。

0.3 高阶矩量法

早在 1979 年南斯拉夫贝尔格莱德大学的波波维奇就提出使用高阶多项式基函数解决线天线的问题。1993 年美国休斯飞机公司的哈密尔顿等人提出了用插值方法定义高阶基函数[13]，虽然矩阵条件数较好，但是得到的插值基函数的灵活性不够，因而产生的未知数并不比低阶方法少太多，所以插值基函数最终没有获得广泛应用。尽管还有人不断继续研究，比如周永祖教授等用快速多极子方法对其进行了加速，但是效果并不理想。1993 年波波维奇的学生库伦伽在《IEE PROCEEDINGS - H》上发文完整地给出了求解金属天线和散射体的高阶多项式基函数[14]，才真正奠定了高阶矩量法的理论基础。

1993 年库伦伽也提出了求解金属线和面问题的高阶矩量法。在几何建模方面，用截锥来模拟曲线，而用双线性面片来模拟曲面。在基函数方面，他首先提出了在每一个面片上有很多层的基函数叠加在一起，即面片上的高阶多项式基函数，该基函数在降低未知数方面表现非常出色。随后库伦伽推出了著名的软件 WIPL[15]。与此同时，他耗费五年多的时间解决了算法的通用性问题，包括线面连接的处理、旋转体的建模、边缘效应处理，以及自动剖分等。2001 年库伦伽开始着手解决电大尺寸问题，最初直接采用共轭梯度法等迭代法求解矩阵方程，但是由于太难收敛而没有成功。2005 年受到丹麦技术大学乔根森提出的基函数正交化理论的影响，库伦伽等人提出了最大正交化基函数，该函数虽然能够提高矩阵的条件数并加快迭代求解的收敛速度，但是得到的矩阵方程仍然很难收敛。后来他们采用物理光学法和核外直接求解技术来缓解矩阵存储对计算机内存的需求，扩展了方法的使用范围。由于核外直接求解速度太慢，从 2007 年起他们开始使用并行计算等方法一步一步地解决更大规模的问题。

诺特斯教授重点研究使用高阶矩量法分析介质体的问题，他于 1995 年给出了介质中的三维高阶基函数，并解决了相应的阻抗计算问题[16]。2005 年后，诺特斯得到美国国家科学基金资助，首先实现用高阶插值面片来取代常见的双线性面片。他的研究重点转向了高阶矩量法与物理光学混合方法[17]，该方法在矩量法区域和物理光学区域都使用了高阶基函数，最终的求解速度和精度都非常令人满意。丹麦的乔根森等人的研究重点也是针对介质和混合方法，但是乔根森等人的方法的独特之处在于使用迭代方法求解矩阵方程。他们首次提出使用正交化的勒让德多项式基函数[18]来降低矩阵的条件数，在迭代求解方面做出了重要的贡献。

当国外的技术成熟之时，国内还很少有人研究高阶矩量法。目前国内对高阶矩量法展开研究的单位主要是电子科技大学[19]和西安电子科技大学[20]等。

尽管现有的高阶矩量法已经很成熟，但是作者认为其中还有三个问题尚待解决。① 插值建模方法精度低且灵活性差，完全可以采用专业的建模方法如 NURBS 进行改进。很明

显，改为 NURBS 建模后关键的问题就是如何保证阻抗矩阵填充的速度。如果速度太慢，那么改进就没有必要了。② 如何使用新技术扩大高阶矩量法的使用范围，也就是如何采用诸如快速多极子之类的技术压缩矩阵的存储空间并加快迭代求解速度。③ 大规模矩阵方程一般采用迭代求解，但是高阶矩量法产生的矩阵条件数很高，迭代求解时很难收敛，因此必须构造一个良好的预条件矩阵。这些关键问题都将在本书中进行探讨。当然，本书的内容不仅包括 NURBS 建模下的电场积分方程和磁场积分方程，还包括磁场积分方程简化出来的物理光学方法等。所有这些都是为了解决采用矩量法而最终面临的电大尺寸问题。

0.4 本书的主要内容

基于 NURBS 曲面建模的电磁计算方法目前已经得到广泛应用，本书的目的就是建立一套比较完整的、基于 NURBS 曲面建模的积分方程方法，包括高阶矩量法、物理光学方法，以及混合方法，并尽可能采用各种技术扩大可以求解的问题规模。全书分为 7 章，各章的主要内容如下：

第 1 章简单介绍了矩量法的基本过程、电磁场积分方程以及传统低阶矩量法的基函数等基本概念。

第 2 章引入了 NURBS 曲面建模的概念，包括贝齐尔曲线以及贝齐尔曲面的概念、定义和自动数据提取。

第 3 章定义了线天线上的高阶基函数，详细给出了电压元素和阻抗元素的计算方法，尤其是奇异性阻抗元素的计算方法，并通过几个简单的线天线实例检验了算法的有效性。

第 4 章为全书的重点，介绍了如何采用高阶基函数求解面散射问题，包括曲面四边形上基函数的定义，阻抗元素的快速计算方法，以及正交化基函数的概念。为了提高算法的通用性，给出了几种比较特殊的几何结构下的处理方法，包括广义三角形面片、线面混合和线面连接等情况。由此构成一套比较完整的电场积分方程方法。

第 5 章将高阶基函数推广到求解磁场积分方程、物理光学方法和混合方法。求解磁场积分方程的重点是计算近奇异性阻抗元素，这比第 4 章中的奇异性阻抗计算方法复杂得多。物理光学方法的公式很简单，书中首先给出了三角形建模下的三种遮挡判断方法，然后由此构造了一种贝齐尔建模下简单的遮挡判断方法，最后给出了两种物理光学的实现方法：直接法和间接法。所谓混合方法就是将矩量法和物理光学法混合，通过两者的折中使得算法能够以较高的精度求解大规模问题。

为了提高矩量法的矩阵方程的求解效率，第 6 章详细讨论并测试了 LU 分解法和几种典型的迭代求解方法，包括共轭梯度法、双共轭梯度稳定法和广义最小残差法三种。由于高阶矩量法产生的是强奇异性矩阵，迭代算法总是很难收敛，因此本章还引入了稀疏近似逆预条件，它可以降低矩阵的条件数，并大大加快迭代求解时收敛的速度。

在快速计算方面，第 7 章测试了 IE - FFT 方法以及自适应交叉近似方法(ACA 压缩方法)。IE - FFT 方法对格林函数进行插值，利用均匀网格上格林函数矩阵的 Toeplitz 特性来降低矩阵的存储量并加速迭代求解的速度。ACA 方法是一种独立于积分方程的简单算法，它利用矩量法阻抗矩阵的低秩特性进行矩阵压缩。对于得到的压缩矩阵方程，可以使用直接法和迭代法结合核外存储技术进行求解。

书末的附录给出了几个概念和几个数值算法程序，包括高斯积分方法和几种矩阵方程迭代求解方法的源代码。希望能在编程方面给读者朋友们一些帮助。

参考文献

[1] Rao S, Wilton D, Glisson A. Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1982, 30(3):409 - 418.

[2] Kolundzija B M, Popovic BD. Entire-domain Galerkin Method for Analysis of Metallic Antennas and Scatterers. IEE PROCEEDINGS - H, 1993, 140(1).

[3] Djordjevic M, Notaros B M. Double Higher Order Method of Moments for Surface Integral Equation Modeling of Metallic and Dielectric Antennas and Scatterers. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(8):2118 - 2129.

[4] 魏文元，宫德明，陈必森. 天线原理. 北京：国防工业出版社，1985.

[5] Valle L, Rivas F, Citedra M F. Combining the Moment Method with Geometric Modelling by NURBS Surfaces and Bezier Patches. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1994, 42:373 - 381.

[6] Elking D M, Roedder J M, Car D D. A Review of High-Frequency Radar Cross Section Analysis Capability at McDonnell Douglas Aerospace. IEEE antennas and propagation magazine, 1995, 37(5):33 - 43.

[7] Domingo M, Rivas F, Perez J. Computation of the RCS of Complex Bodies Modeled Using NURBS Surfaces. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1995, 37(6): 36 - 47.

[8] Sandy Sefi. Ray Tracing Tools for High Frequency Electromagnetics Simulations. Doctorial Thesis, 2003.

[9] Hu J L, Lin S M, Wang W B. Computation of PO Integral on NURBS Surface and its Application to RCS Calculation. Electronics Letters, 1997, 33(3):239 - 240.

[10] Cao Q F, Lu S, Xu P G. SCTE:RCS Prediction System for Complex Target and Interaction with Environment. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 1999, 4(3): 299 - 303.

[11] 陈铭，张玉，王楠，等. 基于 NURBS 建模技术的物理光学方法的遮挡判断. 西安电子科技大学学报，2006 年，33(3):430 - 432.

[12] 王楠，梁昌洪，张玉，等. NURBS - UTD 方法的爬行波射线寻迹算法. 西安电子科技大学学报，2007 年，34.(4):600 - 604.

[13] Hamilton L R, Stalzer M A, Turley R S, Method of Moments Scattering Computatons Using High-Order Basis Functions. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1993, 3:1132 - 1135.

[14] Kolundzija B M, Popovic B D. Entire domain Galerkin Method for Analysis of Generalised Wire Antennas and Scatterers. IEE Proceedings-H, February 1992, 139 (1):17 - 24.

[15] Kolundzija B M, Ognjanovic J S, Sarkar T K. WIPL-Program for Analysis of Metallic Antennas and Scatterers. Ninth International Conference on Antennas and Propagation, April 1995, 364 - 368.

[16] Popovic B D, Notaros B M. Entire-Domain Polynomial Approximation of Volume Currents in the Analysis of Dielectric Scatterers. IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation, 1995, 142(3):207 - 212.

[17] Djordjevic M, Notaros B M. Higher Order Hybrid Method of Moments- Physical Optics Modeling Technique for Radiation and Scattering from Large Perfectly Conducting Surfaces. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2005, 53(2):800 - 813.

[18] E. Jorgensen, J. L. Volakis, P. Meincke. Higher Order Hierarchical Legendre Basis Functions for Electromagnetic Modeling. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(11):2985 - 2995.

[19] 聂在平，任仪，赵延文，等. 高阶矢量基函数及其在电大目标散射分析中的应用. 2007年全国天线年会，会议记录ID：6554345。

[20] 袁浩波，王楠，梁昌洪. 一种高效率计算雷达散射截面的新方法. 西安电子科技大学学报(自然科学版)，2009，36(4):629 - 674.

第 1 章　矩量法基础知识

1.1　矩量法的基本过程

矩量法(MOM)[1]用于求解如下形式的线性泛函方程：

$$L(f) = g \tag{1.1-1}$$

式中，L 是线性算子，g 为已知函数，f 为未知函数。

假设已知一个正交完备内积空间为 f_1，f_2，f_3，…，其中内积 $\langle f, g\rangle$ 定义如下：

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle \tag{1.1-2a}$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle \tag{1.1-2b}$$

$$\langle f^*, f\rangle \begin{cases} > 0, & f \neq 0 \\ = 0, & f = 0 \end{cases} \tag{1.1-2c}$$

式中，α 和 β 为标量，$*$ 号表示复数共轭。则函数 f 总可以展开成：

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \tag{1.1-3}$$

式中，α_n 是未知系数，f_n 被称为基函数。为了获得精确解，式(1.1-3)通常应该取无穷多项求和。如果只需要获得有限精度的近似解，那么通常只需有限项求和即可。把基函数总数记为 N。将式(1.1-3)代入式(1.1-1)得到：

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \tag{1.1-4}$$

在 L 的值域内定义一个检验函数(或称为权函数)的集合 w_1，w_2，w_3，…，并用每个 w_m 对式(1.1-4)取内积，其含义是在加权残差最小的意义下确定未知系数 α_n：

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n\rangle = \langle w_m, g\rangle \tag{1.1-5}$$

式中，$m=1, 2, 3, \cdots$，也就是说可以建立很多个独立的线性方程，写成矩阵形式为

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \tag{1.1-6}$$

式中，

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1\rangle & \langle w_1, Lf_2\rangle & \cdots \\ \langle w_2, Lf_1\rangle & \langle w_2, Lf_2\rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g\rangle \\ \langle w_2, g\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{1.1-7}$$

矩量法中取检验函数个数与基函数个数相等，此时构成的方阵 $[l_{mn}]$ 一般是个非奇异矩阵，于是 α_n 由下式给出

$$[\alpha_n] = [l_{mn}]^{-1}[g_m] \tag{1.1-8}$$

因此未知函数 f 的近似解为

$$f = [f_n][\alpha_n] = [f_n][l_{mn}]^{-1}[g_m] \tag{1.1-9}$$

式中，

$$[f_n] = [f_1, f_2, f_3, \cdots] \tag{1.1-10}$$

在使用矩量法求解特定的问题时，首先要选择基函数 f_n 和权函数 w_m。基函数的选取有一定的要求。各个基函数之间必须线性无关，而且一般要求能构成一个完备系，不完备的基函数往往得出不正确的结果。当然，最理想的情况是所取基函数构成一个正交完备系，此时得到的矩阵条件数较低，利于矩阵方程迭代求解。对于权函数 w_m 的选取也有类似的要求。虽然人们喜欢选用某些固定的基函数和权函数，但矩量法的灵活性就在于，不同的基函数和权函数会产生性能迥异的算法。

在计算电磁学中，一般将矩量法产生的矩阵方程(1.1-6)写成

$$\boldsymbol{ZI} = \boldsymbol{V} \tag{1.1-11}$$

式中，$\boldsymbol{Z}$ 是一个 $N \times N$ 的方阵。求解上述矩阵方程时通常有以下两种途径：直接法和迭代法。所谓直接法，就是 LU 分解法或者高斯消元法等精确解法。这类方法的优点是精度很高，求解过程很少受矩阵条件数影响；缺点是占用内存为 $O(N^2)$，消耗的计算时间为 $O(N^3)$，当 N 比较大(10 000 以上)时，很难在 PC 机上进行求解。所谓迭代法，就是通过一个迭代过程使得结果不断逼近精确解。迭代法不仅允许对矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 进行压缩以降低内存需求，而且可能在 M 次($M \ll N$)迭代过程后很快收敛到精确结果，其计算时间为 $O(MN^2)$。迭代法的收敛速度取决于矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的条件数，一般来讲，条件数越高迭代收敛速度越慢。遗憾的是，电磁学中矩量法产生的矩阵的条件数一般都很高，因此迭代求解时很难收敛。

矩阵的条件数的定义为

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{Z}) = \|\boldsymbol{Z}\|\|\boldsymbol{Z}^{-1}\| \tag{1.1-12}$$

式中，$\|\boldsymbol{Z}\|$ 表示矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的范数。

假如在矩阵方程(1.1-11)右侧引入一个误差 $\boldsymbol{\Delta V}$，那么将使得解向量 $\boldsymbol{I}$ 中引入误差 $\boldsymbol{\Delta I}$。

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Delta I}) = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Delta V} \tag{1.1-13}$$

因此

$$\boldsymbol{\Delta I} = \boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{\Delta V} \tag{1.1-14}$$

$$\|\boldsymbol{\Delta I}\| \leqslant \|\boldsymbol{Z}^{-1}\|\|\boldsymbol{\Delta V}\| \tag{1.1-15}$$

$$\|\boldsymbol{V}\| \leqslant \|\boldsymbol{Z}\|\|\boldsymbol{I}\| \tag{1.1-16}$$

所以

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta I}\|}{\|\boldsymbol{I}\|} \leqslant \|\boldsymbol{Z}\|\|\boldsymbol{Z}^{-1}\|\frac{\|\boldsymbol{\Delta V}\|}{\|\boldsymbol{V}\|} = \mathrm{cond}(\boldsymbol{Z})\frac{\|\boldsymbol{\Delta V}\|}{\|\boldsymbol{V}\|} \tag{1.1-17}$$

由式(1.1-17)可知，如果矩阵的条件数很大，那么在激励上引入一个小误差 $\boldsymbol{\Delta V}$ 时，将导致解向量上非常大的误差。此时方程(1.1-11)称为病态矩阵方程，在迭代求解时很难收敛。直到现在，如何提高病态矩阵方程迭代求解的收敛性仍然是一个数学难题。

1.2 积 分 方 程

本书要分析的对象限定为三维自由空间之中的理想导体，而理想导体在外部激励电场 $\boldsymbol{E}^i$ 作用下感应出表面电流 $\boldsymbol{J}_S$，$\boldsymbol{J}_S$ 产生的散射场可以表示为[2]