中央电视台远程教育教学信息网 景山远程教育网

全国联网教材

中国法制出版社
民族出版社
科学普及出版社
北京工业大学出版社
同心出版社
上海远东出版社
联合出版

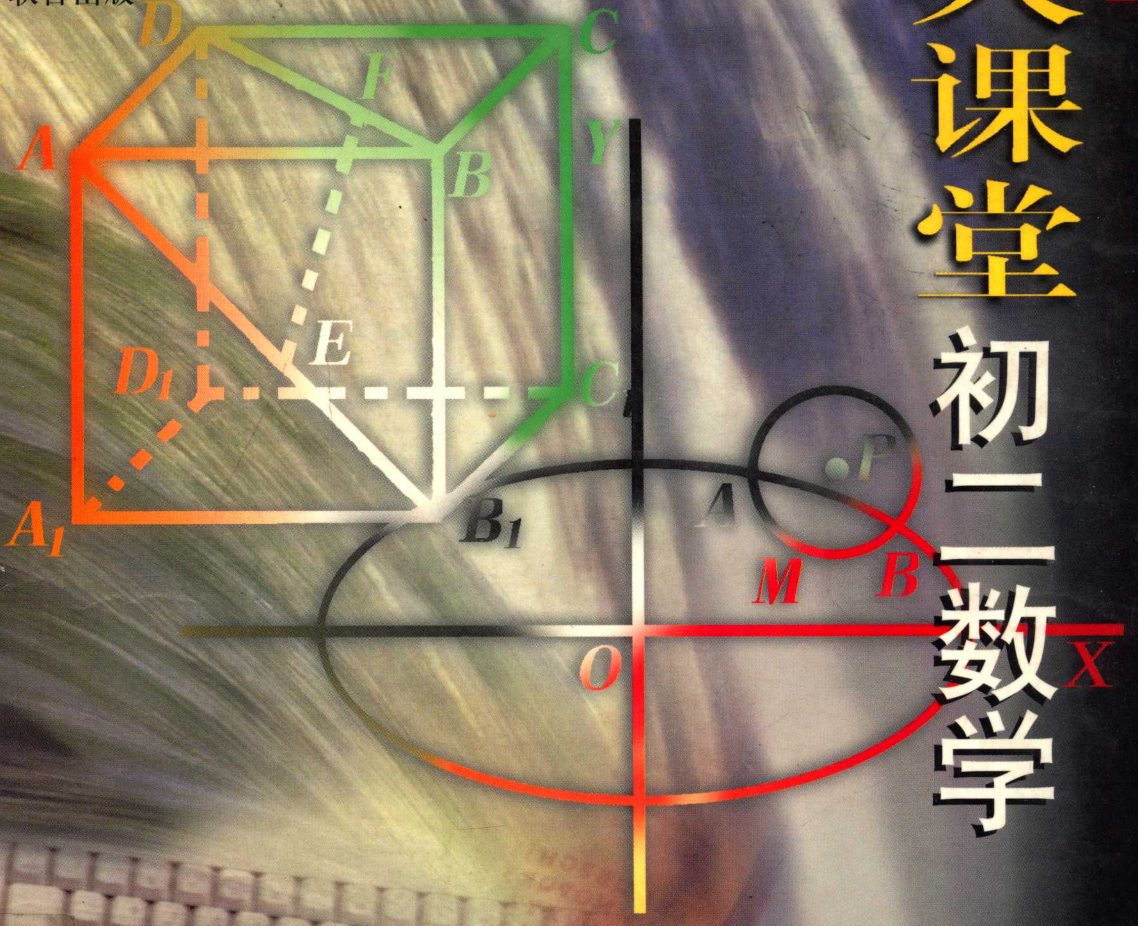
创新思维大课堂

初二数学

北京景山学校
景山教育网 编

同心出版社

CHUANGXINSIWEIDAKETANG



中央电视台远程教育教学信息网、景山远程教育网
全国联网教材

创新思维大课堂

初二数学

北京景山学校
景山教育网 编

李 平 陈新昌 赵炳启 编写

同心出版社

图书在版编目(CIP)数据

初二数学/北京景山学校、景山教育网编．－北京：同心出版社，2000.8

ISBN 7－80593－443－6

I. 初… II. 北… III. 数学课－初中－教学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07822 号

创新思维大课堂

初二数学

北京景山学校
景山教育网 编

*

同心出版社出版、发行
新华书店经销
遵化市文苑印业有限公司印刷

*

2000 年 8 月第 1 版　2000 年 8 月第 1 次印刷

787mm x 1092mm　16 开本　15.5 印张　368.16 千字

印数：1～10000 册　定价：18.00 元

前　言

北京景山远程教育网络技术有限公司系泰德集团和北京景山学校于1993年合作创办的高新技术企业，专事教学、教法、教材、教案等教学资源和教学实践的计算机与网络技术的研究、开发与应用。1997年始率先建立“景山远程教育网站”，开创远程教育事业。

为推动中国教育改革及远程教育事业，北京景山远程教育网络技术有限公司结合景山远程教育网的教学资源，组织全国众多名校名师，历经年余编写出本套丛书——全国联网教材《创新思维大课堂》。

一、适应范围

《创新思维大课堂》丛书适应21世纪教学改革形势，以最新教材为依据，含有初、高中语文、数学、英语、物理、化学、政治，分年级分科按单元编写，并含有两省一市高中一年级的数学、物理、化学试验教材内容，可供学生学习、教师备课、家长辅导参考。

二、主旨构思

本丛书以创新思维为主线，引进新思想、新方法，通过日常教学活动促进学生动脑动手的实践能力，培养学生的创新思维、创新能力，调动学生的潜能。

三、栏目设计

各单元设有“教法建议”、“学海导航”、“智能显示”、“同步题库”四大栏目，并在各栏目下设有各自共同的子栏目（依据各科特点略有调整）。

在“教法建议”栏目下设有“抛砖引玉”、“指点迷津”，以导引教法，透视疑难；在“学海导航”栏目下设有“学法指要”、“思维体操”，以启迪学法，开启心智；在“智能显示”栏目下设有“动手动脑”、“创新园地”，以建立信心，扩展思路。通过如上栏目，启发学生探索、实践，提高自主学习、独立思考的能力。

四、名师撰稿

网上资源撰稿人均是来自北京、天津、重庆、辽宁、河北、河南、安徽、福

建、四川、浙江等地区的名教师，它们拥有贯彻素质教育的理论和方法，并有多年的教学经验和创新意识。

五、联合出版

本丛书共计35册，由六家出版社联合出版发行。他们是中国法制出版社、民族出版社、科学普及出版社、北京工业大学出版社、同心出版社和上海远东出版社。

由于汇稿时间仓促，疏漏之处在所难免，欢迎指正。今后将不断修改并补充新教材新内容。

编　者

2000年7月

目　录

代数部分

平面几何部分

代数部分

第八章　因式分解

一、教法建议

抛砖引玉

本章是一个单元自成体系．从引言的图形的面积运算引入因式分解这个概念，使学生了解因式分解是整式乘法的逆变形．因式分解的概念是把一个多项式化成几个整式积的形式，通过插图教学的直观引入，易于接受因式分解概念，便于理解，再由此引入提取公因式法就比较自然，要向学生讲授清楚什么是多项式各项公因式，然后回顾分配律，讲述什么叫做提取公因式及如何运用提取公因式法分解因式．结合课本例 1～例 3 讲授公因式是单项式的类型．在教学时注意引导学生观察，先提出各项公因式，然后将多项式各项都写成公因式或其相应的因式的积．最后再提取公因式，对课本例 4～例 7 讲授要孕育换元思想，将其转化为课本例 1～3 例型，同学们接受就容易了．在因式分解教学中，始终注意符号的变化及不要漏项．

运用公式法分解因式，首先使学生理解每个公式的意义，掌握每个公式的结构特点才能熟练运用公式，将多项式进行因式分解．结合例题作示范性分析，说明运用公式分解因式的思考过程，分解因式的方法．

分组分解法是在学习提取公因式法和运用公式法之后讲授的一种分解因式的方法，使学生掌握分组分解法的概念、掌握分组分解法的原则是：(1) 分组后可以直接提取公因式；(2) 分组后可以直接应用公式．因而，分组分解法在分组前必须预先考虑到分组后能否继续进行因式分解，合理选择分组方法更显得十分重要．结合实例，突出分组法的灵活性、技巧性，且无固定模式．在分组结合时要注意加法结合律、交换律的应用，又要注意添加括号时符号的变化．

十字相乘法是研究二次三项式因式分解的，要结合实例，讲授首项系数为 1 的二次三项式及首项系数不是 1 的二次三项式分解因式的思路、分法、技巧，对于首项系数为 1 的二次三项式的十字相乘法，重点是运用公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 进行因式分解，对于首项系数不是 1 的二次三项式通常借助画十字交叉线进行因式分解，但注意系数的分解时符号的变化规律．

通过分解因式方法的学习，引导学生总结出把一个多项式分解因式的一般步骤．

指点迷津

提取公因式法是最基本的也是最重要的一种因式分解方法，学好这种分解因式的方法，关键是找出多项式的公因式．运用公式法一定要熟记五个乘法公式，掌握公式的特征．分组分解法一定要把握分组的原则——分组后必须能继续进行因式分解（用提取公因式法或运用公式法等），添加括号时要注意符号的变化．十字相乘法是二次三项式分解因式的特有方法，只要应用十字交叉线的办法便可解决．为了减少尝试次数，使符号问题简单化，首项系数为负数时，应先提出-1，使首项系数为正数，将首项系数分解因式时，只考虑分解为两个正因数的积．

二、学海导航

思维基础

1．因式分解把一个多项式化成几个整式的______的形式．

如 $ma+mb+mc \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} m$（　　　　　　）．

2．公因式：各项都________的因式．

如 $ma+mb+mc$ 中的 m，$6a(x+y)-5b(x+y)$ 中的________都是公因式．

3．提取公因式：如果多项式的各项有公因式，可以把这个________提到括号外面，将多项式写成因式________的形式．这种分解因式的方法叫做提取公因式法．

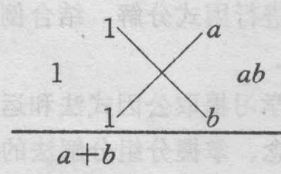
4．平方差公式：$a^2-b^2=$________．

完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=$________．

立方和（差）公式：$a^3\pm b^3=$________．

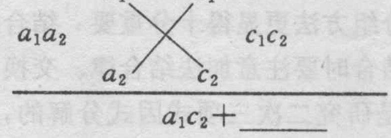
5．分组分解法：利用________来分解因式的方法．分组分解的原则：(1) 分组后能直接提________，(2) 分组后能直接运用________．

1．$x^2+(a+b)x+ab=(x+b)(x+$　　　$)$．



2．$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$

$=($____$+c_1)(a_2x+$____$)$．



3．把一个多项式因式分解，一般可按下列步骤进行：(1) ________________，(2) ________________，(3) ________________，(4) ________________．

4．把一个多项式因式分解，有以下几种基本方法：(1) __________，(2) __________，(3) __________，(4) __________．

5．计算 $(x+a)^2-(x-a)^2$ 时，通常不是按照运算顺序先做整式乘法，而是先________，

得$(x+a)^2-(x-a)^2=[(x+a)+(\quad)][(\quad)-(x-a)]=$________$=$________.

学法指要

例：把下列各式分解因式：

1. $(a+b)(x+y)-(b-a)(x-y)$；
2. x^2-64；
3. $25(x+y)^2-16(x-y)^2$；
4. $a^2x^2+16ax+64$；
5. $(a^2+b^2-1)^2-4a^2b^2$；
6. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$；
7. $(x^2-2xy)^2-y^4-2y^2(x-y)^2$；
8. $(a+b)^2+2(a+b)-15$；
9. $7p^2-5pq-2q^2$；
10. $ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$.

思考题：1. 因式分解通常采取哪些方法？2. 五个乘法公式你知道吗？3. 因式分解中的分组分解法的原则是什么？4. 十字相乘法你掌握了吗？

【思路分析】1. 从题看起来，似乎找不到公因式，观察一下可以发现$-(b-a)=-[-(a-b)]=(a-b)$. 这时便找到公因式. 于是找到解题思路.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(a-b)(x+y)+(a-b)(x-y)\\
&=(a-b)(x+y+x-y)\\
&=2x(a-b).
\end{aligned}
$$

2. 第 2 题由x^2-64中的x的指数 2，又只有两项，考虑应用平方差公式. 因为$64=8^2$，此时x^2-64可转化为x^2-8^2符合平方差公式的特征. 用平方差公式分解因式，便很顺利.

原式$=x^2-8^2=(x+8)(x-8)$.

3. 第 3 题可视$25(x+y)^2=[5(x+y)]^2$为一项，$16(x-y)^2=4[(x-y)]^2$为一项，这样须符合平方差公式特征，借助平方差公式，进行分解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=[5(x+y)]^2-[4(x-y)]^2\\
&=5[(x+y)-4(x-y)][(x+y)+4(x-y)]\\
&=(5x+5y-4x+4y)(5x+5y+4x-4y)\\
&=(x+9y)(9x+y).
\end{aligned}
$$

4. 第 4 题由$a^2x^2+16ax+64$可知$(ax)^2$与8^2两个平方项与完全平方公式特征相吻合，试用完全平方公式解之.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(ax)^2+2\cdot 8\cdot ax+8^2\\
&=(ax+8)^2.
\end{aligned}
$$

5. 第 5 题视$(a^2+b^2-1)^2$为一项，$4a^2b^2=(2ab)^2$为一项，用平方差公式求解.

原式$=(a^2-2ab+b^2-1)(a^2+2ab+b^2-1)$.

在探索中发现两括号内的前三项结合又符合完全平方公式，再用完全平方公式继续分解.

原式$=[(a-b)^2-1][(a+b)^2-1]$

此时视$(a-b)^2$　$(a+b)^2$　$1=1^2$各为一项，又可利用平方差公式分解因式.

原式$=(a-b-1)(a-b+1)(a+b-1)(a+b+1)$.

6. 第 6 题用提取公因式法、公式法都难达目的，应转换思维角度，考虑分组分解法．但分组时，必须遵循两个原则：有利于提取公因式或有利于运用公式法，即有利于继续分解因式，遵循分组的原则，可找到几种不同的解法：

(1) 分组有利于应用乘法公式

原式$=(x^3+y^3)-(x^2y+xy^2)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$

$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)^2$.

又解：

原式$=(x^3-xy^2)-(x^2y-y^3)$

$=x(x^2-y^2)-y(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)(x-y)$

$=(x+y)(x-y)^2$.

(2) 有利于提取公因式

原式$=(x^3-x^2y)-(xy^2-y^3)$

$=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)(x-y)(x+y)$

$=(x-y)^2(x+y)$.

7. 第 7 题结构复杂，又具有迷惑性，是先做整式乘法呢，还是先因式分解？二者似乎兼而有之．其实不然，仔细观察，把本例视为三项式，前两项便符合平方差公式的特征，由此线索可解．

原式$=[(x^2-2xy)^2-(y^2)^2]-2y^2(x-y)^2$

$=(x^2-2xy+y^2)(x^2-2xy-y^2)-2y^2(x-y)^2$.

此时，分解因式出现新的契机，因为$(x^2-2xy+y^2)$符合完全平方式特征，所以$(x^2-2xy+y^2) = (x-y)^2$ 出现了公因式，使解题又可向前跨进一步，于是有

原式$=(x-y)^2(x^2-2xy-y^2)-2y^2(x-y)^2$

$=(x-y)^2(x^2-2xy-3y^2)$

在分解的两个因式中，$(x^2-2xy-3y^2)$符合二次三项式的特征，自然联想“$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$”这一关系式，于是分解因式 $(x^2-2xy-3y^2)$ 便找到思路——十字相乘法，即

$$\begin{array}{ccccc} & x & & +y & \\ x^2 & & \times & & -3y^2 \\ & x & & -3y & \\ \hline \multicolumn{5}{c}{xy-3xy=-2xy} \end{array}$$

∴ 原式$=(x-y)^2(x+y)(x-3y)$.

至此，已分解到底，由分组分解法、运用公式法、提取公因式法、十字相乘法，四种方

法都用上了，四种分解因式方法相辅相成，使问题找到思路。从上面逐步探索思路的过程中，我们可知，必须要熟练掌握因式分解的四种基本方法，尤其对它们的特征要了如指掌，才便于联想，捕捉隐含条件，促其转化，找到线索与突破口，从而找到思路．如本例抓住前两项符合平方差公式的特征这一线索，以此为导火线，引爆出想象不到的效果．

8．第 8 题视（$a+b$）为 x，原式便可转化为 $x^2+2x-15$，用十字相乘法十分方便．

原式$=(a+b-3)(a+b+5)$．

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -3 \\ 1 & \times & -15 \\ 1 & & 5 \\ \hline & -3+5=2 & \end{array}$$

9．第 9 题亦符合十字相乘法的特征，用十字相乘法分解因式．

原式$=(7p+2q)(p-q)$．

$$\begin{array}{ccc} 7 & & 2q \\ 7 & \times & 2q^2 \\ 1 & & -q \\ \hline & 2q-7q=-5q & \end{array}$$

10．观察第 10 题的特点，用所学的四种分解因式的基本方法都插不上手，必须先运用整式乘法法则去展开，然后再进一步观察，是否能找到突破口．

原式$=abc^2+abd^2+cda^2+cdb^2$．

此时便可发现一、三项，二、四项分别结合，有公因式可提；或一、四项，二、三项分别结合，亦有公因式可提，于是沿两条思路探索，都有成功的可能，试之如下：

原式$=(abc^2+cda^2)+(abd^2+cdb^2)$

$=ac(bc+ad)+bd(ad+bc)$

$=(bc+ad)(ac+bd)$．

又解：

原式$=(abc^2+cdb^2)+(abd^2+cda^2)$

$=bc(ac+bd)+ad(bd+ac)$

$=(ac+bc)(bc+ad)$．

上述解法，两种思路，殊途同归，都达到理想的效果，可见在遇到一个多项式无法直接用所学的方法解决时，应另辟蹊径，打破原有的框式，重新思考，转换原来固有的“面孔”，再进一步观察，便可发现“新大陆”，找到“沙漠中的绿洲”．本例不正是有力的说明吗？

以上 10 例说明了因式分解没有一个固定的模式，但因式分解的四种基本方法都是开启多项式因式分解的“钥匙”．必须娴熟掌握这把“钥匙”的特征，才能对号打开一把“锁”．

思维体操

例　把下式因式分解：x^2-2x-8．

【思考】1．“ax^2+bx+c”通常采取十字相乘法，你说对吗？

2．题目千变万化，但其“精髓”不变，如何把握住变化的“精髓”？

【思路分析】本例是二次三项式的因式分解，通常采用十字相乘法，本例采用这种方法，也是顺理成章．

原式$=(x-4)(x+2)$．

【扩散一】

把下式因式分解：$x(x-2)-8$.

本例与原式风马牛不相容，又不符合二次三项式特征，但我们把前项展开便可惊奇发现与原例一样，那么便可不解自明了．

$x(x-2)-8=x^2-2x-8=\cdots$

【扩散二】

把下式因式分解：$(m+n)^2-2(m+n)-8$.

本例设 $x=m+n$ 则原式可转化为：$x^2-2x-8=\cdots$

【扩散三】

把下式分解因式：$8+2x-x^2$.

本例只要利用加法交换律及提取二次项的系数的负号，便可转化为：

$8+2x-x^2=-(x^2-2x-8)=\cdots$

【扩散四】

把下式分解因式：x^4-2x^2-8.

本例设 $x^2=a$，则 $x^4=a^2$，那么原式转化为 $a^2-2a-8=(a-4)(a+2)$.

即 $\quad x^4-2x^2-8=(x^2-4)(x^2+2)$

$\qquad\qquad\qquad\quad =(x+2)(x-2)(x^2+2)$.

【扩散五】

把下式分解因式：x^6-2x^3-8.

本例设 $x^3=a$，则 $x^6=a^2$，那么原式转化为 $a^2-2a-8=\cdots$

【扩散六】

把下式分解因式：$x^2-2xy-8y^2$.

本例把 $x^2-2xy-8y^2$ 看成 x 的二次三项式，便可转化为原例的分解方法——十字相乘法．

原式＝ $(x-4y)$ $(x+2y)$.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & -4y \\ 1 & \times & -4y^2 \\ & 1 & 2y \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{-4y+2y=-2y} \end{array}$$

【扩散七】

把下式分解因式：$(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-8$.

本例设 $x^2+2x=y$，则原式可转化为：$y^2-2y-8=(y-4)(y+2)$.

即 原式$=(x^2+2x-4)(x^2+2x+2)$.

【扩散八】

把下式分解因式：$(m+n)^2-2(m+n)(m-n)-8(m-n)^2$.

本例设 $m+n=x$，$m-n=y$，则原式可转化为：$x^2-2xy-8y^2=\cdots$

此时便与扩散六相仿，请同学们探索．

【扩散九】

把下式分解因式：$(x+2)(x+3)-7x-14$.

本例首先考虑分解因式，是无法进行的，必须先展开，合并同类项后再考虑解决办法．

原式$=x^2+5x+6-7x-14$

$=x^2-2x-8=\cdots$

余下步骤便不言自明了．

【扩散十】

把下式分解因式：$x^3yz-2x^2yz-8xyz$.

本例有公因式 xyz 于是可先提取公因式，有

原式$=xyz(x^2-2x-8)=\cdots$

此时又出现与原例相同“面貌”，同学们又很熟悉了．

【扩散十一】

把下式分解因式：$(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(7a-8b)-28a+32b-16$.

本例直接进行因式分解，难以入手，尽管它以复杂的面貌出现在同学们面前，然而它与扩散有“亲缘”关系，于是我们可仿扩散九，先展开，合并同类项后再找思路，这是解决此类问题最佳选择．

原式$=21a^2-24ab-28ab+32b^2+77a^2-88ab-84ab+96b^2-28a+32b-16$

$=98a^2-224ab+128b^2-28a+32b-16$.

当我们运算到此处时，思路仍然感到迷茫，因为数字较大，乍一看来又没有规律，其实不然，如果我们对数字系数进行剖析，便可惊喜地发现：$98=2\cdot 7^2$，$128=2\cdot 8^2$，$224=2\cdot 2\cdot 7\cdot 8$，若把公因式 2 提取，设 $7=x$，$8=y$，则出现“$x^2+2xy+y^2$”这一完全平方式的特征．于是可将前 3 项结合得：$2[(7a)^2-2\cdot 7a\cdot 8b+(8b)^2]=2(7a+8b)^2$. 在观察 4、5 两项有公因式 4 可提取，可得$-4(7a-8b)$. 至此本例的思路已清晰可见，必须应用分组分解法，再用提取公因式法．

原式$=(98a^2+224ab+128b^2)-(28a-32b)-16$

$=2(49a^2-112ab+64b^2)-4(7a-8b)-16$

$=2[(7a-8b)^2-2(7a-8b)-8]$

$=\cdots$

此时又出现与原例相同的形式，用十字相乘法顺利达到目的，请同学们继续完成．

由求解上例，以窥全貌．通过一道例题的学习，掌握了这一类问题的特点，此为钥匙，打开一串锁．这种一把钥匙开一串锁的方法值得同学们学习与借鉴．尽管问题千变万化，千姿百态展现在你们面前，不要被它们的伪装所迷惑，裹足不前．在解题时，要善于观察，捕捉问题的特征，挖掘隐蔽条件，联想已学过的知识，把所遇到的新问题，陌生问题转化为已学过的问题及熟悉的问题上来．

三、智能显示

心中有数

因式分解的概念是因式分解方法的理论基础，是必须掌握好的一个重要概念．因此，在学习时要了解因式分解这一概念有以下特点：(1) 结果一定是积的形式；(2) 每个因式必须

是整式；(3) 各因式要分解到不能再分解为止．因式分解与多项式的乘法是相反变形，是因式分解各种方法的理论基础，并可利用这种互逆关系检验因式分解是否正确．

因式分解的四种基本方法：(1) 提公因式法；(2) 运用公式法；(3) 分组分解法；(4) 十字相乘法．对它们各自特征一定要熟练掌握，才能灵活应用．在进行因式分解，通常要遵循因式分解的一般步骤，一步一个脚印前进．

因式分解的学习为以后继续再学习奠定基础，铺平道路．学习因式分解的好坏，直接关系到下章分式的学习及以后的学习，所以对因式分解的练习要强化，方法要灵活，不要把学过的方法孤立地死记，而应该学会具体问题具体分析．学过的方法，掌握的越熟练，就越有可能在研究问题的时候，得心应手．

动脑动手

1. 把下列各式分解因式：

(1) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$；

(2) $ax-ay+a^2+bx-by+ab$；

(3) $x^2-4y^2-z^2-4yz$；

(4) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-9$；

2. 求证对于自然数 n，$2^{n+4}-2^n$ 能被 30 整除．

创新园地

把下列各式因式分解：

1. a^2-b^2；
2. $9a^2-4b^2$；
3. $25(3a+2b)^2-16(2a-3b)^2$；
4. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$；
5. $(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z)^2-(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z)^2$；
6. $x^2-6x+9-y^2$；
7. $4-9a^2-4b^2-12ab$；
8. a^6-b^6；
9. $(x^2+2x)^5-4(x^2+2x)^3$.

四、同步题库

一、选择题

1. 如果多项式 $mx+A$ 可分解为 $m(x-y)$，则 A 等于________．

(A) m　　(B) my　　(C) $-y$　　(D) $-my$

2. 如果 $x(y-1)-y+1=0$，则________．

(A) $x=1$　　(B) $y=1$　　(C) $x=1$ 或 $y=1$　　(D) $x=1$ 且 $y=1$