數學研究小叢書

從代數回到算術

李緒文著
余介石校

中華書局印行

從代數回到算術

第一章　由代數推求算術應用問題解法

在算術中，整數小數分數四則應用問題，初學每視為畏途，即為教師者遇有疑難問題，亦不易逕以算術方法解之，察其困難之點乃因所求諸量不能與題中各已知量合併運算，藉以顯示題意，是以不易探得解法之正當途徑，摸索而前，輒有捫壁之苦。有時解法曲折奧妙，無線索可尋，則尤令人瞠目束手，無從下筆，故凡稍習代數學者，常以代數方法解之，如此演算，可以文字代表所求諸量，使其與已知諸量結合，立成等式，表明題意，更解所立方程式即得答案。此法程序，順情合理，固簡易矣，惜乎不能舉以教授未習代數之學生，在自修者亦深以不能由此推求算術解法為憾。按代數解法所得結果，殆即算術解法之算式，吾人宜從算術的立場，將此結果予以適當之解釋說明其意義，使之能離開其所從來之代數方程式而作為純粹的算術解法。然此事頗不易為，蓋以此結果乃一算式含有各已知量之加減乘除等基本運算，關係複雜，殊不易釋明其所以相加相減，或互相乘除之理由。是以答案雖已求得，而佈算之步驟及原理乃茫然不知，在算術方面言之，此問題固不能謂為已完全解決也。

欲由應用問題之代數解法推求算術解法，果宜如何進行，尚未見有算術或代數書籍論及此事。然算術教科書中論及應用問題解法時，間有於不知不覺中引用代數觀念者，學者於此，輒感新奇而不知如何利用之為解題之新器。本章即擬將此略為研究，以為算術應用問題解法之助。

由代數解法所得表示答案之算式，關係複雜，前已言之，欲僅由此式推求算術解法之道，實不易爲。故吾人宜着眼於其所從來之方程式，逐步探求其歷次移項，併項，移除作乘，及移乘作除等運算在事實方面之意義，並注意其中各量之正確單位，俾便於推斷各量和，差，積，商所應有之單位，既免混淆，又助解釋。

考算術整數，小數，分數四則應用問題，大率可用一元一次方程式表達其意義。題義稍繁者可用二元或三元一次聯立方程式。吾人且就立方程式之道試一論究。

以代數馭題，在先就題義立適當之方程式，其步驟如下：

(1) 以一文字代表所求之量，或以之代表一與所求量有密切關係之量，視立式之難易而擇一行之。

(2) 令此文字及題中各已知量遵循題義合成形式互異而表示同一數量或相等二量之兩代數式。

(3) 使此二代數式相等，是即所求之方程式。

(4) 若題義較繁，須假設數文字代表所求諸量或相關諸量時。吾人即按題中所示諸關係立成與文字個數相等之方程式。

於此有宜注意者二事：

(1) 方程式中各項必皆爲同類名數（或盡爲不名數），且必須具有同一之單位。

(2) 各項中二量乘除之結果，應取何單位，宜熟識之。因各量單位之正確解釋頗能顯示算式之意義，特詳述於下。

按乘法規則，a 與 b 二量相乘時，最多只能有一量爲名數，且二者之積與之爲同名數，斷不容有二名數相乘之事。例如每小時行 a 里，問 b 小時可行幾里。此題之答案爲 ab 里，算式 $a \times b$ 不能視爲 a 里與 b 小時之乘積，而當視作 a 里之 b 倍，其結果乃得 ab 里。卽以由長方形之長 a 尺及寬 b 尺求其面積之算式而言，亦不宜作

a 尺 ×b 尺＝ab 平方尺解，實應視作 a 平方尺之 b 倍或 b 平方尺之 a 倍，因此長方形可以平行於長之直線分作 b 個長方形，各含並列之 a 個平方尺，或以平行於寬之直線分作 a 個長方形，各含並列之 b 個平方尺也。故取題中二名數 a 與 b 相乘時，務須注意其當視爲 a 量之 b 倍，抑爲 b 量之 a 倍，方合題意而便於解釋。

按除法規則，同單位二名數可以相除，商爲不名數，但於除法完成後可按題意賦予此商以適當之單位。例如均分梨 a 個與兒童，每人得 b 個，求兒童人數？其算式$\frac{a}{b}$之正當解釋爲梨 a 個可均分爲$\frac{a}{b}$份，每份有梨 b 個。今令每一兒童取其一份，恰盡無餘，故知兒童人數當與所分份數相同，即應有兒童$\frac{a}{b}$人。若 a 爲名數，b 爲不名數，則商$\frac{a}{b}$與 a 爲同名數，且二者之單位相同。例如某人在 b 小時內行 ab 里，則此人每小時行$\frac{ab}{b}=a$里，式中除數 b 宜暫視作不名數方可相除，因吾人意在均分 a b 里作 b 份，每小時所行距離恰爲其一份也。至於被除數爲不名數，而除數爲名數之情形則不容存在。故取題中二名數相除時，亦宜判別其意義，當視作同單位二名數之商抑爲名數與不名數之商，若在前者，更須審察其是否應具有一適當之單位。

關於兩量之積或商之單位，本可按物理學中各導出量計算之法推定。例如速度爲每分鐘行 a 尺，故 b 分鐘行 a b 尺，a b 之單位“尺”乃由速度之單位“尺/分”，與時間之單位“分”相乘而得。仿此，每一兒童得梨 a 個，則 b 個兒童共得梨 a b 個，蓋因 a 之單位爲“（一個梨）/（一兒童）”，b 之單位爲“一兒童”，令此二單位相乘立即見其積之單位應爲“一個梨”矣。又如某人每小時行 a 里，

則行 a b 里需 b 小時，乃因 a 之單位爲"里/小時"，a b 之單位爲"里"，故其商 $\frac{ab}{a}=b$ 之單位乃上述二單位之商，固甚易見其爲"小時"也。此法本較簡易明顯，且不小易致誤，顧算術中並無如是解釋者，故本書仍循常例，寧多加解釋，俾未習物理學者，亦可瞭然。

方程式既立，卽當進而求其解矣。按一元一次方程式之解法步驟有四：

(1) 去括號，去分母：將各括號一一乘出及以分母之最小公倍數遍乘各項。

(2) 移項：使各已知項集於等式之右邊，含未知量各項則集於左邊。

(3) 合併兩邊各項：使此方程式化爲 $ax=b$ 之標準形式。

(4) 移乘作除：以未知量之係數除兩邊，卽得所求之解答。

如按題意立成二元或三元一次聯立方程式，首須用代入法或加減法消去其一元或二元而得一一元一次方程式，再實施上列四步驟以求解。消元時以採用加減法爲便，於此須尋求各方程須各乘以某一常數之實際意義。

爲便於解釋方程式之意義起見，上述各步驟，可稍變通。例如各已知之分母卽宜保留，故去分母一事，可毋庸實施，但須將$\frac{ax+b}{c}$一類之項分爲$\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}$以便在第二步中實行移項。

移項以後，在方程式兩邊諸項之前，有附加號者，有附減號者，其應加入之項，含有補足欠缺之意，其應減去者含有截去多餘之意，其目的在將兩邊截長補短，使右邊各已知項加減之結果，恰爲未知量之若干倍或幾分之幾。此時之方程式最可誘導吾人達於算

術解法之正當途徑，因其含有題中已知各量，並將此諸量互相結合之正確方法，完全呈現。熟識其各項之單位，並參照題意，稍加思索，或借助於圖表，即可說明各已知量何以應如此結合之理由。

合併方程式兩邊各項一事，可暫從緩，而先移乘作除，以左邊未知量之係數除兩邊，是即算術解法所需之算式。更將此算式化簡，即得所求未知量之值矣。此未知量之單位，可按前述規則判定之。依此規則，若未知數爲不名數，則須視題意賦予以適當之單位。有時問題所要求之答案應爲不名數即任其爲不名數可也。

如上所述，在以代數方法解算術四則應用問題之運算中，逐步探求其實際意義，則匪特算式可以求得，且此算式縱極繁複，其中各已知量互相加減或乘除之如何與事理吻合，俱可瞭然。吾人至此，已將算術解法之關鍵及算式一一獲得，再按算術解題步驟，整列所得算式，並述其佈算之理由，即成一純粹算術解法，可以脫離所從出之代數解法而獨立存在，使閱此者即可領略矣。

茲舉若干算術應用問題，首用代數解法，次由此推求算術解法，藉以闡明上述之理。

問題1　自1點至12點間，時鐘上時針與分針重疊之時刻爲何？

〔代數解法〕　吾人姑求 m（m 爲介於零與12間之正整數）點與 m+1 點間時針與分針重疊之時刻。設此重疊之時刻爲在 m 點後之 x 分鐘。因時針原在分針之 5m 個分劃之前，又時針之速率僅爲分針速率之$\frac{1}{12}$，故當分針行 x 分劃時，時針祇行$\frac{x}{12}$分劃。俟兩重疊時，分針應較時針多行 5m 分劃。故以每分劃爲單位，即得立成方程式

$$x-\frac{x}{12}=5m$$

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)x=5m$$

由上所述，$1-\frac{1}{12}$ 乃分針與時針在 1 分鐘內所行分劃數之差，其單位仍為 1 分劃。此量之 x 倍恰為 5m 分劃，故 x 為不名數。移乘作除，即得其值為

$$x=\frac{5m}{1-\frac{1}{12}}=\frac{60}{11}m.$$

因 5m 分劃可均分為每份 $1-\frac{1}{12}$ 分劃之 x 份。分針與時針所行分劃數之差若為此 1 份，即需時 1 分鐘，欲二者之差達到此份之 x 倍，即需時 x 分鐘，故按本題意義解釋，斯時當為 m 點後之 $\frac{60}{11}m$ 分鐘。

時針與分針係同向而行，試觀 x 之算式，即知本題與追及問題類似。故得下列之

〔算術解法〕 分針每行 1 分劃 $\left(\text{即鐘面周圍之}\frac{1}{60}\right)$，時針祇行 $\frac{1}{12}$ 分劃，當自 m 點出發時，分針原在時針之後 5m 分劃，故每隔 1 分鐘，分針即趕上 $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ 分劃，而使其與時針愈行愈近。待兩針重疊時，兩針之間已無距離。由此可知 5m 分劃中有若干個 $\frac{11}{12}$ 分劃即需若干分鐘方可達兩針重疊之時刻，如此分析，即得算式

$$\frac{5m}{1-\frac{1}{12}}=\frac{5m}{\frac{11}{12}}=\frac{60}{11}m$$

答分針與時針重疊之時刻爲m點後$\frac{60}{11}$m 分.

依次令 m=1, 2, 3,…,11, 即得自 1 點至 12 點間分針與時針重疊之時刻爲:

1 點 5$\frac{5}{11}$分, 2 點 10$\frac{10}{11}$分, 3 點 16$\frac{4}{11}$分,

4點 21$\frac{9}{11}$分, 5 點 27$\frac{3}{11}$分, 6 點 32$\frac{8}{11}$分,

7 點 38$\frac{2}{11}$分, 8 點 43$\frac{7}{11}$分, 9 點 49$\frac{1}{11}$分,

10點54$\frac{6}{11}$分, 11點60分,即12點.

問題 2 在 1 點後,2 點後,3 點後,……時鐘上時針與分針順次分居 "1","2","3",……等字兩側,而與各該字有相等距離之各時刻爲何?

〔代數解法〕 設所求各時刻之一爲m(m 爲介於零與 12 間之正整數)點後之 x 分鐘,因分針每分鐘行鐘面上之一分劃,而時針只行$\frac{1}{12}$分劃,故由m點鐘至m點鐘後之 x 分鐘,分針行 x 分劃,而時針行$\frac{1}{12}$x 分劃.吾人注意 x 及$\frac{1}{12}$x 兩式中之 x 應作不名數解而其係數 1 及$\frac{1}{12}$則爲名數,各以 1 分劃爲單位。是時分針距 "m" 字有 5m－x 分劃,時針距"m"字有$\frac{1}{12}$x 分劃,題云此二距離係相等之量,且在"m"字之兩側,故得立成方程式如下:

$$5m-x=\frac{1}{12}x.$$

(天)

移項得 $$x+\frac{1}{12}x=5m$$

此式表示在x分劃上補足$\frac{1}{12}$x分劃恰爲5m分劃,更合併同類項得 $$\left(1+\frac{1}{12}\right)x=5m$$

如上所述, $1+\frac{1}{12}$ 乃時針與分針在一分鐘內所共行之分劃數.此量之x倍恰爲5m分劃,故x爲不名數,其值爲

$$x=\frac{5m}{1+\frac{1}{12}}=\frac{60}{13}m.$$

但5m分劃可按每份$\left(1+\frac{1}{12}\right)$分劃均分爲x份,時分兩針行此一份需時一分鐘,故行此x份需時x分鐘,是以按照題義解釋,此時當爲m點鐘後$\frac{60}{13}$m分鐘.

移項後之方程式, $x+\frac{1}{12}x=5m$,顯示時分兩針在x分鐘內當共行 5m 分劃, 此一事實示其與吾人所習知之相向走路問題相髣髴.但時針與分針之方向原係相同,欲令其改爲時分兩針在x分鐘內相向而行, 行共 5m 分劃之問題, 祗有假設時針在此時間內倒行$\frac{1}{12}$ x 分劃之一法, 而此種假設恰爲題義所許可, 因題云在x分鐘時,時針所至之處至"m"字之距離與分針所至之處至"m"字之距離固相等也.經如此分析後,遂得本題解法之關鍵,故知

〔算術解法〕 設時針倒行而速率不變,則由m點鐘起至兩針相會之時間當與由 m 點鐘起至兩針分居"m"字兩側且與之等距離之時間相同. 兩針在 m 點鐘時相距 5m 分劃, 每分鐘共行

$\left(1+\frac{1}{12}\right)$分劃。若二者相向而行，則由 m 點鐘起至相會時刻之分鐘數爲

$$5m\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=5m\div\frac{13}{12}=\frac{60}{13}m$$

答此時爲 m 點$\frac{60}{13}$m 分鐘。

依次令 m=1, 2, 3, …, 11 卽得自 1 點至12點間時針與分針分居"1", "2", "3", …… "11" 等字之兩側且與各該字有相等距離之時刻爲

1 點$4\frac{8}{13}$分，　2 點$9\frac{3}{13}$分，　3 點$13\frac{11}{13}$分，

4 點$18\frac{6}{13}$分，　5 點$23\frac{1}{13}$分，　6 點$27\frac{9}{13}$分，

7 點$32\frac{4}{13}$分，　8 點$36\frac{12}{13}$分，　9 點$41\frac{7}{13}$分，

10點$46\frac{2}{13}$分，　11點$50\frac{10}{13}$分。

問題 3　老夫婦年齡之和爲 135，由夫之年齡之三倍減去婦之年齡，則較二人年齡之和多 10，問兩人之年齡各若干？

〔代數解法〕　設夫之年齡爲 x 歲，則婦之年齡爲(135－x)歲。今按題意以 1 歲(卽 1 年)爲單位立方程式

$$3x-(135-x)=135+10,$$

去括號　$$3x-135+x=135+10,$$

移項得　$$3x+x=135+10+135,$$

卽　$$(3+1)x=135+10+135.$$

將 －135 移至右邊之意卽在兩邊各加 135，在右邊補足 135 歲

後適爲夫年之 3+1=4 倍。此事提示吾人在算術解法中所應取之步驟。其理由至易說明，蓋所立方程式之左邊原爲夫年之三倍中欠缺婦年之一倍，今加入 135 歲，(卽夫年之一倍及婦年之一倍)則在補足其中所缺婦年之一倍外並另加夫年之一倍，故合成夫年之 3+1=4 倍矣。此 4 字乃一不名數，因之求得之

$$x=\frac{135+10+135}{3+1}=70$$

應以歲爲單位，故老人爲 70 歲，其婦爲 65 歲。

〔算術解法〕 題云 135+10=145 歲比夫年之三倍少婦年之一倍。若加入婦年之一倍及夫年之一倍，卽 135 歲，則 145+135=280 歲，當爲夫年之 3+1=4 倍，故求夫年之算式爲

$$(135+10+135)\div(3+1)=280\div4=70$$

$$135-70=65$$

答夫年70歲，婦年65歲。

問題 4 甲乙二人同時由南村向北出發，甲每小時行六里，乙每小時行七里，約定過若干小時以後，二人均照原速度每小時加快三里依原路回歸南村，計甲早到南村六分鐘，問由出發至約定回轉之時刻究係幾小時？

〔代數解法〕 設由出發至約定回轉之時刻相隔 x 小時，往時甲行 6x 里，乙行 7x 里，此中 x 祗作不名數計算。回轉後二人速度每小時各增 3 里，甲需 $\frac{6x}{6+3}$ 小時回至南村，乙需 $\frac{7x}{7+3}$ 小時回至南村。題云甲早到 6 分鐘，卽甲在回程上比乙少行 6 分鐘，故以小時爲各項之單位立成方程式

$$\frac{7x}{7+3}-\frac{6x}{6+3}=\frac{6}{60}.$$

合併同類項，得

$$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)x=\frac{6}{60}。$$

按立式之初，x 原視作不名數，$\frac{6x}{6+3}$一項之單位爲小時，故$\frac{6}{6+3}$之單位仍係小時。考$\frac{6}{6+3}$之實際意義，乃甲往時行 1 小時之路程，回時所需之小時數。蓋將往時所行之 6 里分爲$\frac{6}{6+3}$等份。回時每份須行 1 小時也。同理，$\frac{7}{7+3}$乃乙往時行 1 小時之路程回時所需之小時數，而二者之差爲二人往時各行 1 小時，回時所差之小時數，上列方程式表示積此差之 x 倍，恰式 $\frac{6}{60}$ 小時，故移乘作除後之

$$x=\frac{\frac{6}{60}}{\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}}=3$$

卽係預先約定之小時數。

由此觀之，此題解法之要點，在先求二人往時各行 1 小時後回時所差之小時數，再以之除實際相差之時數，$\frac{6}{60}$，卽得所求之時數，故得

〔算術解法〕　設約定由出發至約定回轉之時刻爲 1 小時，則回程上甲行$\frac{6}{6+3}$小時，乙行$\frac{7}{7+3}$小時，故甲可早到$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)$小時。今知甲早到 6 分鐘$=\frac{6}{60}$小時，故將$\frac{6}{60}$小時分爲每

份$\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)$小時之若干等份。此等份之個數即所求之小時數也。其算式如次

$$\frac{6}{60}\div\left(\frac{7}{7+3}-\frac{6}{6+3}\right)=\frac{1}{10}\div\frac{1}{30}=3.$$

答由出發至約定回轉時刻爲 3 小時。

問題 5　雞足比兔足多 80，若二者隻數互換，則雞足比兔足少 280，求原來雞兔之隻數。

〔代數解法〕　設兔有 x 隻，因兔有 4 足而雞只有 2 足，當雞兔足數相等時，雞數已爲兔數之$\frac{4}{2}=2$ 倍。今雞足比兔足多 80，故雞數較兔數之 2 倍猶多$\frac{80}{2}=40$，即雞有$\left(2x+\frac{80}{2}\right)$隻。二者隻數互換以後，則兔足有 $4\left(2x+\frac{80}{2}\right)$，雞足 2x。前者比後者多 280，故以足爲單位即可立成方程式

$$4\left(2x+\frac{80}{2}\right)=2x+280.$$

去括號，　$4\times2x+4\times\frac{80}{2}=2x+280,$

移項　$4\times2x-2x=280-4\times\frac{80}{2},$

即　$(4\times2-2)x=280-4\times\frac{80}{2}.$

因雞數原比兔數之二倍多 $\frac{80}{2}=40$，故互換以後兔數反較雞數之二倍多 40 矣。上式右邊減去 $4\times\frac{80}{2}=160$ 之意乃將此多餘之 40 隻兔之足數 160 減去，亦即取去兔 40 隻，使剩餘之兔數恰爲

雞數之 2 倍也。斯時兎足仍比雞足多 $280-160=120$。然每有 2 兎即有 1 雞，2 兎之足數，$4\times2=8$，比一雞之足數多 $4\times2-2=6$。由是可知上式右邊及 x 之係數皆以足爲單位，因之移乘作除求得

$$x=\frac{280-4\times\frac{80}{2}}{4\times2+2}=20$$

乃一不名數，表示足數 120 按每份 6 足而均分之份數，每份中含有兩兎一雞，故此時雞數與份數相等，兎數爲份數之二倍。更將前此取去之 40 隻兎加入，卽知此時雞有 20 隻，兎有 $2\times20+40=80$ 隻，此係二者隻數互換以後之情形，至於原有之雞數則爲 80，而兎數則爲 20。

經此分析，算術解法之要點已豁然自現，玆更述如下。

〔算術解法〕　雞數比兎數之 $\frac{4}{2}=2$ 倍猶多 $\frac{80}{2}=40$，故互換以後兎數比雞數之2倍多 40。今將此 40 隻兎取去，則其數適爲雞數之 2 倍又其足數亦隨之減少 $4\times40=160$，故此時之兎足僅較雞足多 $280-160=120$。是時每有兩兎卽有一雞，而兩兎比一雞多 $4\times2-2=6$ 足。果以兩兎一雞爲一羣，而將所多之 120 兎足按羣分配之，卽得

$$\frac{280-4\times\frac{80}{2}}{4\times2-2}=\frac{280-160}{6}=\frac{120}{6}=20$$

羣。每羣中有一雞，故雞數爲 20，而兎數則爲

$$2\times20+\frac{80}{2}=40+40=80.$$

在互換以前雞兎之隻數，適與此相反，故

答原來有雞 80 隻，兎 20 隻。

問題 6　在兔跳 4 步所需時間內，狗僅跳 3 步，而狗跳 2 步之距離則等於兔跳3步之距離。今兔先跳 350 步，狗方追去，問狗須跳若干步方可將兔追及。

〔代數解法〕　吾人以兔跳一步之長爲單位距離，而稱之曰"兔步"，又以兔跳 4 步，卽狗跳 3 步之時間爲單位時間。

設狗須跳過 x "兔步" 方可將兔追及。因 1 "狗步" 之長等於 1 "兔步" 之 $\frac{3}{2}$，乃知此 x "兔步" 等於 $x\div\frac{3}{2}=\frac{2}{3}x$ "狗步" 之長。狗在每 1 單位時間內可跳 3 步，故狗跳此 $\frac{2}{3}x$ 步所需時間爲 $\frac{2}{3}x\div3=\frac{2}{9}x$ 個單位時間。在同一時間內，兔可跳$\frac{2}{9}x\times4=\frac{8}{9}x$步。題云狗出發時原在兔後 350 "兔步"，故自狗出發以迄其追及兔時狗應多跳過 350 個"兔步"。據此卽得立成方程式

$$x-\frac{\frac{2}{3}x}{3}\times4=350$$

卽

$$\left(1-\frac{\frac{2}{3}}{3}\times4\right)x=350$$

在所立方程式中，各項俱以"兔步"爲距離之單位。吾人可視上式括號內兩項各以"兔步"爲單位而暫以 x 爲不名數。由此推求算術解法之關鍵端在解釋此括號內兩項差之實際意義。容於該法中詳述之。

將上式中 x 之係數移乘作除而得

$$x=\frac{350}{1-\frac{\frac{2}{3}}{3}\times4}=3150,$$

即當狗追及兎時，彼已跳過 3150"兎步" 矣. 此距離等於 $3150\div\frac{3}{2}=3150\times\frac{2}{3}=2100$個"狗步"之長，是以狗須跳過 2100 步方可追及先行之兎.

〔算術解法〕 狗每跳 1"兎步"之長等於其自身跳躍 1 步之長之$\frac{2}{3}$. 狗跳 3 步需單 1 位時間，故跳過$\frac{2}{3}$步需時$\frac{2}{3}\div3=\frac{2}{9}$ 單位時間. 在此時間內兎可跳過$\frac{2}{3}\div3\times4=\frac{8}{9}$"兎步"; 然則狗每跳 1 "兎步" 即可與兎接近 $1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$"兎步". 今知狗出發時係在兎後350 "兎步". 此係$\frac{1}{9}$"兎步"之 $350\div\frac{1}{9}=3150$倍，每有 1 倍，狗跳 1"兎步"，故當二者之間距離減至 0 時，即當狗追及兎時，狗已跳過3150 "兎步"矣. 此 3150"兎步"又可化爲 $3150\div\frac{3}{2}=2100$ "狗步"，故得算式如下:

$$\frac{350}{1-\frac{\frac{2}{3}}{3}\times4}\div\frac{3}{2}=\frac{350}{1-\frac{8}{9}}\times\frac{2}{3}=350\times9\times\frac{2}{3}$$

$$=3150\times\frac{2}{3}=2100$$

答狗須跳2100步方可將兎追及.

<u>問題 7</u> 在闊一百五十尺長二百二十八尺之地基內，有長三十尺闊十五尺深八尺之池一口，今如以基地內之土，將此池塡滿，並使全基地爲等高，問全基地應低下幾尺?

〔代數解法〕 設全基地低下 x 呎，基地面積爲 $150\times228-30$

$\times 15 = 33750$ 平方尺，故可掘起之土有 $33750\,x$ 立方尺，題云此土塡入池中，池適塡滿與四周基地等高，故此土之體積當與掘土以後之池之體積 $30 \times 15(8-x) = 450(8-x)$ 立方尺相等，因得方程式

$$(150 \times 228 - 15 \times 30)x = 15 \times 30(8-x),$$

即 $$150 \times 228x - 15 \times 30x = 15 \times 30 \times 8 - 15 \times 30x.$$

化簡得

$$150 \times 228x = 15 \times 30 \times 8,$$

此式表示掘起之土之體積及池口深 x 尺之體積之和當與此池原來之容積相等，算術解法卽當着眼於此點.

移乘作除，得

$$x = \frac{15 \times 30 \times 8}{150 \times 228} = \frac{2}{19},$$

故此基地應低下 $\frac{2}{19}$ 尺.

〔算術解法〕 假設此基地中並無池沼，原係一片平原，而普遍掘下若干尺，則所掘起之土之體積須與題中所云之池之容積相等方能符合題意．蓋必如此方可將原地塡滿至與掘土後之基地同高也．池之容積爲 $15 \times 30 \times 8 = 3600$ 立方尺，而基地之面積爲 $150 \times 228 = 34200$ 平方尺，故應掘下之尺數當爲

$$\frac{15 \times 30 \times 8}{150 \times 228} = \frac{3600}{34200} = \frac{2}{19}.$$

答此地基應低下 $\frac{2}{19}$ 尺.

問題 8 兵士一隊排成空心方陣，共有四層，如將外層每邊減少16人，卽可排成另一空心方陣，共有八層．試求此隊兵士之人數.

〔代數解法〕 設全隊有 x 人．試作圖 ABCD 表示此隊士兵第一次排成空心方陣之情形．吾人可將其分成四個全等實心長方陣 （一六）